ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXVII.

PARS POSTERIOR.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXX.

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

MDCCLXXVII. Juillet —— Decembre.

Avec trois planches de figures.

GEOGRAPHIE

MÉ-

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXVII. Pars posterior

cum tabulis XIV. aeri incisis.

PET.

ANDR.

Corrigenda.

p. 225. lin. 21. Tab. IX. leg. IX. B.
p. 229. lin. 8. Tab. IX. leg. IX. B.

HISTOIRE

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXVII.
Juillet —— Decembre.

ASSEMBLÉE PUBLIQUE.

L'Académie Impériale des Sciences a tenu le 18 Octobre à 4 heures du soir, son Assemblée annuelle & publique, présidée par Mr. *de Domaschnef* son Directeur & honorée d'un grand nombre de Cavaliers et de Dames de distinction, des Ministres des Cours étrangères & des Membres Honoraires, parmi lesquels se trouverent le Comte de *Panin*, premier Ministre des affaires étrangères, le Prince *Orlof*, le Grand-Chambellan M. de *Schouwalof*, &c.

Mr. le Directeur ouvrit la séance par annoncer que l'Académie Impériale des Sciences fondée par le Re-

ſtaurateur de la Ruſſie et protegée par l'Auguſte *CATHERINE II*, ſe fait un dévoir de rendre dans ce jour ſolemnel un compte exact et détaillé d'une de ſes occupations principales, dont l'importance a mérité toute ſon attention; de propoſer enſuite une queſtion, dont la reſolution doit concourir à augmenter les vérités qui conſtituent & étendent les domaines des Sciences, enfin de proclamer un membre, dont les talens encore plus que ſon rang éminent ont attiré déja dépuis longtemps l'eſtime & l'admiration de la Compagnie.

Le prémier de ces trois objets fut rempli par Mr. le Prof. *Lepechin*, qui lut un plan détaillé d'une Déſcription topographique et raiſonnée de la Ruſſie, précédé d'un Diſcours de Mr. le Directeur qui en avoit fourni l'occaſion. (*)

Cette lecture fut ſuivie d'une annonce que le Secrétaire des Conférences fit avec éloge d'un memoire de S. E. Mr. le Prince *Dimitri de Gallitzin*, Chambellan actuel & Envoyé extraordinaire de Sa Majeſté Impériale auprés de Leurs Hautes Puiſſances les Etats généraux des Provinces unies. Ce Seigneur avoit déja dépuis quelques années employé ſes loiſirs à etudier la nature & à faire principalement des recherches ſur les qualités & les effets ſurprennans du feu électrique. Il n'avoit rien épargné pour étendre les connoiſſan-

(*) On trouve à la ſuite de ce recit une traduction françoiſe de ce Diſcours. Le plan même eſt l'ouvrage d'un Comité compoſé d'Académiciens & de quelques autres Sçavans de la ville que Mr. le Directeur avoit invités pour y travailler.

noiſſances que nous en avions déja, & il avoit imaginé & inſtitué des expériences nouvelles qui l'ont conduit à des réflexions auſſi intéreſſantes qu'elles ſont judicieuſes & neuves. Ce ſont ces reflexions récueillies avec ordre & appuyées ſur des expériences rapportées avec préciſion qui font l'objet du mémoire, que l'illuſtre Phyſicien a ſoumis au jugement de l'Académie & qui entre tous les autres divers écrits, qui lui avoient été addreſſés a remporté ſon attention & ſes ſuffrages. Mr. le Profeſſeur *Krafft* en lut un précis. (*)

Mr. de Domaſchnef réprit la parole de la maniere ſuivante:

Lorsque Mr. le Comte de Gothland nous a fait l'honneur de nous viſiter le 23 Juin dernier, l'entretien dont il nous honora rélativement à nos occupations nous a fait ambitionner dès cet inſtant le projet de former une liaiſon avec cet illuſtre voyageur & de le prier d'agréer une place parmis nous. C'eſt GUSTAVE III. *Roi de Suede qui a la grace de confirmer aujourd'hui ce que le Comte de Gothland avoit bien voulù accepter. Ce Monarque daigne me l'annoncer par la lettre dont il a plû à* SA MAJESTÉ *de m'honorer, datée de Drottninghom le 28 Août dernier. Et ce monument, auſſi glorieux que chèr à l'Académie, ſera une Chartre qui conſtatera un de ſes plus beaux titres.*

Mr. le Directeur remit la lettre au Secrétaire, qui la lût, ſe tenant debout. Elle eſt conçue en ces termes:

a 3 *Monſi-*

(*) Voyez ci-deſſous l'Article *Phyſique expérimentale.*

Monsieur de Domaschnef. La celebrité de l'Académie qui a bien voulu m'inscrire parmi ses membres, eut seule été suffisante pour me faire accepter cette place avec plaisir. Aujourd'hui elle m'en fait d'autant plus, que c'est une espéce de nouveau lien pour m'unir avec la Souveraine qui vous protège, & dont j'ai été à portée de connoître si particulièrement la sagesse & toutes les vertus. C'est à l'Académie surtout qu'il appartient de publier les merveilles de son regne. Je déclare par avance, qu'elle ne pourra jamais en rien dire que je ne sois pret à ratifier de ma voix, ayant rapporté de ce regne glorieux des impressions qui ne s'effaceront jamais. Au reste je m'interesserai toujours infiniment aux travaux utiles de l'Académie, dont je vous prie d'assurer tous les membres de ma constante bienveuillance. Sur ce je prie Dieu, qu'Il vous ait, Monsieur de Domaschnef, en Sa sainte & digne garde.

Etant votre affectionné
GUSTAVE.

à Drottningholm,
ce 23 d'Aout 1777.

L'Académie arreta ensuite que le Portrait de GUSTAVE III. décorat & relevat sa sale d'Assemblee et qu'on enverra régulièrement à ce Monarque les Actes de l'Académie à mésure qu'ils paroîtront.

Le Secrétaire termina la séance par la publication d'une nouvelle question proposée par l'Académie Imperiale des Sciences de St. Petersbourg pour le prix de l'année 1780. Les détails de cette publication ont éte indiqués dans

dans le Programme de cette année, qui fût diſtribué à l'Aſſemblée, et dont nous donnerons ci après une traduction françoiſe.

L'Aſſemblée ſe rendit au ſortir de l'Académie dans le dôme qui entoure le grand et fameux Globe de Gottorp. La decoration de l'intérieur de ce bâtiment, & les illuminations magnifiques et ingénieuſes ſur la grande place qui eſt devant le Globe meritent une mention particulière. On en trouvera la déſcription à la ſuite du Programme de prix. (*)

PRIX

(*) Ce fut en 1654 que *Frederic III.* Duc de Holſtein Gottorp ordonna de faire ce Globe unique par ſa grandeur. Un certain Andreas Buſch entreprit l'ouvrage ſous la direction du célébre Adam Olearius, & il ne fut achevé que dans l'année 1664 ſous le regne du Duc *Chrétien*, fils du précedent. En 1713 le Duc Adminiſtrateur des pais de Holſtein *Chrétien Auguſte* fit préſent de ce Globe à *PIERRE le Grand* qui le fit transporter par eau à Réval & de là par terre à St. Pétersbourg. On le plaça d'abord au Parc qui exiſtoit devant le jardin du Palais Impérial d'été, ſous une remiſe de bois & on en confia l'inſpection à un Mechanicien nommé Chriſtoph Degio. En 1725 par une Ordre du haut & dirigeant Sénat daté du 10 Octobre, le Globe fut donné à l'Académie Impériale des Sciences. En 1728 il fut transporté & placé dans la voute ſous l'obſervatoire, où il reſta jusqu'à la malheureuſe incendie qui arriva le 6 de Decembre 1747. Il n'en reſta du Globe que la carcaſſe ou les cercles de fer & l'axe qui lui avoient ſervi de baſe. l'Impératrice *Eliſabeth* de glorieuſe mémoire fut très ſenſible à la deſtruction de cette magnifique piece, & ordonna tout de ſuite à l'Académie des Sciences d'en faire conſtruire un autre globe qui fut de la même grandeur. On bâtit une rémiſe de bois & on y racommoda la carcaſſe, on la garnit de plaques de cuivre & on couvrit celles-ci de planches de bois. En attendant la neceſſité d'avoir

PRIX PROPOSÉ

Par

L'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg.

Pour l'Annee 1780.

La Théorie des ſons étant déja tellement perfectionnée que ni l'origine des ſons, ni leur propagation, ni la ſource de leur diverſité, entant qu'ils ſont grâves ou aigùs, forts ou foibles, ni leurs autres qualités, ſur lesquelles ſont fondés tous les principes de l'harmonie, ne ſoyent plus ignorées; il y a encore une autre diverſité trés eſſentielle dans

voir une place plus convenable pour achever le travail de ce nouveau Globe & ayant dès lors abandonné le projet de le remettre dans la voute ſous l'obſervatoire, on bâtit le dome dont il eſt queſtion ici. On y transporta le Globe en 1751 & on le couvrit de toile vernie, Les deſſins qu'on voit ſur la ſurface furent en partie exécutés par Mrs. Grimmel et Förſter, comme auſſi les conſtellations & les étoiles qu'on voit dans l'intérieur.

Le Méridien & l'Horizon furent faits par Mr. Scot, anglois, habile faiſeur d'inſtrumens de Mathématiques, & la Direction de tout l'ouvrage fut confié à Mr. l'Aſſeſſeur Trescot, Adjoint Géographe de l'Académie.

dans les ſons de la voix humaine, ſçavoir celle qui produit les différentes voyelles *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, qui nous eſt encore entièrement inconnüe, & dont par conſéquent une explication claire & détaillée feroit très importante & d'un grand ſécours dans la perfection de la Théorie.

Cela poſé on démande:

Quelle eſt la nature & le caractère de ces ſons des voyelles, ſi eſſentiellement différens entr'eux?

Et comme les facteurs d'Orgues ont tachés dépuis longtemps d'imiter dans les jeux de l'Orgue, quoiqu'avec un ſuccès fort douteux, la voix humaine, en employant certains tuyaux qui prononcent presque généralement la voyelle compoſée *ai*, on démande encore:

Si l'on ne pourroit pas conſtruire des inſtrumens ſemblables aux tuyaux de ce jeu d'Anche connû ſous le nom de voix humaine, qui imitaſſent parfaitement les différentes voyelles a, e, i, o, u, *moyennant quelques changemens apportés à la figure du tuyau, du noyau, de l'echalotte, ou de quelque autre partie eſſentielle, qui influë ſur le genre & la qualité du ſon, & donne au jeu mentionné cette harmonie ſi agréable & ſi différente de celle des autres jeux?*

Le prix qui eſt une Médaille d'or du poids de cent ducats ſera donné à celui qui, au jugement de l'Académie, aura le mieux réuſſi.

On invite les ſavans de tout païs, excepté les Membres ordinaires de l'Académie, à travailler ſur cette

 que-

queſtion, & à envoyer leurs obſervations & recherches avant le 1. Janvier de cette année 1780, à Mr. *Jean Albert Euler* Secrétaire des Conférences de l'Académie Impériale des Sciences. Celles qui arriveront après ce terme ne feront point admiſes au concours. D'ailleurs les Auteurs ſont priés d'avoir ſoin que leurs mémoires ſoient écrits diſtinctement en langue ou ruſſe, ou latine, ou allemande, ou françoiſe. Ils éviteront auſſi que leurs noms ne paroiſſent point dans les Diſſertations qu'ils enverront; mais chacun d'eux y mettra une ſentence, & en la conſignant au Secrétaire il recevra de lui une reconnoiſſance où ſera marqué le numero de la dépoſition de ſa piece, pourvû qu'il ait indiqué le lieu où ce récépiſſé lui ſera adreſſé. Chaque Auteur joindra en même temps à ſa piece un billet cacheté, qui contiendra ſon nom, & qui ne ſera point ouvert à moins que la Diſſertation y jointe n'ait remporté le Prix: & dans ce cas la médaille ſera délivrée, où l'argent payé du tréſor de l'Académie à l'Auteur, lorsqu'il aura renvoyé la reconnoiſſance qu'il aura réçue du Secrétaire. Le jugement de l'Académie ſera déclaré dans l'Aſſemblée publique & annuelle de 1780.

L'Académie attend encore des réponſes aux queſtions ſuivantes, annoncées dans les Programmes précédens.

Pour l'Année 1778.

Expliquer quel eſt le caractère des Sons que produiſent des tubes d'un diametre égal, ſoufflés à la manière des flûtes à bec, & percés d'un trou ſelon leur longueur? qu'elle eſt la variété de ces ſons par rapport à la qualité grâve & aigue

aigue, selon la différente position & grandeur de ce trou latéral?

Pour l'Année 1779.

Indiquer les meilleurs moyens, prouvés par la Théorie & par des Expériences suffisantes, de rendre durables le bois de Chêne & les autres bois de construction pour les navires, soit par la culture, soit à l'aide de certains mordans d'un bas prix, qui en pénétrant ces bois sans nuire à leur solidité, empechent la corruption des navires dans les ports, où l'eau douce se méle à l'eau de mer.

Chaque Prix est de cent ducats ou d'une médaille d'or du même poids, & les Pieces seront reçues au concours jusqu'au 1. Janvier de la dite année.

GÉOGRAPHIE.

Discours de Monſieur de *Domaſchnef*, Directeur de l'Académie Impériale des Sciences, ſur l'entrepriſe d'une déſcription topographique de tout l'Empire de Ruſſie.

C'eſt encore dans les premiers entretiens, que j'ai eu l'honneur d'avoir avec vous, Meſſieurs, que je vous ai fait entrevoir, combien je déſirerois de ſoumettre à la force & à l'activité de votre génie, à l'étendue & à la profondeur de vos connoiſſances, des travaux, dont l'influence auroit pû être la plus directe & la plus efficace ſur le bien de la ſociété. Après en avoir examiné pluſieurs, qui paroiſſoient avoir quelque analogie avec mon but, j'ai découvert un, qui me fixa par l'univerſalité de l'intérêt qu'il préſentoit, c'eſt la déſcription topographique de l'Empire de Ruſſie, conçue & exécutée par une Société comme la vôtre, Meſſieurs. Deux motifs auſſi puiſſans que nouveaux ont achevé de m'y déterminer, le premier c'eſt que pluſieurs d'entre vous Meſſieurs, ont parcouru en philoſophes obſervateurs en différens ſens cette portion du globe, & ont ſçavamment ſaiſi toutes les nüances de ſes différentes contrées tant au phyſique qu'au moral. Le ſecond & le plus important, c'eſt l'état actuel de nôtre patrie; les Annales de cette Monarchie, à quelque époque qu'on les ouvre, n'offrent point de période, à la quelle ſa puiſſance & ſa proſpérité s'accruſſent ſi rapidement & ſe fixaſſent auſſi ſolidement, que dans celle ci. La gloire à ſuivi ſes drapeaux & ſes pavillons jusques dans des contrées dont nous

nous ne connoiſſions que l'exiſtence: ſes nouvelles limites ſont ſignalées par des trophées, ſes victoires par les actes réitérés de l'humanité. Toutes les nations qui l'entourent ont éprouvé la puiſſance de ſon influence rélativement aux diſpoſitions dans lesquelles elles ſe ſont trouvées à ſon égard, ou elles ſont répouſſées par ſes conquêtes, ou réprimées par ſa vigilence, ou frappées par ſa magnanimité, ou convaincues par ſa juſtice, ou raſſurées par ſa protection, ou dirigées par ſa ſageſſe, ou tranquilliſées par ſon aſſiſtance, ou relevées par ſon alliance. La grandeur, unie à la condeſcendance & la force temperée par l'indulgence, lui ont aſſuré ſes acquiſitions; la ceſſion même qu'elle en a fait, en jettant un ſi grand éclat ſur ſon déſintéreſſement, lui offre de tributs de toutes les contrées, en verſant leur productions dans ſon ſein par des voyes jadis interdites & proſcrites pour le reſte du monde. (*) Deux provinces dont les ſentimens, les opinions & le langage nous étoient communs & que des tems moins heureux ont fait paſſer ſous la domination étrangere, ſont enfin incorporées à nous & partagent nòtre bonheur. (**) La vie civile eſt dégagée de toutes les entraves du fiſc, qui la géne en tant de manières partout ailleurs. Les reglemens ſages & utiles ouvrent mille canaux nouveaux à l'induſtrie; l'eſprit national eſt éclairé par les ſciences & les lettres; les ſentimens ſont élévés par les principes de l'éducation devénue une affaire d'état chez nous. Enfin l'enthouſiasme qui ne s'empare des ames que dans l'ivreſſe du bonheur, nous ſaiſit à la vue du beau & du ſublime dans les ſciences, les let-

(*) Navigation par la Mer noire accordée au pavillon d'Ruſſie excluſivement.

(**) L'incorporation à l'Empire des provinces de la Ruſſie blanche.

tres & les arts, dont nous ſommes entourés. Le ſoin du Gouvernement, en rectifiant la Juſtice, fixant les droits, conſtatant & aſſurant les poſſeſſions, & ſurtout en formant nos éſprits ſur le ſien qui eſt celui du ménagement, d'indulgence, ont établi & raffermi la morale du Gouvernement au point que le ſimple appel à la conſcience, (*) eſt devenue dans nôtre heureuſe patrie un des plus puiſſans reſſorts du Gouvernement. C'eſt la connoiſſance, c'eſt le ſentiment de cet état des choſes, qui m'a fait naitre le déſir de les voir dans l'enſemble, de réunir tous ces traits épars dans un ſeul tableau & tous ces rayons dans un même faiſceau. En expoſant ce déſir je deviens l'organe du voeu commun de tous mes compatriotes: mais qui ſe chargeroit de remplir ce voeu, qui en ſeroit plus jaloux, ſi ce n'eſt pas vous Meſſieurs? A cet effet j'ai l'honneur de nommer un Comité formé par ceux d'entre vous, dont les occupations habituelles s'y prètent le plus naturellement. Ce Comité ſera donc composé de Mrs. les Académiciens *Roumovski*, *Pallas*, *Laxmann*, *Lepechin*, *Güldenſtädt* & les Adjoints *Inohodſof* & *Géorgi*.

Il commencera par ſe choiſir un membre Secrétaire, dont l'office ſera de raſſembler & de fondre en un même tout, ce que chaqu'un des membres aura fait; & après s'être partagé le travail, chacun voudra bien me faire part de la partie qu'il aura choiſie. De mon coté je me reſtrains de récommander à l'attention du Comité, qu'en procedant à la deſcription de la Ruſſie, les membres redi-

(*) Cela ſe rapporte à l'établiſſement du tribunal *de l'équité*, ou *de la conſcience*: inſtitution unique, dont l'objet eſt de protéger l'homme contre la fatalité du ſort, & l'humanité quelques fois contre les loix mêmes.

redigent leurs mémoires ſous cinq chefs principaux, qui ſont les parties *géographique*, *hiſtorique*, *politique*, *phyſique* & *économique*, & qu'expoſant l'état actuel des objets, ils y joignent toutes les obſervations & toutes les vües, qui pourroient ſervir à leurs perfection ſoit préſente ſoit future. J'en citerai quelques uns ſans choix; par exemples. I. En décrivant les cours des fleuves & rivières on fera toutes les obſervations, que l'occaſion & la poſſibilité permettront, de leur chute ou de la différence de hauteur entre la ſource & l'embouchure; de même on marquera la différence du niveau entre deux fleuves; les endroits vers lesquels ils forment l'iſthme le plus rétreci; le moyens les plus efficaces pour leur communication; d'autres pour prévenir & détourner les inondations dangereuſes, dont leurs rivages éprouvent les ravages, ou même l'utilité qu' on pourroit recueillir de quelques unes de ces dernières ſelon le local: II. A l'occaſion des communications par terre on indiquera les endroits où on pourroit les rendre plus courtes, plus commodes & leur entretien moins diſpendieux: III. En parlant des forèts, de cet article ſi eſſentiel pour notre climat, on ne ſauroit trop s'étendre en décrivant cette partie ſoit en naturaliſte ſoit en politique, les moyens de les propager, de les aſſimiler au terrein, de faciliter leur cru, d'améliorer leur qualités; l'époque à la quelle il faut les abattre, le parti qu'on pourroit tirer en les élaguant ſeulement; enfin les analyſer économiquement, en indiquant les reſſources que chacun de ces enfans du ſol pourroient donner en totalité & ſéparément. IV. Les vües générales ſous lesquelles, vous enviſagerez la nature, peuvent vous fournir des voyes d'approprier, d'indigener d'autres végétaux à nôtre climat, d'étendre les bornes de ce regne & en faiſant ce don à la patrie, l'inſtruire de l'uſage

l'ufage qu'elle en pourroit retirer. V. L'agriculture, envifagée fous toutes les faces, offrira à vôtre génie le plus doux de fes exercices, c'eft d'augmenter le bienètre des hommes en perfectionnant les moyens de leur abondance, en foulageant leur travaux par des obfervations & fur les inftrumens du labourage, & fur l'art de s'en fervir & de les adapter à la diverfité du terrein; enfin fur tout ce que l'amélioration de l'économie tant générale que particuliere pourroit fuggérer. C'eft à vous Meffieurs, de rectifier, d'étendre, de perfectionner les vües que je ne fais que vaguement indiquer: vous mettrez certainement vôtre but plus loin que moi & je ne puis que marquer les voyes qui vous ménent au centre du plus vafte horizon. C'eft d'après la conviction la plus complette de vos talens & de vôtre ardeur à les dignement employer, que je vous ai dévoilé mon deffein, & que j'ai eu la fatisfaction de le voir unanimement agréer par vous Meffieurs; l'utilité de l'objet, l'époque actuelle qui le réléve tant, vous foutiendra dans la carrière que vous vous impofez. Au refte il eft de mon dévoir de vous procurer & vous faciliter l'acquifition de tous les matériaux des fources étrangères, dont vôtre immenfe travail pourroit avoir béfoin. D'abord je me flatte de la cooperation la plus efficace des nos illuftres Honoraires, dont les vaftes & folides connoisfances, fur les départemens qu'ils dirigent, nous feront d'un fécours le plus éminent. Après tout, Meffieurs, il dépendra de vous, de m'infpirer par la manière dont vous vous acquiterez de cette entreprife, les expreffions dont j'accompagnerai ce fruit de vos veilles en le mettant fous les yeux de nôtre grande & augufte Protectrice. (*)

PHY-

(*) Le plan de cet intereffant ouvrage fera inferé dans le Volume fuivant des Actes.

PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE

Lettre sur quelques objets d'Électricité, adressée à l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, par S. E. Mr. le Prince *Dimitri de Gallitzin*, Chambellan actuel de *Sa Majesté Impériale* de toutes les Russies, & son Envoyé extraordinaire auprès de Leurs Hautes Puissances à la Haye.

Messieurs!

Les réflexions sur quelques objets particuliers de l'électricité, que j'ai l'honneur de mettre ici sous vos yeux, sont les fruits de quelques années de mes études de cette partie de la Physique. Je m'y suis appliqué avec ardeur; je n'ai épargné ni peines ni soins. Si je n'y ai pas fait de progrès sensibles, la faute en est à la foiblesse de ma conception, & peut-être à la loi, que je me suis imposée, de ne rien prononcer en fait d'électricité, qu'après que des génies, comme ceux dont votre Société est composée, ayent examiné & aprécié mes recherches.

C'est cette considération, Messieurs, qui me met dans la nécessité de vous prier en grace d'interrompre vos utiles travaux, pour jetter un coup d'oeil sur les miens, & d'en dire librement vôtre pensée. Je n'ai pas la

la préſomption de vouloir les comparer par là aux vôtres: perſonne mieux, que moi, n'en ſent la diſproportion; & je vous conjure de croire, que je regarderai les inſtans, que vous m'accorderez, comme une marque de cette indulgence, qui caractériſe les vrais ſavans. Je ne prétens pas, au reſte, créer un ſyſtême à cet égard; mon unique but eſt de préſenter quelques idees neuves, dont le dégré de juſteſſe ne peut & ne doit être eſtimé, que par des Phyſiciens auſſi-éclairés, que vous l'êtes, Meſſieurs.

Quoiqu'il en ſoit, voici le fait.

Mr. *Franklin* a trouvé le premier, qu'il y a deux eſpéces d'electricités: la *poſitive* & la *négative*. Les Phyſiciens, qui ont combattu ſon ſyſtéme, en ont fait une diſpute de mots, car leurs électricités *réſineuſe* & *vitrée* &c. n'en différent, que de noms. C'eſt donc ſur cette baſe, Meſſieurs, que je vais raiſonner avec vous.

Il exiſte en effet deux électricités, & Mr. *Franklin* n'a pas dû être embaraſſé à en produire les preuves, puisqu'elles différent prodigieuſement entre elles par leurs propriétés. La premiere (*la poſitive*) repouſſe les corps, c'eſt à dire leur donne de ſon électricité: la ſeconde (*la négative*) attire les corps, ou leur en prend. Et la raiſon m'en paroit bien ſimple: la *poſitive*, ou chargée *en plus*, eſt ſurchargée de ſon fluide & a une atmosphère radiante.

Planché I. Fig. 1. *Soit A le corps électriſé poſitivement. Son atmosphère B formera, non ſeulement un tourbillon autour de*

de lui. mais aura encore des rayons C, qui se lanceront sans cesse de son milieu.

La *négative* au contraire, ou chargée *en moins*, a une atmosphère, qui forme tout simplement un tourbillon autour du corps: parce que la dose, que ce corps peut contenir d'électricité, n'est pas encore suffisante.

Soit A le corps électrisé négativement. Son atmosphère B formera un tourbillon sans aucun rayon, jusqu'à ce qu'il ait reçu, par une cause quelconque, une augmentation de fluide électrique; au quel cas il se met lui même dans l'état positif. Fig. 2.

Ces différens effets de nos deux électricités ne se réalisent cependant, à mon avis, que lorsque les corps, attirés ou repoussés, se trouvent déja dans une atmosphère électrique. Il sembleroit, que les Physiciens n'ont pas fait assez d'attention à cette circonstance: & qu'ils ont cru, que l'attraction & la répulsion se faisoient, dès que des corps se trouvoient à une certaine portée de l'électricité, sans en assigner aucune raison. Il ne peut cépendant pas exister d'effet sans cause: & si vous faites attention, Messieurs, à la forme, que je préscris à nos atmosphères, vous sentirez sans difficulté, qu'une à cause de sa surcharge & de ses rayons est faite pour repousser, & l'autre pour attirer, à cause de son insuffisance & de son tourbillon.

Si nous venons actuellemenr aux expériences, elles concourent à l'appui de mon hypothèse.

1. Préſentez un corps quelconque à une bouteille chargée. S'il n'eſt pas électriſé lui même, il ne déchargera pas la bouteille: à l'attouchement du corps il en part une étincelle, & le corps devient conducteur. Mais qu'il ſoit électriſé lui même: auſſitôt qu'il touche la bouteille, celle-ci ſe décharge. La maniere, dont nous déchargeons les bouteilles de Leyde, ſoit par le moyen d'un excitateur, ſoit avec les deux mains, &c. le prouve encore plus clairement. Vous touchez auparavant avec un des bouts de l'excitateur une des ſuperficies de la bouteille; & des lors il devient électriſé lui même, (ou conducteur.) Il ſe forme donc à ſon autre extrémité une atmosphère d'une eſpéce différente de celle de la ſuperficie de la bouteille, qu'il va toucher encore. Si cet autre bout la touche en effet, la bouteille ſe décharge avec exploſion.

2. Chargez deux bouteilles de la même eſpéce d'électricité. Aprochez-les l'une de l'autre, de manière que leurs ſommets ſe touchent réciproquement, & il n'y aura point de décharge; parce que chacune d'elles a une atmosphère, dont la direction eſt uniforme avec l'autre: elles ſe réuniſſent donc & font cauſe commune.

3. Mais que ces bouteilles ſoient chargées, chacune d'une électricité différente: à l'aproche l'une de l'autre le coup part, l'exploſion a lieu.

Je vous citerois nombre d'autres expériences, Meſſieurs, ſi je ne craignois d'abuſer de vôtre indulgence.

ce. D'ailleurs il n'y en a guere, que vôtre ſagacité reconnue ne vous ſuggérât, pourvu que vous daigniez ſeulement approfondir mes idées. J'avoue cependant, que toutes ces expériences ne parlent qu'à l'eſprit, & je voulois convaincre en même tems les ſens. En conſéquence j'ai tâché d'en trouver une, qui portât avec elle une démonſtration évidente Elle eſt très délicate, & d'une difficulté prodigieuſe dans l'éxecution.

Sur un miroir préparez une couche mince, mais ſerrée, de limaille, ou plutôt de pouſſiere d'acier; chargez de l'électricité poſitive une de ces bouteilles vuidées à la Pompe pneumatique & à moitié étamée en dehors, qu'on a imaginées à Londres. La tenant par le bas, appliquez en le bout ſupérieur ſur la pouſſiere d'acier, & l'émanation de ce bout deſſinera tout juſte la figure, que j'ai aſſignée à une atmosphère poſitive. (Fig. 1.)

Mais j'ai vainement tenté jusques ici, de manifeſter à nos yeux la forme d'une atmoſphère négative.

Il réſulte donc de mes expériences:

1°. Qu'il n'y a pas deux électricités *eſſentiellement différentes*; mais ſeulement deux modifications électriques.

2°. Que les phénomenes électriques ſont dus aux atmoſphères électriques.

3°. Que les atmoſphères des corps ſurchargés (ou électriſés poſitivement) ſont radiantes. Et

4°. Que celles des corps électrisés en moins (ou négativement) ne forment, qu'un tourbillon autour d'eux.

Ce feroit ici le lieu de vous entretenir, Messieurs, du pouvoir attractif des pointes.

Je ne leur crois pas plus de ce pouvoir, qu'à tout autre corps métallique, m'imaginant que dans tous les cas possibles, cette attraction ne commence que lorsqu'un corps se trouve déjà dans *l'atmosphère électrique.* C'est là la raison, pourquoi les lieux élevés font frappés de la foudre préférablement aux lieux bas. Le sejour de Spa m'a encore plus confirmé dans cette idée, autant que de l'excellence de ces conducteurs, qu'on place maintenant sur les bâtimens. De mémoire d'hommes on n'a vu le tonnere tomber sur Spa. J'y ai questionné des vieillards: tous m'ont assuré (& c'est une tradition qui s'y transmet de pere en fils) qu'il n'y tombe jamais, & ils en attribuent superstitieusement la cause au son des cloches. Les orages y sont fréquens cépendant, terribles même en été, & font des ravages continuels sur les montagnes des environs. Mais à l'aspect du lieu, vous en concevriez aisement la raison. Spa est situé au pied d'une haute montagne, qui va de l'Est à l'Ouest, si je ne me trompe. A un quart de lieue en face de Spa, s'éléve une autre montagne & qui va dans la même direction: de maniere que de quel côté que les nuages arrivent, leur atmosphère électrique touche avant tout la cime d'une ou de l'autre montagne; & la ville est située si bas, que cette atmosphète ne peut même l'atteindre.

J'ai

J'ai vu quelquefois arriver l'orage par l'ouverture de ces montagnes. Mais en ce cas-là, les nuages ne manquoient jamais de se partager en deux: chacune de ces montagnes en attiroit une partie.

Pour en revenir aux pointes, supposons en une déja dans l'atmosphère électrique du nuage. Vous conviendrez, Messieurs, qu'avant de se trouver dans cette circonstance, elle avoit eu nécessairement un endroit plus à portée de l'electricité, que tout autre. Cet endroit est le sommet de la pointe. Par consequent, l'electricité doit s'y porter de préférence à tout autre endroit; & elle s'y porte en effet, mais avec d'autant plus de force, qu'elle n'est plus détournée alors par aucun autre. Donc elle y réunit tous ses rayons, & la pointe devient pour l'électricité ce que le foyer d'un miroir ardent est pour le soleil. Ce dernier réunit les rayons du soleil; la pointe réunit ceux de l'électricité.

Mais présentez un corps rond: non seulement plusieurs endroits de ce corps sont autant à portée de l'electicité l'un que l'autre; mais on ne sauroit même imaginer aucune raison, qui dût porter celle-ci plutôt dans l'un, que dans l'autre de ces endroits. Au quel cas elle se porte sur toute la superficie de ce corps, & par là partage ses forces. Et le résultat de cette opération est de n'y point pénétrer, à moins que l'électricité même n'en soit fort proche & ne s'y soit arrêtée long tems; mais alors elle y pénetre avec violence, en y lançant sa foudre. Cette premiere considération paroit avoir décidé quelques Physiciens à donner une forme arrondie aux som-

ſommets des conducteurs, qu'on place ſur les bâtimens; mais j'avouerai, que je ne ſens pas la force de leurs raiſonnemens. La pointe, il eſt vrai, paroît attirer de plus loin l'électricité, mais cette électricité n'eſt point encore la foudre. Nous devons appeller *foudre* cet amas de feu électrique dans un nuage, ou cette charge, qui ſe fait par une exploſion générale. La pointe ne ſoutire que l'électricité répandüe dans l'atmoſphère du nuage. Or j'ai lieu de croire, que cet effet, prématuré pour ainſi dire, empêche même l'exploſion générale. Ce que la pointe a ſoutiré, eſt remplacé par l'électricité amaſſée dans le nuage même. La pointe continuant à ſoutirer & le nuage à remplacer, il doit à la fin s'en trouver épuiſé, ou du moins prodigieuſement affoibli, d'où il ſuit, que la décharge doit ſe faire ſourdement. Mais de quelque façon qu'elle ſe faſſe, le danger eſt toujours nul; ſi le conducteur communique bien à la terre humide & ſi le corps du bâtiment en eſt éloigné.

Permettez, Meſſieurs, que j'aie auſſi l'honneur de vous communiquer mes idées ſur la formation du tonnere.

Aucun de vous n'ignore, que l'électricité eſt répandüe dans l'air, on en trouve même par tout & en tout. Nous nous aſſurons de cette vérité par les cerfs-volans & les parangons. Par le moyen de ce dernier, j'ai tiré l'électricité de toutes ſortes de fruits, de feuilles d'arbres, de légumes, de métaux, d'un morceau d'éponge, de papier, d'étoffes de laine & de ſoye; & ſi bien qu'on peut en conclure, que les choſes, qui ne peuvent

pas

pas être essayées par le même moyen, comme les liquides par exemple, en contiennent aussi beaucoup; parce que je ne vois guere de raison, qui doive les en exclure. Plusieurs Physiciens ont avancé, il est vrai, qu'on tire rarement l'électricité d'un cerf-volant. Mais j'ose vous attester, Messieurs, que j'ai élevé mainte fois le mien, à toute heure, en tout tems, en toute saison, &c. & toujours sans manquer d'en avoir. Le climat cependant, où j'ai fait ces expériences, est, comme vous le savez, le climat de l'Europe, où l'électricité semble devoir être en moindre dose; aussi le tonnere y est-il toujours foible & rare. J'attribue donc leur peu de succès au manque de précaution. Par exemple, le fil-d'archal de leur corde s'étoit peut-être rompu. Leur cerf-volant n'étoit peut-être pas bien isolé; ou bien leur corde même a pu être trop courte. Toutes ces circonstances sont essentielles pour le succès. Au reste, il est incroyable, combien la distance, d'où l'on commence déjà à tirer l'electricité. differe de jour à l'autre. Souvent j'en avois déjà, lorsque mon cerf-volant n'étoit qu'à 100 toises d'elévation. Et le lendemain il m'en falloit quelquefois 300 & 400. &c. Mais pour peu que je tarde à en ramasser la corde, je l'examine, & j'en trouve pour la plupart la cause dans la rupture du fil d'archal.

Ceci étant posé, je regarde les nuages comme des conducteurs. (ou plutôt comme la bouteille de Leide) qui rassemblent l'électricité répandue dans nôtre atmosphère. Le soleil seche la couche d'air au dessus des nuages, & par là les isole de ce côté-là: au quel cas ils interceptent toute l'electricité, qui se trouve au des-

 sous

ſous d'eux, & en accumulent une maſſe conſidérable. Auſſi voyons-nous ſouvent des nuages très épais arriver ſans tonnere, ſe former au deſſus de nous; ou ceſſer de tonner, quand ils ſont arrivés à nous. C'eſt que dans le premier cas, la couche d'air ſec n'étoit point encore formée, & l'électricité perçoit le nuage & ſe diſſipoit en paſſant outre; ou bien le nuage, dans ſa marche au gré du vent, ſe ſera retrouvé immédiatement ſous un air, qui n'étoit point encore ſec. Et vice verſâ quand le tonnere ſe forme au deſſus de nous. C'eſt la raiſon peut-être de la rareté du tonnere, paſſé les grandes chaleurs de l'été: le ſoleil n'a plus aſſez de force alors, pour raréfier & ſecher l'air au point où il le faut.

Quant aux phénomènes du tonnere; ils n'ont lieu, à mon avis, que lorsque l'atmoſphère électrique du nuage rencontre une autre atmoſphère électrique; & il faut même, (ſi le tonnere a vraiment de l'analogie avec nôtre électricité artificielle), que les deux atmoſphères ſoient de qualité différente. Et c'eſt la *poſitive*, qui lance ſon électricité (ou ſa foudre) dans la *négative*. Auſſi paroît-il inconteſtable à préſent, que la foudre ſort très ſouvent de la terre. Je m'en ſuis parfaitement convaincu, en examinant avec attention pluſieurs objets frappés de la foudre.

Monſieur *Euler*, dont perſonne au monde n'admire plus les connoiſſances & la ſagacité, que moi; voudra bien me permettre d'être d'un avis différent du ſien. Ce ſavant, célebre à tant de juſtes titres, & qui fait tant d'honneur à l'humanité en général & à nôtre Siecle en

parti-

particulier, a cru (dans ſes *Lettres à une Princeſſe d'Allemagne*, édition de Pétersbourg), que l'électricité des nuages étoit toujours poſitive. D'autres ont ſoutenu, qu'elle étoit toujours négative. Je puis aſſurer, (& j'ai eu occaſion de m'en convaincre) qu'elle eſt l'une & l'autre alternativement; ce qui me paroît devoir néceſſairement être, ſi l'opinion, que je m'en ſuis faite, a quelque juſteſſe. Suppoſons, qu'un nuage commence par être dans un état poſitif: il rencontre (ou plutôt ſon atmoſphère) un objet, dont l'électricité eſt dans un état négatif. Auſſitôt il lui lance la ſienne, ſe défait par là de ſa ſurcharge, & devient lui même négatif. Et vice verſâ.

Mais c'eſt à Mr. *Euler* lui même à prononcer là deſſus. Quant à moi, je le repète, je ne prétens pas donner un caractère de principes à mes idées: je dois ſeulement ajouter, qu'il ſe peut que, lorſque ce ſavant, dont je ne me laſſe jamais d'étudier les ouvrages, a écrit ſes lettres; on n'avoit point encore d'inſtrumens capables de conſtater l'état de l'électricité des nuages au point que nous le pouvons maintenant. Cette expérience eſt très délicate, & demande la plus grande attention de la part de l'obſervateur.

J'avois attribué jusqu'à préſent les tremblemens de terre à la même cauſe, à l'électricité: la déſcription du grand tremblement de Lisbonne, m'y avoit encore plus confirmé. Je crus y reconnoitre tous les ſymptomes & le vrai caractère de l'électricité. Ceux, qui étoient occupés pendant ce tremblement dans les mines, ne l'avoient du tout pas ſenti. C'eſt, qu'elle avoit paſſé

tranquillement par toutes les couches intérieures de la terre, qui étant humides, lui servoient de conducteur, & n'avoit fait de ravages, qu'à sa couche supérieure, qui étant seche, lui étoit, pour ainsi dire, hétérogène.

J'avois même imaginé une machine, qui prouvoit parfaitement mon hypothèse. Je mets un morceau de métal sur une colonne d'ivoire. Je donne le choc électrique aux pieds de cette colonne. Celle-ci reste inébranlable, & l'électricité va chercher le métal, qu'elle jette au loin. Mais la découverte d'une nouvelle expérience ne laisse que de me jetter dans des grands doutes; à moins que deux causes differentes ne puissent produire un même effet.

Remplissez un bocal d'air inflammable & d'air nitreux (mésure égale). Posez-le ensuite à la distance de 10 ou de 15 pieds de la machine électrique; mais communiquant, par des procédés ordinaires, à une Bouteille de Leyde. Au moment, où on décharge la bouteille, l'intérieur du bocal paroît en feu & se brise avec une telle explosion & violence, que les morceaux de verre entrent dans le paroi, s'il s'en trouve à leur portée. Je suis persuadé, qu'en couvrant le bocal de terre, cette expérience donnera une idée parfaite du tremblement de terre ou d'une fougasse.

J'en ai conclu, Messieurs, que cette expérience nous montre.

1°. la

1°. la route, que nous devons ſuivre pour nous faciliter de nouvelles découvertes en électricité: c'eſt de la comparer & de la combiner avec d'autres.

Et 2°. Que nous ne devons pas attribuer à la matière électrique ſeule, les différens phenomènes du tonnere; mais à ſa combinaiſon avec différens airs & particuliérement avec l'air inflammable, qui ſe trouvent dans les nuages, qui ne ſont, comme vous le ſavez, que des exhalaiſons élevées de terre.

Je ne puis m'empêcher, Meſſieurs, de vous raporter ici une expérience ſingulière de l'année paſſée. Comme elle eſt unique, elle peut très bien n'être, qu'un effet du hazard. Mais cette année-ci, je me flatte de pouvoir la vérifier. Le 5. de Juillet, j'avois électriſé pendant une demi-heure, 8 oeufs couvés neuf jours déjà, & j'en laiſſai 4 ſans être électriſés. La poule continua à les couver. Le 17 du même mois, à midi, les oeufs electriſés ont commencé à éclore; & vers le ſoir, les pouſſins étoient déjà tous venus & tous noirs de plumage. De 4 non électriſés, il n'en vint qu'un le 18 au ſoir. Un autre ſe trouva caſſé, & contenoit un pouſſin blanc. Et les deux reſtans ſe ſont trouvés non féconds. La couveuſe étoit blanche.

Voilà, Meſſieurs, ce que je tiens de mon application ſoutenue à la Phyſique. Si vous agréez cette ébauche, peut-être me laiſſerai-je tenter dans quelques momens de loiſir, de reprendre pluſieurs points, ſur les

quels j'ai gliſſé légèrement; & de les traiter plus à fond. Quoiqu'il en ſoit, je ſerai au comble de mes voeux, je me croirai bien agreablement encouragé; ſi je puis mériter de m'aſſeoir à côté de vous; & de perfectionner par vôtre commerce & au milieu de vos aſſemblées ce que je puis avoir acquis de lumieres ſur la Phyſique.

Recevez au reſte, Meſſieurs, les aſſurances de l'eſtime parfaite & de la conſidération très diſtinguée, avec les quelles j'ai l'honneur d'être.

MESSIEURS,

Votre très-humble
& très obéiſſant
Serviteur,

DIMITRI PRINCE DE GALLITZIN.

MEDE-

MÉDECINE, HISTOIRE NATURELLE,

I.

Obſervations ſur les vertus médecinales de quelques plantes indigénes, dont les modernes ont ou méconnu ou négligé l'utilité.

Par

M. *Jean Emanuel Gillibert.*

Docteur en médecine de l'Univerſité de Montpellier, ancien Profeſſeur d'Anatomie, de Chirurgie & de Botanique au Collége royal de Lion, Directeur & Profeſſeur de l'Académie royale de médicine comparée à Grodno, Phyſicien pour l'Hiſtoire naturelle du Grand Duché de Lithuanie & Médecin ordinaire de S. M. le Roi de Pologne. (*)

Extrait par

M. le Profeſſeur *Pallas.*

Les purgatifs, dont la Médecine moderne a fait choix, & ſurtout le Jalap ont de préférable, que la ſubſtance réſineuſe, dans laquelle réſide leur énergie, s'y trouve masquée & radoucie par le principe gommeux, ou la partie ligneuſe & végétale qui l'accompagne. Partant de ce principe

---

(*) Préſentées à l'Académie le 15 Septembre.

cipe Monſieur *Gillibert* paſſa en révue les purgatifs indigénes, autrefois employés en médecine, que l'on a negligé de nos jours à cauſe de leur violence, dans la forme ou on les avoit adminiſtré. Il fit choix de l'eſpéce de Tithymale connue ſous le nom *d'Euphorbia Cyparisſias*, ſi vantée par *Rulandus*. Les anciens en préſcrivoient la racine & les graines, où la partie réſineuſe ſe trouve trop en maſſe & par conſéquent trop active, dans les gros vaisſeaux du tiſſû de ces parties. Il crut donc, que les feuilles de la plante, qui diſtillent à peine quelques gouttes de ce ſuc acre & laiteux, répondroient mieux à ſes vûes. Se trouvant en 1766 dans un Canton de la France, où l'occaſion pour des eſſais de ce genre lui parut favorable, nôtre obſervateur fit prendre à des pauvres malades la poudre tamiſée de ces feuilles ſechées ſans tiges, tant en forme de pilules avec la gomme Adragante, qu'en électuaire au miel, & en décoction à l'hydromel. Il s'eſt aſſuré par un grand nombre d'expériences, que cette poudre eſt un purgatif très innocent pour tous les âges & temperamens; que trente grains ſuffiſent pour les enfans de ſept ans, mais qu'on en peut préſcrire jusqu'à deux ſcrupules aux adultes. „Elle fait ſurtout des miracles, „dit-il, dans les maladies de la peau. Supérieure au „Jalap, parcequ'elle n'irrite point, & n'exite point la ſoif, „quant à ſes principes elle peut être regardée comme „ſon ſuccédané.“

Pour s'aſſurer d'un émétique modéré, qui put être ſubſtitué à l'Ipecacuanha, parmis les plantes de l'Europe, nôtre Obſervateur a d'abord jetté ſes vuës ſur *l'Aſarum*, anciennement connu comme émétique, tant en ſubſtance, qu'en

qu'en forme de décoction vineuse, mais décreditée par l'introduction de la racine Américaine. Elle méritoit pourtant d'être résuscitée, puisque l'expérience a prouvé à Mr. *Gilibert* qu'en effet elle ne le céde en rien à l'Ipécacuanha, & que donnée à douze grains ou à trente en poudre son effet est toujours le même, parceque l'estomac s'en débarasse au premier effort, après en avoir tiré l'extrait: de sorte qu'elle ne fait pas plus vomir à forte dose, qu'à une beaucoup moindre. Vingt grains d'Asarum en poudre avec une soudure de trois onces de Manne purgent pleinement aprés cinq ou six vomissemens. La racine de *l'Eupatorium Cannabinum*, que le grand *Gesner* avoit essayé sur soi même, mais que *Chomel* decredita en la donnant à un hydropique, mérite tout autant d'être rangé au nombre des émétiques indigénes. Nôtre observateur a trouvé, que l'écorce de cette racine fait vomir infusée, soit au vin ou à l'eau, mais surtout en substance. C'est alors un émétique très-doux & très-prompt, dont l'action ne fatigue presque point, & que l'on peut aussi précipiter par les selles avec des lénitifs.

„ On a longtemps désiré un remède à mixtion vé-
„ gétale, analogue aux savons. Les anciens l'avoient connu,
„ ils ont même annoncé ses proprietés: c'est la *Saponaire*.
„ Les blanchisseuses de dentelles à Malines en savent ti-
„ rer un savon supérieur au savon blanc d'Alicante &
„ meilleur pour enlever au lin le principe qui le colore.
„ Elles pilent les feuilles dans un mortier, ajoutent une
„ livre d'eau sur une demi-livre d'extrait & battent la liqueur
„ avec un petit balais, qui s'en boursoufle de manière à
„ occuper deux fois plus d'éspace. En rabaissant, le princi-

„ pe colorant de la plante, qui eſt inſoluble par le ſavon, „ tombe avec les fecules, elles décantent & obtiennent „ une liqueur trés-claire; pour la conſerver, elles la font „ évaporer dans des baſſines, & elles obtiennent une matière „ aſſez blanche, qui delayée dans l'eau produit tous les „ phenomènes du ſavon. J'ai decouvert " dit nôtre auteur „ que la poudre des Anglois, ſi vantée pour la bar- „ be, n'étoit que nôtre extrait de ſaponaire pulveriſé; elle „ eſt verdâtre, parcequ'ils ne ſavent pas ôter les fecules „ avant d'évaporer.

„ J'ai dépuis vérifié, continue-t-il, que le moyen „ qu'on a trouvé, pour decreuſer les ſoyes ſans ſavon, étoit „ de les faire bouillir dans nôtre extrait de Saponaire. „ Le blanc de ces ſoyes eſt plus beau, plus laiteux, & „ j'aſſure qu'elles durent plus, qu'aprés avoir été décreu- „ ſées par le ſavon; elles ſont moins bourrues & plus liſſes." Mr. *Gillibert* raporte enſuite pluſieurs obſervations de l'effet de la décoction de ſaponaire comme déſobſtruant dans les infractions de viſcéres les plus opiniâtres, ainſi que d'autres maladies croniques, lesquelles doivent exciter les médecins à preférer ce remède végétal & innocent aux ſavons artificiels, que les ingrédients rendent bien moins propres à l'uſage interne. Il eſt trés-certain au reſte, comme l'obſerve auſſi nôtre auteur, que beaucoup d'autres plantes de la même famille avec la Saponaire, ont des vertus analogues. Nos payſanes Ruſſes connoiſſent ſurtout la *Lychnis chalcedonica*, pour être puiſſament ſavoneuſe; ce qui lui a fait donner les noms de ſavon tatare (Татарское мыло) & d'orgueil des femmes (боярская спесь). Cette plante commune dans nos provinces temperées, ainſi que

que la Saponaire l'eſt dans toute la Ruſſie méridionale, pourra donc répondre aux mêmes vûes.

Tous les véſicatoires tirés de la claſſe des Inſectes ont la mauvaiſe qualité d'irriter les voyes urinaires. Mr. *Gillibert* penſe que quelques plantes acres pourroient leurs être ſubſtituées avec ſuccès, & leurs ſeroient au moins preferables en ce qu'elles n'ont point cette tendence. Une vieille femme en Pologne guériſſoit toutes les fiévres tierces après trois accès, en appliquant ſur les poignets quelque épithéme. Mr. *Gillibert* trouva que c'étoit l'écorce fraiche de la *Clematite* ou Herbe aux gueux (*Clematis recta*) qui excite des phlyctènes très-pleines, ſans inflammation. Les feuilles pilées du *Ranunculus acris*, appliquees dans un cas obſtiné de *clavus* hyſterique, procurèrent un ſoulagement immediat. Nous ajouterons que nos Payſans connoiſſent l'herbe pilée de *l'Anemone patens* qu'ils nomment *Vétreniza*, comme véſicatoire & ulcérante par l'application continuée, ſans inflammation ou autres mauvaiſes ſuites.

Les maladies dartreuſes de la peau éludent ſouvent tout l'art des medecins & toute l'efficacité des remèdes les plus vantés. Mr. *Gillibert*, fondé ſur des raiſons d'une Pathologie trés-ſaine & ſur les nombreuſes expériences qu'il a faites, nous donne la *racine de Régliſſe* (*Liquiritia*), en décoction, comme le vrai ſpécifique des dartres les plus rebelles: Il en commence l'uſage par quelques purgations avec la poudre de feuilles d'Eſule, & il l'ordonne pour boiſſon ordinaire & pour lotion externe, avec une diéte blanche. Tous les médecins raiſonnables

f 2 con-

conviendront que ce remède qui nourrit & n'affecte point le corps, qui émousse & entraine l'acreté des humeurs sans répercussion du mal local, merite la preférence sur les autres remèdes connus.

A cette occasion Mr. *Gillibert* insinue quelques éclaircissemens sur cette maladie, si mal connue, qui porte le nom de *Plica polonica* & qu'il range avec les maladies dartreuses. „J'ai observé, dit-il, en Lithuanie sur trois „sujets, une chose trés-singulière; lorsque cette espéce de „Herpes porte à la tête, c'est à dire, lorsque les cheveux „sont bien humectés, bien liés par le *gluten plicosum*, alors „les douleurs rheumatismales cessent. Si la tete suinte „peu, les douleurs deviennent trés-vives & ne cessent, „qu'autant que la nature fait pulluler plusieurs dartres; „plus ces dartres suintent, moins le *plica* se développe. „Quand à la curation, j'avoue que je l'ignore; occupé à „ramasser des faits sur le *plica*, je n'ai encore rien trou-„vé de satisfaisant sur la curation de ce genre singulier „de maladie. Je puis même assurer qu'il est très diffi-„cile d'en tracer l'histoire, vû que ce *virus plicosum* est „un vrai Protée, qui se masque sous mille formes.“

Il seroit à souhaiter que beaucoup de Médecins-Botanistes voulussent s'occuper d'expériences aussi utiles, & de s'évertuer ainsi à dévenir des bienfaiteurs du genre humain, plûtôt que de chercher leur gloire à s'occuper des minuties de cette Science salutaire.

Petri-

Pétrification rémarquable.

Mr. *Gillibert* communique encore, dans une lettre à Mr. le Professeur *Pallas*, quelques observations sur la Mineralogie de Lithuanie, qu'il se propose de traiter dans un mémoire particulier. Il parle préalablement d'une pétrification très-remarquable, commune dans ce pays, laquelle est agathe par sa nature, mais ressemble parfaitement par sa forme, à des racines de sapins petrifiées. Ces racines agatisées sont bandées de noir autour de leur axe, & incrustées d'une écorce grise ou blanchâtre. On en trouve à demi pétrifiés & toutes donnent une odeur empyreumatique au feu, qui provient d'un reste de principe bitumineux. D'ailleurs toutes les pétrifications d'origine marine se trouvent agatisées dans ce pays couvert d'un sable fin, dont les eaux peuvent extraire un principe pétrifiant de cette nature.

Singularité de la plante appellée *Menyanthes trifoliata.*

Le même Physicien observateur fait remarquer une singularité de la plante appellée *Menyanthes trifoliata.* C'est que les étamines de cette plante lachent leur poussiére fécondante sur les organes féminins, tandis que la fleur est encore close & que les franges des pétales les garantissent de tout accès d'humidité, qui pourroit souvant troubler le cours de la fécondation dans cette plante aquatique.

Remède des Calmoucs contre le Rheumatisme.

L'Interprète *Jahrig*, que l'Academie entretient parmis les Calmoucs, pour apprendre la langue sacrée de ce

peuple & pour faire des recueils hiſtoriques touchant leurs moeurs & leurs ſuperſtitions, annonce, dans un de ſes rapports, un nouveau remède que ce peuple a commencé à mettre en uſage contre les maux rheumatiques. C'eſt la décoction d'une plante, ou plûtôt d'un petit buiſſon, qui provient abondamment dans tous les lieux élévés, arides & ſableux des landes de la Ruſſie & Sibérie meridionale, & que les botaniſtes appellent *Ephedra monoſtachya*, les Ruſſes Framboiſier des landes (Степная малина), les Calmoucs *Sergenä* & les Mongols, qui s'en ſervent en fumigations, *Dſerganà*. L'on fait bouillir à l'eau une quantité des joncs de cette plante, qui ont un gout de genièvre, & l'on prend cette décoction concentrée en forte doſe. Les Calmoucs y mélent du lait & du beurre ſuivant leur façon de prendre le thée. Le malade doit ſe couvrir, pour favoriſer la ſueur que ce remède produit abondament, & qui ne manque pas d'enlever le mal à la premiere ou ſeconde exhibition. L'eſpéce *d'Ephedra*, qui provient en Eſpagne & dans les provinces méridionales de la France, & qui n'eſt peut-être point eſſentiellement diſtincte de la nôtre, (*Ephedra diſtachya*) pourroit avoir les mêmes vertus.

NOTI-

NOTICES ET REMARQUES
Sur les débordemens de la Neva à St. Pétersbourg,

accompagnées d'une carte repréſentant la crüe & la diminution des eaux du canal de Cronſtadt, pour chaque jour de l'année 1777.

par Mr. le Prof. *Krafft.*

Au nombre des évènemens remarquables, que nous offre l'hiſtoire phyſique de l'année paſſée, on met a juſte titre les débordemens très fréquens des fleuves & les grandes inondations, qu'ils ont cauſées en pluſieurs provinces de l'Europe. Occaſionnés tantôt par des dégels de longue durée ſurvenûs ſubitement au coeur de l'hyver après une quantité extraordinaire de neige, tantôt par des pluies d'été fréquentes, longues & copieuſes — par des éruptions ſubites des nuées — par des ouragans — par des tremblemens de terre — & par des amas de glaçons des fleuves, il ſemble, que dans le cours de cette ſeule année, ils avoient varié leur maniere d'exiſter de preſque toutes les façons poſſibles. Cette même année, remarquable chez l'étranger par un ſi grand nombre de ces funeſtes accidens, eſt auſſi celle, qui nous rappelle la mémoire du debordement de la Neva, dont la crüe au deſſûs du niveau ordinaire de ſes eaux s'eſt élevée au point de ſur-

ſurpaſſer de plus de deux pieds la plus haute de toutes celles, dont la meſure nous ait été transmiſe.

Le parallèle des circonſtances phyſiques, dont les hautes crües de ce fleuve ont été accompagnées de temps en temps, ne peut que rendre plus preciſe la connoiſſance des cauſes, qui en refoulent les eaux; & cette connoiſſance eſt un des principes préliminaires, dont l'enſemble doit regler les méſures, qu'il convient de prendre; afin de diminuer le mal autant qu'il eſt poſſible, de ne point l'augmenter en changeant d'une manière déſavantageuſe les points déterminans des limites du fleuve & de s'oppoſer ſans delai aux progrès des circonſtances locales, qui pourroient y contribuer de plus en plus.

Ce ſont ces reflexions, qui m'ont engagé à faire un recueil de tous les débordemens de la Neva, deſquels j'ai pû acquerir quelque connoiſſance, pour déterminer avec plus de préciſion les cauſes phyſiques de ces évènemens ſi intéreſſans au public, quoiqu'en partie elles ne ſont pas de nature à pouvoir être ſupprimées, & pour rechercher ſurtout avec ſoin les veſtiges des circonſtances locales, qui pourroient favoriſer le mal, deſquelles les progrès ſécrets, pour ne pas ſe manifeſter ſur le champ par des effets ſenſibles, pourroient cependant n'en avoir pas moins des ſuites réelles.

D'ailleurs la comparaiſon faite entre tous ces débordemens, a fourni la remarque ſatisfaiſante, que les fort hautes crües du fleuve ſont de nos jours d'une fréquence moindre qu' anciennement, & que les crües moyennes

yennes des eaux, d'environ 6 pieds au dessus de leur niveau ordinaire, déja fort alarmantes dans des temps plus reculés, n'ont plus de prise, à cause du rehaussement du terrein, que sur les endroits les plus bas de la ville; nous avons outre cela l'avantage de pouvoir couvrir ce triste tableau par le précis des mésures, que *Sa Majesté Impériale*, nôtre très gracieuse Souveraine, vient d'ordonner à l'occasion du dernier débordement.

I. Table de quelques inondations anciennes.

Année 1691. Débordement le plus ancien de la Neva, dont j'ai pû déterrer la tradition. (*a*) L'inondation s'en repandit jusqu'à Nienschanz, à 5 Werstes de distance en remontant le fleuve depuis l'endroit, sur le quel est construite aujourd'hui la forteresse de St. Pétersbourg. Selon la relation de quelques pêcheurs, anciens habitans de cet endroit, rapportée par l'auteur cité, les débordemens de ce fleuve revenoient alors presque tous les cinq ans & de petites cabanes étoient tout ce qu'on osoit bâtir sur ce terrein alors bas, marécageux & exposé tant de fois aux inondations les plus affreuses. Sitôt, que les habitans, par une suite de leurs funestes expériences, pressentoient l'approche des ouragans, qui faisoient déborder le fleuve; ils entrelaçoient en forme de radeau les poutres de leurs cabanes, les attachoient aux arbres & se sauvoient, en attendant la retraite des eaux, sur la montagne de Duderov à

 6 lieues

(*a*) Weber. Russie changée: T. III. p. 19.

6 lieues de diſtance de leur habitation ordinaire. Toutes ces circonſtances nous font concevoir la hauteur & l'étendue énorme de ces débordemens anciens, ſous lesquels ont dû être ſubmergées même les régions de la ville d'aujourd'hui, qui actuellement ſont parfaitement à l'abri des débordemens de nos jours.

Les obſervations, que je vais rapporter, font voir, que dans la ſuite on n'a plus apperçû de période régulier dans les hautes crües de la Neva; & l'hiſtoire des fleuves nous en offre encore d'autres, qui, ſujets à des débordemens périodiques, ont changé de période ou même ceſſé de l'être. La Seine eſt un exemple du contraire (*b*); très ſujette à déborder depuis quelques ſiecles, elle ne l'étoit point du tout au temps des anciens Empéreurs.

1715. Grande inondation (*c*); c'eſt depuis la fondation de la ville la premiere, dont la connoiſſance me ſoit parvenüe. Elle en emporta presque tous le ponts & tous les remparts & endommagea beaucoup la fortification des bords du fleuve, conſiſtant dans des poutres, revétües & garnies de madriers, aux quelles a ſuccédé dans nos jours un revêtement ſolide, composé de grandes pierres de taille, monument immortel du regne de *CATHERINE II.*

Le

(*b*) Brice Nouvelle deſcription de Paris. T. II. p. 115.
(*c*) Weber. l. c. T. I. p. 469.

1721. Le 5 de Novembre vieux ſtile. La Neva déborda ce jour là furieuſement (*d*) par un ouragan de Sud-Oueſt, qui continua neuf jours de ſuite à differente repriſe de force. Les ouvrages de la fortereſſe, commencés l'an 1706, en ſouffrirent beaucoup; & ceux du canal de Ladoga, commencés l'an 1718, en furent endommages & enſablés en quelques endroits.

1723. Le 2 d'Octobre. v. ſt. Grande inondation, où la plus haute crüe des eaux ſurpaſſa de 3 pouces celle de l'année 1721.

1725. Le 5 de Novembre. v. ſt. Débordement occaſionné par un gros vent de Sud-Oueſt & qui dura depuis 9 heures du ſoir jusqu' après minuit. La plus haute crüe des eaux étoit d'un pied & demi moindre, que celle de l'année 1721.

La plus haute crüe du débordement ſurvenû l'année ſuivante (1726) a été meſurée par Mr. l'Académicien *Leutmann*, qui a trouvé, qu'elle étoit de 8 pieds anglois 2 pouces décimales au deſſûs du niveau ordinaire des eaux, & qu'elle a ſurpaſſé de 8 pouces celle de l'année 1721. Cette meſure nous met en état de determiner celle des trois derniers débordemens, dont je viens de parler. Il en réſulte, que la plus haute crüe des eaux a été l'an 1721 de 7 pieds 4 pouces; l'an 1723 de 7 pieds 7 pouces & l'an. 1725 de 5 pieds 9 pouces.

(*d*) Weber. l. c. T. II. p. 19.

II. Table des débordemens de la Neva observés depuis l'année 1726 jusqu'en 1744.

Cette table est tracée sur des observations consignées dans les Journaux météorologiques de l'Académie Impériale des sciences. La premiere colonne marque les jours des petits débordemens, qui n'ont inondé, que les endroits les plus bas du terrein; la seconde ceux des débordemens plus forts & la troisième ceux des inondations considérables.

La plûpart de ces débordemens ont été occasionnés par des gros vents de Sud-Ouest, à l'exception de quelques uns, produits par des vents de Nord-Ouest; leurs grandeurs ayant toujours été proportionelles à la force & à la durée du vent.

Vieux Stile.

Année	I.	II.	III.	Année	I.	II.	III.
1726.	14 Avr.	18 Sept.	1 Nov. (*e*)	1728.	3 Nov.	3 Août	
1727.	18 Sept.	21 Sept.		1729.	17 Dec.	3 Oct.	12 Oct. (*f*)
	22 —			1730.	3 Janv.		
	11 Oct.				26 —		
	12 —				27 —		
	22 —				11 Août		
	23 —				19 Dec.		
	24 Nov.						
	29 —			1731.	4 Fevr.		

Année

(*e*) 1726 le 1 Novembre un ouragan de Sud-Ouest refoula à 7 heures du matin & pendant 6 heures de suite les eaux du fleuve, qui inonda avec rapidité presque toute la ville. La plus haute crüe des eaux selon la mesure de Mr. l'Académicien *Leutmann* étoit de 8 pieds 2 pouces décimales, mesure angloise, & de 8 pouces plus grande, que celle de l'année 1721.

(*f*) 1729 le 12 d'Octobre. La plus haute crüe des eaux fut de 7 pieds 1 pouce, par un ouragan de Sud-Ouest. Toutes les Isles furent inondées.

Année	I.	II.	III.
1731.	5 Juin 10 Juill 13 —		
1732.		15 Sept.	
1733.	25 Aout 5 Oct. 23 — 3 Nov.	6 Sept. 8 Oct. 31 — 12 Dec.	
1734.	1 Janv. 18 — 4 Fevr. 22 Avr. 4 Mai 19 Sept.		
1735.	8 Fevr. 11 Mars 17 Avr. 15 Mai 24 Oct.	26 Fevr.	
1736.	17 Dec.	13 Dec.	10 Sept. (*g*)
1736.	18 Dec. 24 —	19 Dec. 28 —	
1737.	6 Jan. 1 Avr. 3 Juin 24 Nov.	6 Dec.	
1738.	9 Janv. 15 Juin 2 Sept.		
1739.	10 Juill 26 Oct.		
1740.		12 Sept.	
1741.		3 Oct. 4 —	
1743.	6 Janv. 8 — 25 Nov.	1 Dec. 2 — 6 —	
1744.	8 Nov. 9 Dec.		17 Août (*h*) 9 Sept. (*i*)

III. Ta-

(*g*) 1736. le 10 de Septembre. Débordement, qui a inondé presque tous les endroits de la ville. Gros vent d' Oueſt, dont la viteſſe ſelon la meſure de Mr. l'Académicien *Krafft*, étoit de 123 pieds par ſeconde.

(*h*) 1744 le 17 d'Août. La plus haute crüe des eaux étoit de 7 pieds. Ouragan de Nord-Oueſt.

(*i*) 1744. le 9 de Septembre. Ce jour là les eaux baiſſérent le matin par un gros vent d'Eſt presque jusqu'au fond des Canaux. L'après midi il y eut un ouragan de Sud-Oueſt, qui dans la nuit cauſa un très grand débordement.

III. Table des crües des eaux de la Neva, de trois pieds anglois ou au de là, sur leur niveau ordinaire depuis 1749 jusqu'à 1777.

Ces mesures ont eté prises sur une échelle, placée dans la Moika à une distance de 840 pieds au Pont bleu vers l'Orient, par Mr. *Schröter*, observateur très assidû & intelligent.

Vieux Stile.

1749.	11 Nov.	W.	3 pieds 0 pouces.
1751	9 Octbr.	SW.	3 — — 8 — —
1752.	22 Octbr.	W (*k*)	8 — — 5 — —
	25 — — —	SW.	6 — — 0 — —
	26 — — —	WSW.	7 — — 0 — —
	28 — — —	W (*l*)	6 — — 0 — —
	11 Dec.	W.	7 — — 0 — —
1754.	7. 8 Mai.	WSW.	5 — — 0 — —
	11 Octbr.	W.	4 — — 3 — —
1756.	29 Sept.	W.	7 — — 3 — —
	4 Octbr.	W.	4 — — 5 — —
1757.	16 Octbr.	SW.	6 — — 0 — —
1758.	18 Nov.	SW.	4 — — 9 — —
1759.	6 Octbr.	W.	6 — — 1 — —
1760.	8 Octbr.	W.	5 — — 3 — —
	20 Nov.	SW.	3 — — 4 — —

(*k*) La hauteur de l'inondation, qui arriva ce jour, est marquée sur une pierre à la porte méridionale de la forteresse.

(*l*) La crüe des eaux, qui fut de 6 pieds, dura presque toute la journée, quoique le vent d'Ouest, qu'il fit, fut extremement foible ou presque tombant. On a appris ensuite, que sur la mer Baltique il y avoit eu un gros vent de Sud-Ouest.

1762.	9 Août	SW.	3 — — 0 — —
	25 — — —	SW.	3 — — 0 — —
	28 Octbr.	SW.	5 — — 10 — —
	9 Nov.	SW.	4 — — 1 — —
	10 Dec.	W.	5 — — 10 — —
1763.	8 Octbr.	SW.	6 — — 6 — —
	28 Nov.	SW.	5 — — 4 — —
1764.	6 Nov.	SW.	4 — — 10 — —
	18-22 Nov.	Calme (*m*)	7 — — 4 — —
1765.	28 Août	W.	4 — — 9 — —
	24-26 Nov.	NO. (*n*)	5 — — 6 — —
1766.	13-16 Octbr.	SW.	3 — — 6 — —
	19 Nov.	SW.	4 — — 8 — —
	24 — —	SW.	3 — — 3 — —
1767.	16 Juin	W.	5 — — 1 — —
	26 Septembr.	W.	4 — — 3 — —
	29 — —	SW.	5 — — 5 — —
	9 Octobr.	W.	4 — — 10 — —
	6 Nov.	SW.	4 — — 11 — —

1768.

(*m*) Cette crüe des eaux fut occasionnée par des glaçons accumulés à l'embouchure de la Neva. L'accroissement des eaux le long du fleuve ne s'étendit point jusqu' à la Fontalka, qui sort du fleuve au dessus du jardin Impérial du Palais d'été, ni jusqu' à la petite Neva, qui se sépare du fleuve à la pointe orientale de Wasilioftrof. C'est pourquoi cette crüe n'eut lieu, que dans la partie inférieure du fleuve & dans la Moika, au lieu, que les eaux de la petite Neva & de la Fontalka restèrent à leur niveau ordinaire.

(*n*) Crüe du fleuve, occasionnée par un amas de glaçons, puisque le vent de Nord-Est auroit dû faire baisser les eaux.

1768.	3 Nov.	NW.	3 — — 0 — —
	18 Dec.	W.	4 — — 0 — —
1771.	8 Août	NW.	3 — — 10 — —
	25 Octbr.	SW.	4 — — 9 — —
	30 — —	SW.	5 — — 0 — —
	5 Nov.	SW.	3 — — 6 — —
	8 — —	SW.	4 — — 8 — —
1772.	9 Sept.	W.	4 — — 4 — —
	19 Octbr.	SW.	4 — — 4 — —
	6 Nov.	NW.	3 — — 0 — —
	26 Dec.	W.	3 — — 3 — —
	31 — —	SW.	5 — — 2 — —
1773.	1 Janvr.	SW.	3 — — 6 — —
	12 Sept.	SW.	4 — — 3 — —
	14 Octobr.	SW.	5 — — 9 — —
1774.	13 Octobr.	SW.	3 — — 0 — —
1775.	15 Juin	SW.	5 — — 2 — —
	6 Juillet	NW.	3 — — 6 — —
	3 Octobr.	NW.	3 — — 10 — —
	13 — —	SW.	3 — — 4 — —
1776.	24 Octobr.	WSW.	3 — — 2 — —
1777.	16 Août	SW.	5 — — 0 — —
	9-10 Septbr.	SW.	10 — — 7 — —
	25 — — —	NW.	4 — — 10 — —
	17 Octobr.	SW.	6 — — 0 — —

IV. Carte

IV. Carte repréſentant la crüe & la diminution des eaux du Canal de Cronſtadt, pour chaque jour de l'année 1777.

Planche II.

Les obſervations, ſur lesquelles j'ai conſtruit cette carte, ſont celles, qui ſe font journellement à Cronſtadt ſur l'augmentation & la diminution des eaux du Canal. Par la ſituation du lieu elles m'ont paru, pour l'exécution d'une telle carte, préférables à celles, qu'on auroit faites dans tout autre endroit, vû que c'eſt à l'extrémité occidentale de cette isle, qu'on ſuppoſe l'embouchure de la Neva dans le golfe de Finlande; endroit le plus propre à obſerver les circonſtances, dont les hautes crües du fleuve ſont accompagnées. Le Canal ſe débouche vers le Sud dans le golfe & le niveau ordinaire des eaux y a 21 pieds de profondeur. L'échelle, qui eſt fixée dans le Canal pour méſurer les hauteurs des eaux & qui eſt repréſentée à l'extrémité gauche de chaque bande de la carte, eſt diviſée en pieds & pouces, meſure angloiſe. J'ai eſſayé en quelque façon de marquer ſur cette carte la direction des vents, qui ont parû prévaloir chaque jour, obſervations, dont je ſuis rédevable à Mr. *Bogemell*, Paſteur de l'égliſe Luthérienne à Cronſtadt; j'ai rangé les vents dans l'ordre, indiqué à l'extremité droite de chaque bande, en commençant en haut par celui de Sud-Oueſt, le plus propre à y refouler les eaux, & en allant enſuite par l'Oueſt au Nord, ce qui eſt dans ces régions le tour le plus ordinaire des gros vents, lorsqu' ils s'élévent du Sud-Oueſt. La courbe, tracée en ligne plus ſubtile, repréſente la marche journaliere du Baromètre, telle, qu'elle a été obſervée par Mr. *J. A. Euler*, à St.

Pétersbourg, où la hauteur du mercure eſt ordinairement de 2 lignes plus petite, qu'à Cronſtadt. Par ces profils tellement arrangés on voit au premier coup d'oeil, combien les eaux du golfe près de Finlande ſe ſont chaque jour ou augmentées ou diminuées & quelles ont été les circonſtances principales de l'atmoſphére dans les temps de leurs plus grandes variations.

Crüe des eaux de la Neva à St. Pétersbourg le 10 Septembre 1777.

Septembre 1777.

le 8.	Temps aſſez ſérein; petit vent de Sud. Thermomètre 137 dégrés de Del'isle. Le mercure du Baromètre eſt monté depuis hier de 27 pouces 7 lignes, meſure de Paris, jusqu'à 28 pouces, 2 lignes.
le 9.	Ciel couvert & pluie. Gros vent de Sud-Oueſt. Thermomètre 137°. Le mercure du Baromètre eſt deſcendû à 28 pouces à midi; l'après-midi il continua de deſcendre; à minuit il étoit à 27 pouces 5 lignes. L'eau du fleuve n'a pas encore paru à minuit hauſſer extraordinairement.
le 10.	Ciel couvert & pluie avec des intervalles ſereins. Thermomètre 143°.

Le

le 10. Le mercure du Baromètre a continué de descendre; à 4 heures du matin il étoit à 27 pouces 3 lignes; hauteur, qui ne diffère que de 1¾ lignes de la moindre qu'on a observée cette anneé.

Le gros vent de Sud-Ouest, qui avoit commencé hier & qui dans la suite s'est mis plus à l'Ouest, a continué avec force & avec bouffées pendant toute la nuit jusques vers les 7 heures du matin de ce jour.

Durant cet ouragan de Sud-Ouest les eaux du fleuve ont été tellement refoulées, qu'à 5 heures du matin elles ont débordé & inondé rapidement la plus grande partie de la ville, surtout l'isle de Basile & celle de St. Pétersbourg. Les eaux ont parû couler en sens contraire & ont augmenté de hauteur assez uniformement jusqu'au point de leur plus grande crüe de 10 pieds 7 pouces, mesure angloise, au dessus du repaire de leur niveau ordinaire, ce qui a eu lieu après les 6 heures. Le vent s'est mis bientôt après au Nord-Ouest; & les eaux ont commencé à baisser, & celles qui ont été repandües, à réfluer vers le lit du fleuve; à 7 heures elles avoient déja diminué de plus d'un pied & leur diminution s'est accélerée ensuite au point, qu'à midi elles s'étoient deja retirées de presque toutes les rües. Le débordement passé, on a remarqué dans quelques endroits de l'Isle de Basile, des jets d'eau jaillissans de la terre. Sous la surface de cette Isle, surtout vers la petite Neva, il y a beaucoup de terre spongieuse, ensorte que l'eau, pénétrant sous terre par voye de filtration & communiquant avec

une eau d'un niveau plus haut a pû jaillir dans quelques endroits plus bas; une telle eau a auſſi pû déployer ſa force ſous le pavé & ſous les murailles & en occaſionner des crévaſſes, qui ont fait venir à quelques uns le ſoupçon peu fondé d'un tremblement de terre. Vers l'embouchure de la Neva dans le golfe de Finlande, à Cronſtadt, les eaux ont débordé entre 4 & 5 heures; leur plus haute crüe au deſſus de leur niveau ordinaire y a été de 7 pieds 6 pouces & elle a commencé à diminuer après 6 heures; elle a été donc cette fois de 3 pieds 1 pouce moindre dans cet endroit, qu' à St. Pétersbourg; différence, qui ſurpaſſe beaucoup celle, qui a eu lieu dans l'inondation de l'année 1752, où la plus haute crüe des eaux ſur leur niveau ordinaire a été de 6 pieds 6 pouces à Cronſtadt & de 8 pieds 5 pouces à St. Pétersbourg. Dans la partie ſupérieure de la Neva vers le lac de Ladoga, à Schluſſelbourg, on obſerva ce jour là des mouvemens remarquables dans l' eau. La nuit au 10 de Septembre, par un ouragan de Sud-Oueſt, les eaux y diminuerent ſi fort, qu' à 5 heures du matin des vaiſſeaux, même dans des endroits ordinairement bien profonds, furent mis à ſec; la diminution des eaux y eſt l'effet ordinaire des vents de Sud-Oueſt, qui les renvoyent vers la côte du lac oppoſée à l'embouchure de la Neva, au lieu que les vents de Nord-Eſt les y font monter, en pouſſant les eaux du lac vers l'orifice du fleuve. Vers les 6 heures la ſcene changea tout d'un coup par une agitation forte & par une crüe des eaux également ſurprenante & par ſa hauteur & par la direction du vent, qui étoit encore de Sud-Oueſt.

Selon

Selon la relation de quelques vaiſſeaux, il y eut le 9 de Septembre ſur la mer Baltique un gros vent de Sud-Oueſt & ſelon celle des papiers publics on doit avoir obſervé peu de temps avant, des ouragans d'Oueſt dans la mer de Nord, & des gros vents de Nord vers l'embouchure de cette mer dans la mer Baltique.

Comme le ſouvenir des évènemens tant malheureux qu' heureux doit être conſervé ; Monſieur *de Domaſchnef*, Directeur en chef de l'Académie, a fait marquer ſur une plaque fixée au bâtiment académique la hauteur, à la quelle l'eau s' y eſt élévée ; & ayant toujours pour but de favoriſer l'influence des ſciences ſur le bien public, il a fait la propoſition à l'Académie, de choiſir les moyens & les inſtrumens les plus convénables pour rendre dans la ſuite encore plus préciſes les obſervations ſur l'accroiſſement & le décroiſſement des eaux de la Neva, ſur la force & la direction des vents, ſur la quantité d'eau de pluie & de neige & en général ſur tous les phénomènes météorologiques, qui puiſſent avoir quelque rapport avec les crües du fleuve.

Je paſſe ſous ſilence les ravages d'un tel débordement & j'en finis l'expoſé par le précis d'une ordonance Impériale, dont la date doit être conſacrée à jamais dans l'hiſtoire des évènemens intéreſſans, & moyennant la quelle la ville de St. Pétersbourg eſt ſouſtraite pour l'avenir à la ſurpriſe au moins de ces funeſtes accidens, graces aux précautions préſcrites presqu' au moment même du déſaſtre, par cet eſprit ſupérieur aux circonſtances

 qui

qui veille ſur elle. S. M. I. nôtre très gracieuſe Souveraine, pour prévenir autant, qu'il ſera poſſible, les ravages des debordemens de la Neva par des ſignaux publics, qui annonçaſſent promptement l'approche du danger, a ordonné ce qui ſuit:

“ Auſſitot, que les eaux ménaceront à déborder les „ endroits les plus bas du terrein, ſçavoir dans l'extré- „ mité occidentale de la ville & dans celle de l'isle de „ Baſile, on en donnera dans l'un & l'autre de ces deux „ endroits des ſignaux par trois coups de canon & par „ des pavillons rouges, ou, ſi c'eſt dans la nuit, par „ trois lanternes expoſées aux clochers de ces endroits. „ Les habitans ſeront de plus avertis du danger par un „ tambour partant au prémier coup de canon, ainſi que „ ceux des autres parties de la ville par un pavillon „ rouge ou par une lanterne attachée à la tour de l'A- „ mirauté. Si la crüe des eaux augmentoit au point de „ ménacer le centre de la ville: l'Amirauté en donnera „ le ſignal par cinq coups de canon, par des pavillons „ blancs ou par des lanternes expoſées au quatre coins „ de ſa tour & par des battemens lents du tocſin. Dans „ les endroits de la ville le plus expoſés au danger on „ tiendra pret en tout temps un nombre ſuffiſant de ba- „ teaux à rames pour le ſecours de ceux, qui en au- „ roient beſoin.”

Comme le dommage, que cauſent les débordemens, ſeroit conſidérablement diminué par un prompt écoulement des eaux repandües ſur les rües & dans l'intérieur des caves, *Sa Majeſté Impériale*, a ordonné de prati-

pratiquer ſous les rües de la ville de grands égouts voutés en briques & en pierres de taille, lesquels puiſſent communiquer aux caves par des conduits lateraux, & qui euſſent des ouvertures placées de diſtance en diſtance dans les rües & ſe débouchaſſent tous dans le fleuve: diſpoſition grande & ſomptueuſe, moyennant la quelle à meſure que les crües du fleuve baiſſeront, les eaux repandües dans les rües & dans les caves doivent ſe retirer dans la même proportion.

* * * * * * * * *

Ce qui s'offre en premier lieu à nos réflexions ſur les tables précédentes, c'eſt la ſaiſon de l'année, dans la quelle la Neva eſt le plus ſujette à déborder. La premiere table (pag. 52.) nous apprend, qu'il n'eſt aucun mois de toute l'année, dans le quel il n'y ait jamais eu au moins de petits débordemens; la ſeconde (pag. 54.) nous fait voir, que les crües du fleuve depuis celle de 6 pieds jusqu' aux plus grandes ſont arrivées toutes dans les quatre derniers mois de l'année. On connoit au moins en partie les raiſons phyſiques, pourquoi en automne non ſeulement les ſources & les rivières, mais encore les mers mêmes portent ordinairement plus d'eau, qu'en été; & on a remarqué, qu' alors les eaux de la mer ſont moins tenaces & conſéquemment plus ſuſceptibles de mouvement, que dans d'autres ſaiſons; enſorte que par cette raiſon les vagues ſont à égale force de vent plus impétueuſes en automne, qu' en été. Dans les 24 dernières années, que comprend la table (pag. 54), les eaux de la Neva ont été 60 fois au de là de 3 pieds

au

au deſſus de leur niveau ordinaire; la table ſuivante repréſente, combien de fois cela eſt arrivé dans chacun des mois de l'année & quelle eſt la plus grande crüe des eaux, qu'on a obſervée jusqu'ici dans tel ou tel mois.

Hauteur de la crüe du fleuve en pieds anglois.

	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10	Somme
Janvier -	1 fois	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 1.
Fevrier -	0 —	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0.
Mars -	0 —	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0.
Avril -	0 —	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0.
Mai -	0 —	- - 0	- - 1	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 1.
Juin -	0 —	- - 0	- - 2	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 2.
Juillet -	1 —	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 1.
Août -	3 —	- - 1	- - 1	- - 0	- - 0	- - 0	- - 0	- - 5.
Septbr. -	0 —	- - 4	- - 1	- - 0	- - 1	- - 0	- - 1	- - 7.
Octobr. -	6 —	- - 5	- - 4	- - 6	- - 1	- - 1	- - 0	- 23.
Nov. -	6 —	- - 6	- - 2	- - 0	- - 1	- - 0	- - 0	- 15.
Dec. - -	1 —	- - 1	- - 2	- - 0	- - 1	- - 0	- - 0	- 5.
Somme.	18 —	17	13	6	4	1	1	60.

La quantité d'eau de pluie & de neige n'a point d'influence ſenſible ſur l'augmentation des eaux du fleuve. Pour en juger il n' eſt pas hors de propos de placer ici les concluſions, que j'ai tirées des obſervations, que l'Académie Impériale a faites de pluſieurs manières differentes & pendant une longue ſuite d'années ſur la quantité annuelle des eaux de pluie & de neige à St. Pétersbourg.

1) La

1) La quantité moyenne d'eau de pluie & de neige à St. Pétersbourg est de 20 pouces 11 lignes, mesure de France. Cette quantité, totale pour toute une année, se trouve distribuée par mois dans la proportion suivante:

Janvier -	0 pouce	11	lign.	Juillet - -	2 pouces	7	lign.
Fevrier -	0 — —	11	—	Août - -	2 — —	7	—
Mars -	0 — —	9	—	Septembre -	3 — —	2	—
Avril -	1 — —	2	—	Octobre -	2 — —	4	—
Mai -	1 — —	3	—	Novembre -	1 — —	5	—
Juin -	2 — —	11	—	Decembre -	0 — —	11	—

2) Dans le cours d'une année, selon les observations météorologiques de Mr. *Euler*, il y a par une détermination moyenne 97 jours séreins; 103 jours pluvieux & 72 jours neigeux. On a marqué pendant plusieurs années la durée de chaque pluie & les temps, durant lesquels il avoit neigé; on a reduit la somme de tous ces temps en jours entiers & l'on a trouvé, que la durée totale annuelle des temps pluvieux & neigeux étoit de 42 fois vingt quatre heures. Mr. *Muschenbroeck* s'est mépris sur le sens de cette expression, quand il dit dans son cours de physique, (Tom. III. p. 313), qu'on avoit observé à St. Pétersbourg, qu'il n'y avoit dans l'espace d'une année que 42 jours, qui fussent humides, pluvieux ou neigeux, tandisqu' à Leyde on en comptoit, 107.

La somme totale de chacune de ces espéces de

jours ſe trouve diſtribuée par mois dans la proportion ſuivante:

	S.	P.	N.		S.	P.	N.
Janvier	8	1	11	Juillet	12	14	0
Fevrier	7	2	12	Août.	8	16	0
Mars	10	2	11	Septbr.	5	16	1
Avril	11	7	4	Octbr.	4	13	5
Mai	13	13	1	Novbr.	5	4	11
Juin	9	13	0	Decbr.	3	3	15

En comparant cette table avec les précédentes on remarque, que les mois le plus abondans en pluie ne ſont pas ceux, qui ſont marqués par la plus grande fréquence des débordemens & que même le Novembre, qui ne donne qu' 1 pouce 5 lignes d'eau de pluie & de neige, eſt après l'Octobre celui, où la riviere eſt le plus ſouvent ſujette à déborder.

Les cauſes principales, qui occaſionnent les hautes crues de la Neva, ſont des ouragans ou au moins des vents violents & de longue durée de SW, W & NW. La poſition de la mer baltique & celle du golfe de Finlande eſt telle, que de ces trois aires de vent ceux de SW & W, qui accompagnent ici ordinairement l'équinoxe d'automne & qui ont le plus fréquemment lieu dans les mois d'Octobre & de Novembre, ſont les plus propres à refouler les eaux du golfe & à les porter à la plus haute élévation; ce qui doit arriver préferablement, lorsqu'un ouragan de Sud, ayant accumulé les eaux de la mer vers

vers l'entrée du golfe tant par son impulsion directe que par la repercussion, que produisent les rivages opposés & la résistance du golfe botnique, se met rapidemment & avec une force suffisante au SW ou WSW, direction la plus propre à le faire dominer sur toute la longueur du golfe de Finlande. Les vents de NW, qui occasionnent quelques fois des cruës du fleuve, ont une influence moins directe sur l'augmentation des eaux du golfe; ces vents ne peuvent, que refouler les eaux de la mer du Nord par le Sund dans la mer baltique, surtout, quand ils soufflent en même temps, que la mer du Nord est dans son flux, du quel sans une telle concurrence de vent la mer baltique se ressent fort peu à cause du retrécissement du détroit. Or on sçait, que dans la mer du Nord il y a des moussons d'Ouest depuis la Mi-Mai, jusqu'à la Mi-Octobre, terme après lequel elles se changent en moussons d'Est en passant par le Nord, ce qui s'accorde bien avec la remarque, que les cruës du fleuve, occasionnées par des vents de NW, sont toutes comprises entre le commencement de Juin & les premiers jours de Novembre.

C'est de cette façon, que les marées de la mer de Nord & conséquemment les phases de la Lune influent en quelque chose sur l'augmentation des eaux de la mer baltique. Or il est démontré par les principes de l'Astronomie physique, que ces mouvemens alternatifs de la mer sont les plus forts dans les pleines ou nouvelles Lunes, trois ou quatre jours après ces phases, & lorsque la Lune est périgée. On observe, que sous ces circonstances

la mer eſt pouſſée beaucoup plus vivement ſur le rivage, même pendant les calmes, que dans tout autre temps; & par rapport au Périgée & Apogée de la Lune, il paroit par les recherches météorologiques du célèbre Abbé Toaldo, que c'eſt dans ces deux points, que la Lune, ſurtout la nouvelle ou pleine Lune, a l'influence la plus marquée ſur les vents & les autres modifications de l'atmoſphére. Tout ceci s'accorde aſſez bien avec les circonſtances aſtronomiques, dont les fort hautes cruës du fleuve ont été accompagnées; ainſi qu'on voit par la table ſuivante à l'exception de trois cas marqués d'un aſtériſque.

L'inondation de l'année	eſt arrivée
*1721. le 5 Nov.	Trois jours avant la pleine Lune; la Lune étant dans ſa diſtance moyenne.
1723. le 2 Octob.	Pleine Lune; le jour après le paſſage de la Lune par le Périgée.
1726. le 1 Nov.	Trois jours après la pleine Lune & deux jours avant le paſſage par le Périgée.
1729. le 12 Octob.	Le jour après la nouvelle Lune, deux jours avant le paſſage par le Périgée.
1736. le 10 Sept.	Un jour après la pleine Lune & deux jours après le paſſage par l'Apogée.
*1744. le 17 Août	Quatre jours après la pleine Lune, la Lune étant dans ſa diſtance moyenne.

L'i-

L'inondation de l'année	eſt arrivée
1744. le 9 Septemb.	Le jour avant la pleine Lune; & deux jours après le paſſage par l'Apogée.
*1752. le 22 Octob.	Quatre jours avant la nouvelle Lune; la Lune étant à peu près dans ſa diſtance moyenne.
1762. le 10 Août	Deux jours après la nouvelle Lune, & deux jours après le paſſage par le Périgée.
1777. le 10 Sept.	Quatre jours après la pleine Lune, & deux jours après le paſſage par le Périgée.

De tout ceci il s'enſuit, que ce ſont les circonſtances les plus favorables aux crües les plus élevées de la Neva, lorsque dans les pleines ou dans les nouvelles Lunes. & ſurtout trois ou quatre jours après ces phaſes, au temps d'équinoxe d'automne & vers le Périgée de la Lune, il ſurvient au flux de la mer du Nord un gros vent de Nord-Oueſt, qui dans la mer baltique ſoit accompagné ou ſuivi d'un de Sud-Oueſt. Toutes ces circonſtances ſemblent avoir concouru au dernier débordement, vû qu'il eſt arrivé deux jours avant l'équinoxe d'automne, quatre jours après la pleine Lune, deux jours après ſon paſſage par le Périgée & par un ouragan de Sud-Oueſt, & qu'il y eut auparavant de gros vents de l'Oueſt dans la mer du Nord & de gros vents de Nord vers l'embouchure de

la mer baltique, de l'action ſimultanée desquels il a dû réſulter un courant d'eau de la mer du Nord dans la mer baltique ſelon la direction de Nord-Oueſt.

Comme tout ce qui peut avoir quelque rapport aux cruës de la Neva, eſt intereſſant au public, vû l'importance de ces évènemens: je crois devoir ne pas ſupprimer une réflexion ſur une circonſtance locale du lit du fleuve, qui s'eſt préſentée à moi par la comparaiſon de la différence entre les hauteurs des débordemens de l'année 1752 & 1777 à Cronſtadt, avec celle, qui a eu lieu entre les mêmes débordemens à St. Pétersbourg (voyés cy deſſus pag. 60.) & qui eſt appuiée par ce que Mr. Déparcieux a remarqué en comparant les marques de quelques débordemens de la Seine dans divers endroits de Paris. Voyés *Mem. de l'Acad. deParis* 1764. Au nombre des circonſtances locales qui augmentent le mal pour la ville, on doit compter toutes celles, qui diminuent la force impulſive des eaux du fleuve; & de ce nombre ſont déja ou pourroient être avec le temps les bancs de ſable, qui ſe trouvent & s'accroiſſent ſenſiblement à ſon embouchure, & qui en y hauſſant le lit du fleuve & en diviſant ſon fil d'eau, en diminuent la vîteſſe & l'impulſion, & pourroient dans les cruës du fleuve, porter l'endroit de la plus grande accumulation des eaux qui doit ſe trouver entre St. Pétersbourg & Cronſtadt, plus en arrière le long du fleuve & conſéquemment plus en avant vers St. Pétersbourg.

MÉTÉO-

MÉTÉOROLOGIE.

Déſcription d'une Aurore boréale fort reſplendiſſante

obſervée à St. Pétersbourg le $\frac{16}{27}$ Novembre de l'année 1777.

Cette aurore boréale a été vue dans tout ſon éclat après les onze heures du ſoir: elle mérite une mention particulère par ſa forme & par les phénoménes qui l'ont accompagnés.

Planche III.

Les aurores boréales paroiſſent pour la plûpart ſous la forme d'un arc flamboyant qui s'élevant à une hauteur plus ou moins grande vers le zénith, s'appuye de ſes deux bouts ſur l'horizon & renferme vers le bas une nuée oblongue, noire & épaiſſe, qui reſſemble à un ſegment de disque orbiculaire.

Dans celle dont nous allons donner la deſcription, la nuée obſcure avoit une tout autre figure: elle s'elevoit obliquement à droite & à gauche, & formoit deux ailes, qui s'étendoient au delà des points cardinaux de l'Orient & de l'Occident, en ſe perdant à ces deux extrémités dans des nuages clairs & ondoyés.

Ces

Ces ailes, ou ces moitiés s'approchoient au Nord de l'Horizon sous une courbure peu sensible & y formoient à une hauteur peu considérable un angle très obtus & visiblement arrondi par en bas.

La lumière étoit la plus vive aux endroits où les extrémités des deux ailes, à l'Est & à l'Ouest aboutissoient aux nuages. Du côté de l'Est elle devenoit couleur de feu & à l'Ouëst elle étoit blanchâtre & un peu plus foible. C'étoit aussi de ces mêmes extrémités de la nuée sombre que dardoient avec une rapidité & une très grande violence les jets les plus vifs, brillans d'un blanc éblouïssant: ils montoient & se rencontroient pour la pluspart au Zénith, là ils formoient des arcs contigus qui parfois se soutenoient pendant quelques secondes. Mais le plus souvent ces jets se brisoient en haut: ils paroissoient comme mutilés; on les voyoit s'arrêter pendant plusieurs momens, donner une lumière flottante & ensuite du Zénith se dissiper en forme de vagues vers le Sud. Alors toute la moyenne region du ciel devenoit illuminée, & les toits des maisons, couverts de neige, paroissoient sensiblement teints en rouge, par la splendeur dominante des nüages à l'Est.

Des deux extrémités de la partie obscure & nubileuse, on voyoit encore se détacher & s'élever vers le Zénith de petites nuées, du côté supérieur desquelles se répandoit souvant une bande de lumière large & permanente. Plus bas vers l'horizon sortoient & s'élevoient de même quelques gerbes lumineuses, moins fréquentes cependant, & moins vives, fort éparses, & flottantes avec lenteur.

Enfin

Enfin de l'angle boréal même où les deux ailes de la nuée obscure se réunissoient sortoient les traits les plus foibles & presque ternis par la clarté des autres.

Le vent étoit passablement fort & soufloit de Sud-Ouest: le Thermomètre indiquoit un froid de 167° selon la graduation de Delisle & la hauteur du Baromètre étoit de 28 pouces 1 ligne, mesure de Paris.

Comparaison des cinq derniers Etés Année 1773 — 1777.

Observations.	1773	1774	1775	1776	1777.
La Neva fut dégagée des glaces le	16 Avril.	21 Avril.	22 Avril.	25 Avril.	30 Avril.
Elle fut prise - - le	19 Nov.	7 Nov	12 Nov.	12 Nov.	26 Nov.
Ce qui fait un intervalle de -	217 jours	200 jours	204 jours	201 jours	210 jours
Il géla pour la derniere fois le	12 Avril.	23 Avril.	13 Mai.	3 Mai	27 Avril.
Il recommença à géler - le	20 Oct.	1 Octobr.	30 Oct.	20 Oct.	8 Oct.
L'intervalle entre ces deux termes	191 jours	161 jours	170 jours	170 jours	174 jours
Depuis le 1 Avril jusqu'au 1 Octobr					
La plus grande chaleur à midi -	104 dégr.	106 dégrés	105 dégrés	106 dégrés	109 dégrés
le	24 Juillet.	8 Juillet.	10 Août	22 & 29 Jul.	6 Juillet
Le plus grand froid matin & soir	153 dégr.	171 dégrés	168 dégrés	176 dégrés	176 dégrés
le	1 Avril.	8 Avril	15 Avril.	1 Avril.	2 Avril.
La chaleur à midi a été plus grande que 110 dégrés -	12 jours	15 jours	15 jours	11 jours	1 jour
Elle a été entre 120 & 110 dégrés	42 —	61 —	43 —	53 —	28 —
130 & 120 —	80 —	52 —	69 —	59 —	75 —
140 & 130 —	42 —	33 —	28 —	31 —	56 —
150 & 140 —	7 —	17 —	23 —	26 —	13 —
Ainsi dans cet intervalle de 183 jours depuis le 1 Avril jusqu'au 1 Octobre la chaleur à midi a été plus grande que 150 dégrés pendant - - - - -	183 jours	178 jours	178 jours	180 jours	173 jours

Comparaiſon des cinq derniers Etés
Année 1773 —— 1777.

Depuis le 1 Avril jusqu'au 1 Octobr.	1773	1774	1775	1776	1777
Le froid a été matin & ſoir plus grand que 150 dégrés	5 jours	18 jours	26 jours	27 jours	23 jours
Enſuite entre 140 & 150 —	43 ——	43 ——	32 ——	36 ——	48 ——
130 & 140 —	80 ——	50 ——	61 ——	69 ——	86 ——
120 & 130 —	54 ——	66 ——	58 ——	51 ——	26 ——
& moindre que 120 dégrés	1 ——	6 ——	6 ——	0 ——	0 ——
Chaleur moyenne à midi depuis le 1. Avril jusqu'au 1. Octobre -	125 dégrés	125 dégrés	125 dégrés	126 dégrés	130 dégrés
depuis le 1. Mai jusqu'au 1. Nov.	125 ——	125 ——	124 ——	125 ——	129 ——
depuis le 1. Mai jusqu'au 1. Octob.	121 ——	121 ——	119 ——	120 ——	126 ——
Froid moyen matin & ſoir. depuis le 1. Avril jusqu'au 1. Octob	135 dégrés	136 dégrés	136 dégrés	137 dégrés	139 dégrés
depuis le 1. Mai jusqu'au 1. Nov.	135 ——	135 ——	134 ——	136 ——	138 ——
depuis le 1. Mai jusqu'au 1. Octob.	131 ——	131 ——	130 ——	132 ——	135 ——
Etat du Baromètre depuis le 1 Avril jusqu'au 1 Octobr. En pouces & en centiemes parties de pouce; meſure de Paris.					
La plus grande élévation - - -	28. 72	28. 70	28. 62	28. 73	28. 61
le	18 Avril.	11 Mai.	9 Aout.	21 Avril.	5 Avril.
La plus petite élévation - - - - -	27. 48	27. 68	27. 33	27. 33	27. 31
le	4 Juin	12 Juin & 4 Août.	17 Mai.	13 Avril.	21 Sept.
La variation totale - - - - - -	1. 24	1. 02	1. 29	1. 40	1. 30
Le milieu - - - - - - - - - -	28. 10	28. 19	27. 97	28. 03	27. 96
La hauteur moyenne - - - - -	28. 13	28. 19	28. 15	28. 04	28. 01
Le Baromètre a été au deſſus de					
$27.\frac{9}{10}$	150 jours	164 jours	161 jours	138 jours	130 jours
28. -	126 ——	146 ——	142 ——	109 ——	97 ——
$28.\frac{1}{10}$	98 ——	114 ——	117 ——	71 ——	64 ——

Com-

Comparaiſon des cinq derniers Etés
Année 1773 —— 1777.

Depuis le 1 Avril jusqu'au 1 Octobr.	1773	1774	1775	1776	1777
Direction des Vents pendant ce même intervalle de 183 jours N	12 jours	14 jours	17 jours	18 jours	20 jours
NO	24 ——	28 ——	9 ——	31 ——	21 ——
O	26 jours	20 jours	22 jours	32 jours	20 jours
SO	19 ——	13 ——	6 ——	17 ——	19 ——
S	23 ——	27 ——	13 ——	21 ——	15 ——
SW	24 ——	16 ——	32 ——	18 ——	26 ——
W	26 ——	30 ——	52 ——	28 ——	32 ——
NW	29 ——	35 ——	32 ——	18 ——	30 ——
Les vents forts ont ſoufflé du N	0 jours	0 jours	1 jour	0 jours	0 jours
NO	3 ——	1 ——	1 ——	0 ——	0 ——
O	1 ——	0 ——	1 ——	0 ——	0 ——
SO	5 ——	3 ——	1 ——	2 ——	2 ——
S	3 ——	4 ——	1 ——	1 ——	3 ——
SW	6 ——	3 ——	5 ——	4 ——	8 ——
W	6 ——	6 ——	3 ——	2 ——	3 ——
NW	4 ——	3 ——	1 ——	1 ——	3 ——
Nombre des jours de grand vent -	28 jours	20 jours	14 jours	10 jours	19 jours
Jours entièrement ſereins - -	74 jours	64 jours	75 jours	61 jours	47 jours
Jours entièrement couverts - -	54 ——	29 ——	24 ——	34 ——	30 ——
Brouillards - - - - -	15 ——	18 ——	18 ——	25 ——	6 ——
Jours de neige - - - -	1 ——	0 ——	10 ——	13 ——	5 ——
Jours de pluye - - -	77 ——	64 ——	67 ——	65 ——	91 ——
Il tonna pour la premiere fois le	6 Mai.	8 Mai.	14 Juin.	9 Mai.	18 Mai.
pour la derniere fois le	23 Août	9 Sept.	15 Oct.	15 Août	8 Août.
Et pendant cet intervalle - -	16 fois.	17 fois.	7 fois.	10 fois.	14 fois.

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS

présentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du dernier semestre de l'année 1777.

Le vendredi 7 Juillet. Le Secrétaire de Conférence a présenté de la part de la Société royale de Göttingue le Ve & VIe volume des mémoires de cette société publiés sous le titre *Novi Commentarii Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis*.

Et de la part de M. le Conseiller de Cour *Käst-ner* un ouvrage allemand contenant des remarques sur la Géométrie souterraine & une dissertation sur la mesure des hauteurs par le Baromètre.

Le 10 Juillet. Le Secrétaire a présenté un ouvrage de M. *Parratte*, Maître de Pension en cette ville, intitulé *Précis des notions nécessaires pour l'intelligence de la Cosmographie & de la Chronologie*, *dédié à Son Altesse Impériale Monseigneur le Grand Duc*. Et

—— —— de la part de l'Université Impériale de Moscou les deux Discours que Mrs. les Professeurs *Wetsch* & *Zibelin*, ont prononcés en présence d'un nombreux Auditoire, à l'occasion de l'anniversaire de l'Avènement de Sa Majesté l'Impératrice au Throne.

Le

Le 14 Août. Le Secrétaire a présenté les ouvrages suivans :

de la part de la Société royale des Sciences de Londres:

Philosophical Transactions: volume 57. 58. 59. 60. *61. 62. 63. 64. 65.* & la II[e] Partie du volume *66*[e].

Diplomata & statuta regalis Societatis.

A Discourse upon some late improvements of the Means for preserving the Health of mariners &c., by Sir John Pringle.

—— —— de la part de M. de *Magellan*, Gentilhomme Portugais.

Lettre de Pé-kin sur le Génie de la langue chinoise.

—— —— de l'Académie royale des Sciences de Paris.

Histoire de l'Académie royale des Sciences avec les mémoires. Année 1772. 2[e] Partie.

Nouvelles expériences sur la résistance des fluides par Mrs. d'Alembert, le Marquis de Condorcet, & l'Abbé Bossut.

—— —— de M. le Pasteur *Schäfer*, à Ratisbonne.

D. J. C. Schäfers *Wirkungen und Bewegungs-Gesetze des beständigen Electricitäts-Träger.*

Desselben *fernere Versuche mit dem beständigen Electricitäts-Träger.*

—— —— de l'Institut d'éducation à Dessau.

J. Basedows *practische Philosophie für alle Stände.*

Le 18 Août. M. le Prof. *Pallas* a communiqué des lettres que lui a écrites le Baron de *Meidinger*, de Vienne, ſur ſa découverte de rendre incombuſtibles le bois & les autres matières inflammables.

Le 21 Août. Le Conſeiller d'Etat actuel *Aepinus* a envoyé pour le Cabinet d'Hiſtoire naturelle une production monſtrueuſe qui conſiſte dans un oeuf de poule d'une groſſeur extraordinaire dans lequel ſe trouve enfermé un ſecond oeuf tout formé d'une grandeur naturelle. La poule a encore vecu trois mois après l'avoir pondu.

Le 1er Septembre. M. l'Adjoint *Fuſs*, a préſenté de la part de M. le Baron *Schachmann* à Dresden un exemplaire de ſon *Catalogue raiſonné* d'une Collection de médailles, avec figures.

Le Secrétaire a lu une lettre addreſſée à Mrs. de l'Académie des Sciences par M. *Pirre Sue* le jeune, Prévôt déſigné du college de Chirurgie à Paris, qui envoit à l'Académie ſes ouvrages d'Anatomie & de Chirurgie qui ſont au nombre de treize.

Le 4 Septembre. Le Secrétaire a lu un rapport adreſſé à l'Académie par ſon Translateur M. *Jährig*, qui envoie une méthode d'apprendre à lire les écrits Tongous. Cette méthode a été remiſe à M. le Prof. *Pallas* chargé de la correſpondance avec ce Translateur & de la Direction des ſes occupations auprès des nations Moungales.

Le 15 Septembre. M. le Directeur ayant demandé à l'Académie une déſcription detaillée du débordement

dement extraordinaire des eaux de la rivière, qui le Dimanche 10 de ce mois de Septembre, avoient couvert la plus grande partie de la ville, l'Assemblée a chargé M. le Prof. *Krafft*, de dresser sur ses propres observations & sur celles que Messieurs les autres Académiciens voudront bien lui communiquer, une telle Histoire circonstanciée de cette terrible inondation. (*)

M. le Prof. *Pallas* a présenté de la part de M. le Prof. *Bergius* à Stockholm un exemplaire de sa Matiere médicale en deux volumes.

—— —— il a lu une lettre de M. *Jean Emanuel Gilibert*, Docteur en Médecine à *Grodno*, qui envoit & soumet au jugement de l'Académie un manuscrit contenant cinq nouvelles observations médicinales. Mrs. *Pallas*, *Lepechin* & *Güldenstädt* ont été chargés de les examiner & d'en faire leur rapport à la Compagnie. (**)

Le 25 Septembre. Monsieur le Directeur ayant démandé à l'Academie son avis sur les moyens & les instrumens les plus convenables pour observer à l'avenir les accroissemens & décroissemens des eaux de la Neva, la force & la direction des vents, la quantité de la pluye & en général tous les phénoménes météorologiques qui peuvent influer sur la hauteur des eaux de la rivière & interesser la ville, M. le Prof. *Krafft*, a été chargé de projetter un tel avis & de le communiquer à l'assemblée pour y être discuté.

M. le Prof. *Lexell* a remis de la part des Académies

(*) Voyez ci dessus pag. 47. (**) pag. 39.

mies royales des Sciences de Stockholm & d'Upſala les ouvrages ſuivans.

Acta Societatis regiae Scient. Upſalienſis Tom. II[us].

Dictionarium Suecicum cum interpretatione latina ab Abr. Sahlſtaedt.

Bref rörande en Reſa til Island ſammling of Beskrifningar pä Atskilliga Elcſtäder inrätlade til beſparing af Wed.

Eſſais de bâtir ſous l'eau faits à la conſtruction du nouveau baſſin ou des nouvelles formes à Carlscrona, par M. Dan. Thunberg.

Kongl. Vetenskaps Academiens Handlingar för mänaderne Januar —— Decembr. 1776.

Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Prof. *Karſten*, à Butzow.

Lehrbegrif der geſammten Mathematic: VIII[e] tome qui contient la Photométrie.

Le 29 Septembre. M. le Prof. *Lexell*, à lu une lettre du Comte d'Harrſch du Chateau de *Stahremberg*, qui annonce ſon invention d'une machine météorique, dont il envoie & dédie à l'Académie le modele, le deſſin & la déſcription.

Le 2 Octobre. M. le Prof. *Kraft* a remis ſon avis ſur les inſtrumens & la meilleure methode d'obſerver la direction & la force des vents, la quantité de la pluye & la cruë des eaux. Cet avis a été approuvé & communiqué à M. de *Domaſchnef*.

Le

Le 6 Octobre. Le Secrétaire à lu un rapport du Translateur M. *Jährig*, qui envoie à l'Académie la suite de la méthode d'apprendre à lire les écrits Tongous; la manière de tanner les cuirs usitée chez les Calmucques; leur art de guerir une tumeur nommée *Moba*, qui souvent devient mortelle, & un fragment de leurs cérémonies réligieuses après l'enterrement de l'épouse d'un de leurs princes.

Le 13 Octobre. M. le Conseiller d'Etat actuel de *Steblin*, a présenté de la part de Mrs. *Forster*, pere & fils:

trois echantillons des étoffes des Otaïtes fabriquées de l'écorce du *morus papyrifera*.

La carte de leurs voyages & découvertes dans l'hémisphère austral; & l'ouvrage intitulé:

Characteres generum plantarum quas in itinere ad insulas maris australis collegerunt, descripserunt & delinearunt annis 1772 — 75. Joh. Reinh. & Georgius Forster.

Le 16 Octobre. M. le Prof. *Güldenstädt*, à lu une lettre de M. *Hablitzl'*, Correspondant de l'Académie à Astrachan, qui mande que les champs de ces contrées ont été couverts & ravagés au mois d'Aoust dernier d'une espèce de sauterelles, dont il envoie une pour la comparer avec le *Gryllus migratorum* de Linné.

M. le Prof. *Lepechin* a présenté de la part de M. *Toumanski*, Aide-Enseigne à Glouchow, les Discours d'élo-

loquence qu'il a prononcés dans les Aſſemblées publiques de la Société royale allemande à *Königsberg* en Pruſſe.

Le 23 Octobre. Le Secrétaire a lu une lettre de Mr. de *Magellan*, qui communique l'expérience importante qui a été faite en Angleterre ſur une maiſon de bois, dont les parois, & le toit ont été enduits d'un certain mortier inventé par le Lord *Mahon*, & qui à empéché la dite maiſon de s'allumer & de ſe conſumer malgré le feu qu'on avoit mis tout à l'entour.

Le 3 November. Le Secrétaire a lu un rapport de M. *Jährig*, qui communique quelques anecdotes curieuſes de la derniere guerre des Calmucques dite *Songuer*.

Le 6 Novembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. *Jean Bernoulli*, Aſtronome royal à Berlin, le ſecond Cahier de ſes *Nouvelles littéraires de divers païs.*

—— —— il a lu un rapport de M. *Jährig*, qui envoie en extrait, une traduction allemande d'un Ouvrage moungal, Aſtrologico-magique, & quelques abraxas indiens dont les Calmucques ſe ſervent dans pluſieurs maladies, & autres ſituations critiques de leur vie, en avalant ces caractères magiques avec le papier ſur lequel ils ſont écrits; enſuite un cahier de petites anecdotes extraites d'un ouvrage moungal de *Tſchingis-Khan*, & une table aſtrologique originale pour l'eſpace de 60 années. (*)

Le

(*) Tout ce qui eſt intéreſſant dans ces envois faits par M. *Jährig* ſera inſéré & publié par M. le Prof. *Pallas* dans le ſecond volume de ſon hiſtoire des Peuples Moungales.

Le 13 Novembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de la Société royale des Sciences de Göttingue le VIIe Tome de ſes mémoires publiés ſous le têtre de *Novi Commentarii Societatis Regiae Scient. Göttingenſis.*

—— —— il a lu une lettre de M. le Prof. *de Felice* à Yverdun, qui contient une énumeration des ſes nouvelles entrepriſes typographiques, de ſes Dictionnaires de Jurisprudence, de Médecine, d'Hiſtoire naturelle &c.

Le 20 Novembre. M. le Prof. *Krafft*, a préſenté de la part de M. le Docteur *Pereboom*, un mémoire latin ſur une nouvelle machine hydraulique intitulé *Commentitia hydraulico-mechanica Acad. Imp. Petropolitanae dicata a Cornelio Pereboom* &c. M. le Prof. *Lexell* a été chargé d'en examiner le contenu & d'en rendre compte à l'Académie.

—— —— il a remis un deſſin de l'aurore boreale obſervée le $\frac{16}{27}$ de ce mois à dix heures du ſoir avec une déſcription allemande. (*)

Le 4 Decembre. Monſieur le Directeur a chargé M. le Prof. *Lexell*, de faire des obſervations régulieres ſur la direction & la force des vents, ſur la quantité de la pluye & ſur la cruë des eaux de la Neva.

—— —— il a communiqué une lettre de M. le Conſeiller d'État actuel de *Simolin*, Envoyé extraordinaire à la

 Cour

(*) Voyez ci deſſus pag. 71.

Cour de Suede, qui marque avoir eu l'honneur, de remettre dans une audience formelle que le Roi a bien voulu lui accorder dans son Cabinet, la lettre que M. *de Domaschnef* avoit écrite à Sa Majesté au sujet de son aggrégation à l'Académie: que cet auguste Associé a témoigné de la maniere la plus gracieuse, combien il est satisfait, des attentions & des hommages de l'Académie Impériale des Sciences & de son Directeur: enfin que *Sa Majesté* estime infiniment la place qu'elle y tient.

Les observations météorologiques, faites à Berlin par M. *Beguelin*, de l'Académie royale des Sc. & belles-lettres de Prusse, ont été présentées régulierement tous les mois par le Secrétaire, qui a fait parvenir réciproquement à M. le Conseiller privé *Formey* les observations météorologiques, qu'il a faites à St. Pétersbourg.

MATHE-

Fig. I

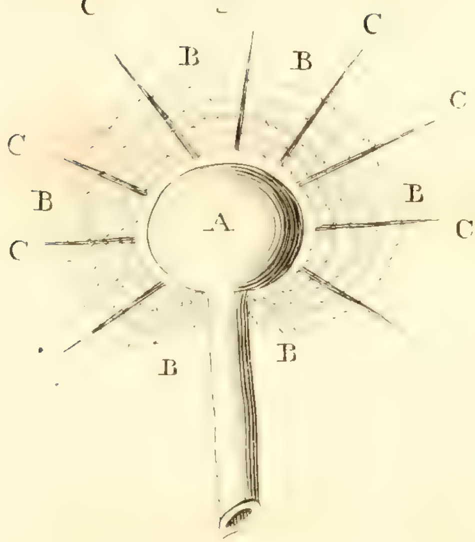
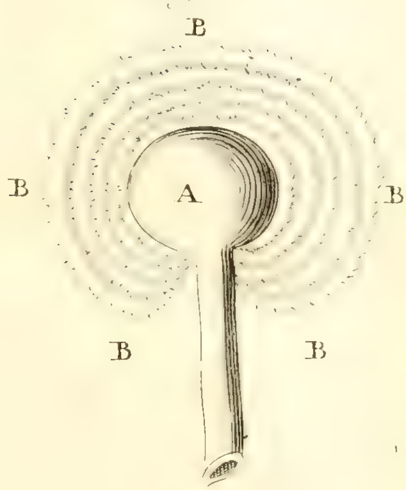


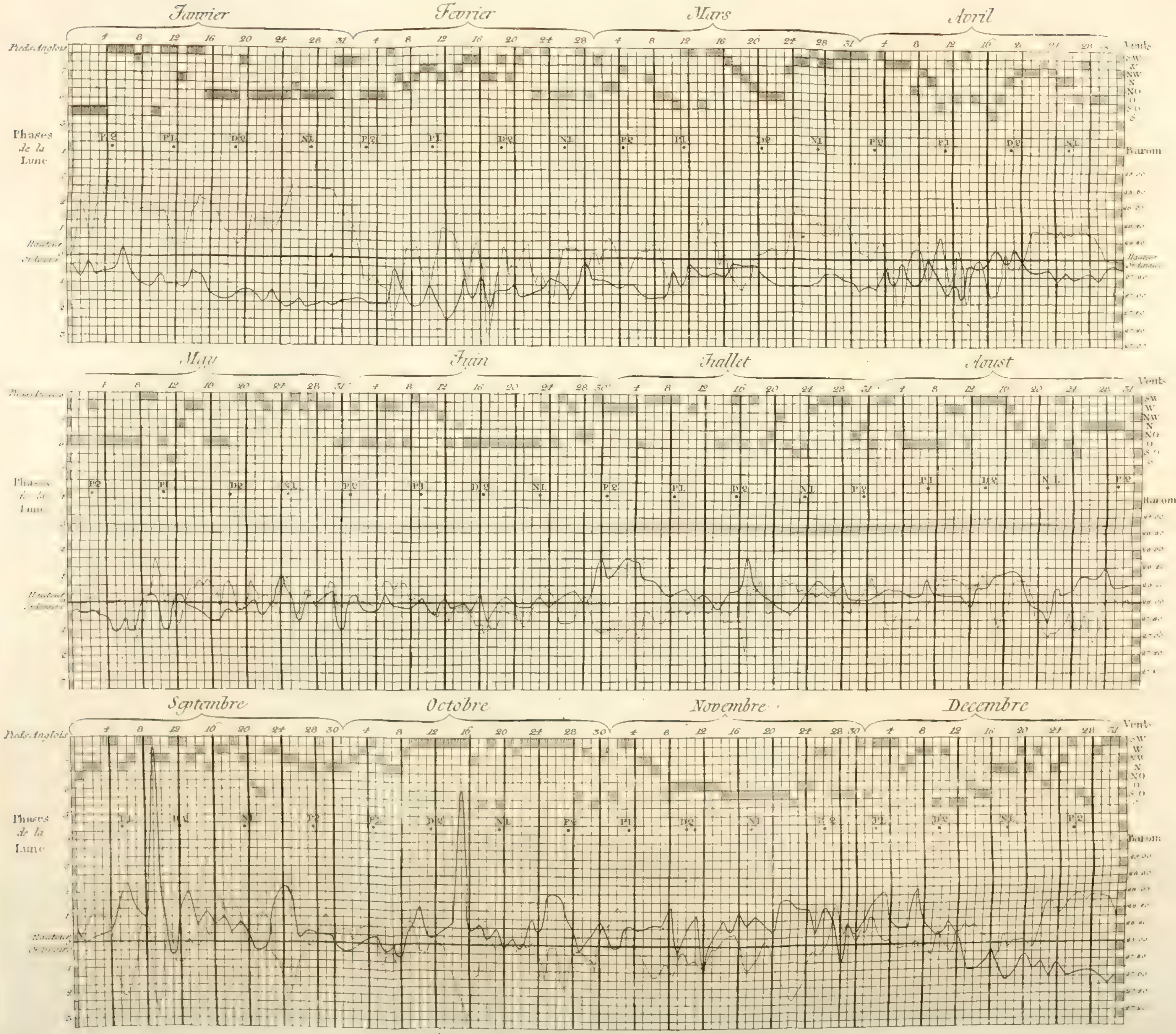
Fig. II



Hist: de l'Acad: Impˡᵉ des Sc: A: 1777. P. II. Planche 1.

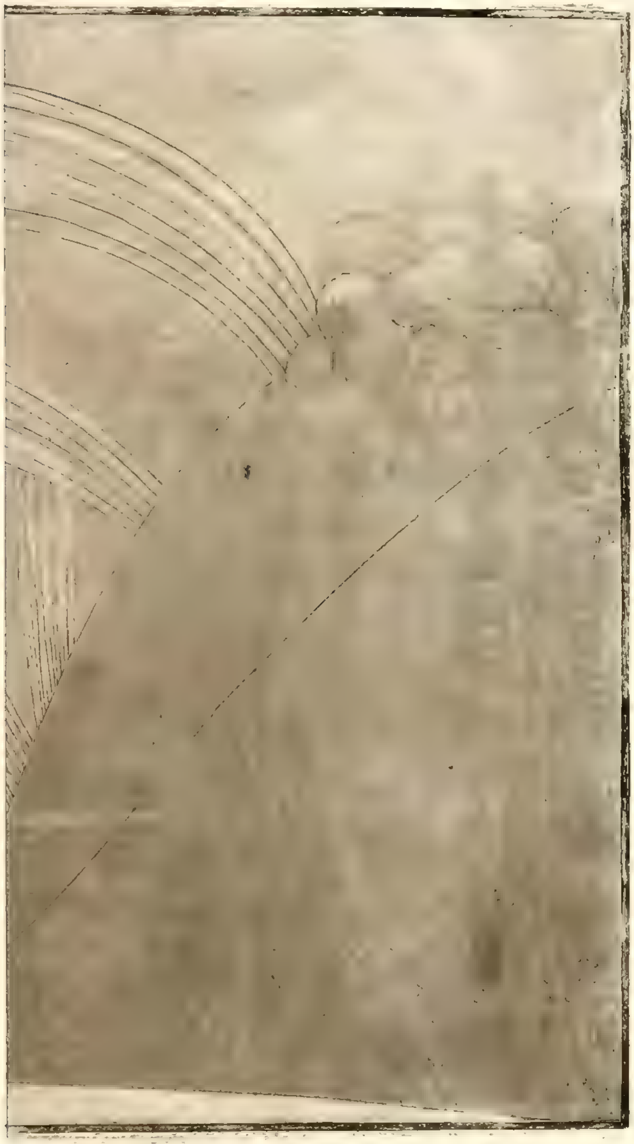
ns le Canal

CARTE
répresentant les crües et les abaissemens des eaux dans le Canal de Cronstadt pour chaque jour de l'année 1777



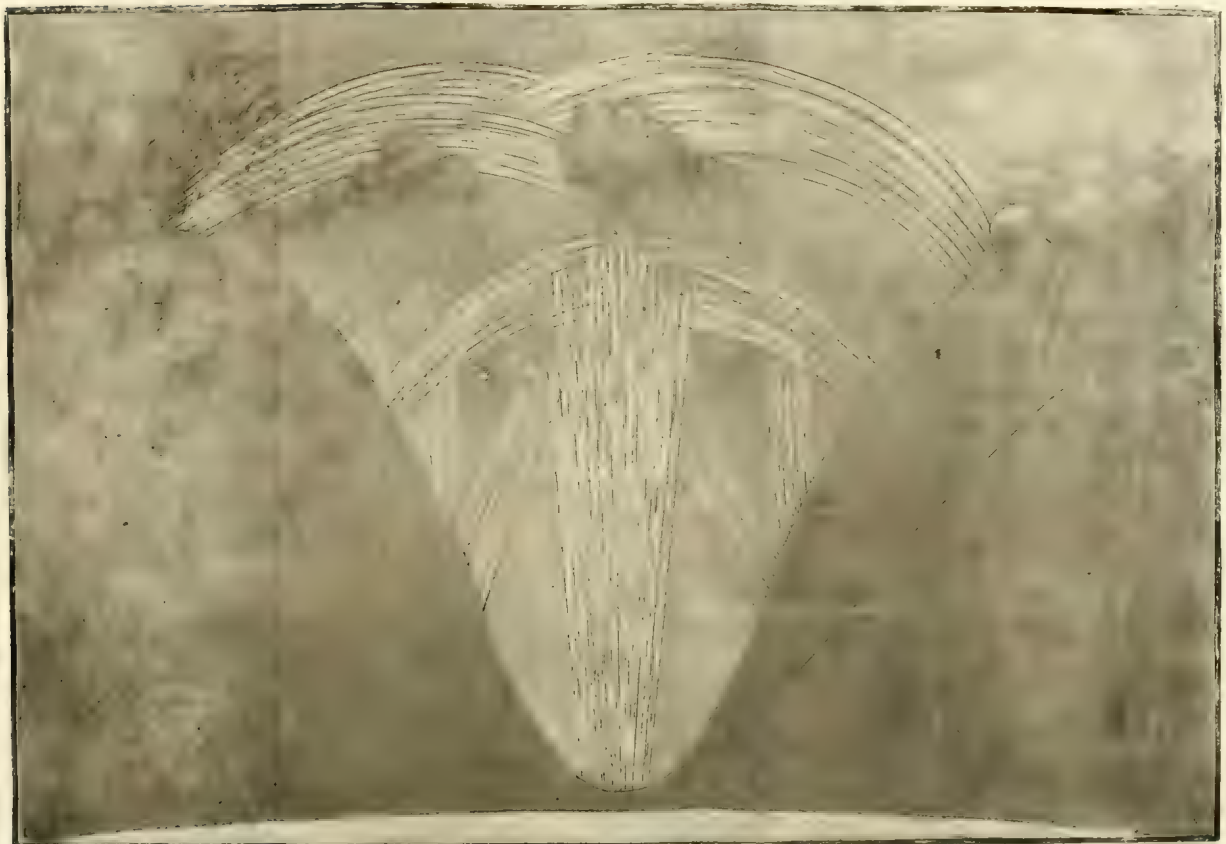
Hist: de l'Acad. Impˡᵉ des Sc. A: 1777. P. II. Planche II.

sbourg le $\frac{16}{27}$ Novembre à 11 heures du Soir



d. Imp. des Sciences A. 1777. P. II. Planche III.

Aurore boréale vüe à St Petersbourg le $\frac{16}{27}$ Novembre à 11 heures du Soir



Histoire de l'Acad. Imp. des Sciences A. 1777. P. II. Planche III.

MATHEMATICA.

DE
INTEGRATIONE FORMVLAE
$$\int \frac{dx\, lx}{\sqrt{(1-xx)}},$$
AB $x=0$ AD $x=1$ EXTENSA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Methodus maxime naturalis huiusmodi formulas $\int p\,dx\,lx$ tractandi in hoc consistit, vt eae ad alias huiusmodi formas $\int q\,dx$ reducantur, in quibus littera q sit functio algebraica ipsius x; quandoquidem regulae integrandi potissimum ad tales formulas sunt accommodatae. Huiusmodi autem reductio nulla prorsus laborat difficultate, quando functio p ita est comparata, vt integrale $\int p\,dx$ algebraice exhiberi queat. Si enim fuerit $\int p\,dx = P$, ita vt formula proposita sit $\int d P\,lx$, ea sponte reducitur ad hanc expressionem: $P\,lx - \int \frac{P\,dx}{x}$, sicque iam totum negotium ad integrationem huius formulae $\int \frac{P\,dx}{x}$ est perductum. Quando vero formula $\int p\,dx$ integrationem algebraicam non admittit, quemadmodum euenit in nostra formula proposita $\int \frac{dx\,lx}{\sqrt{1-xx}}$, talis reductio successu penitus

 caret;

caret. Cum enim ſit $\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = A.\ \text{ſin.}\ x$, iſta reductio daret

$$\int\frac{dx\,lx}{\sqrt{1-xx}} = A.\ \text{ſin.}\ x\,lx - \int\frac{dx}{x}.\ A\ \text{ſin.}\ x$$

ſicque poſt ſignum integrationis noua quantitas tranſcendens A ſin. x occurreret, cuius integratio aeque eſt abſcondita ac ipſius propoſitae. Quare cum nuper ſingulari methodo inueniſſem eſſe

$$\int\frac{dx\,lx}{\sqrt{(1-xx)}}\left[\begin{smallmatrix}ab & x=0\\ ad & x=1\end{smallmatrix}\right] = -\tfrac{1}{2}\pi\,l\,2$$

expreſſio integralis eo maiori attentione digna eſt cenſenda, quod eius inueſtigatio neutiquam eſt obuia; vnde operae pretium eſſe duxi eius veritatem etiam ex aliis fontibus oſtendiſſe, ante quam ipſam methodum, quae me eo perduxit, exponerem.

Prima demonſtratio integrationis propoſitae.

§. 2. Quoniam hic potiſſimum ad ſeries infinitas eſt recurrendum, formula autem lx talem reſolutionem ſimplicem reſpuit, adhibeamus ſubſtitutionem $\sqrt{(1-xx)} = y$ vnde fit $x = \sqrt{1-yy}$, hincque porro

$$lx = -\frac{yy}{2} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{6} - \frac{y^8}{8} - \text{etc.}$$

hoc igitur modo formula integralis propoſita $\int\frac{dx\,lx}{\sqrt{1-xx}}$ transformatur in ſequentem formam:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-yy}}\left(\frac{yy}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8} + \text{etc.}\right)$$

vbi, cum ſit $y = \sqrt{(1-xx)}$, notetur integrationem extendi debere ab $y = 1$ vsque ad $y = 0$; quare ſi hos terminos integrationis permutare velimus, ſignum totius formae mutari oportet.

§. 3. Quo autem minus tali ſignorum mutatione confundamur, deſignemus valorem quaeſitum littera S, vt ſit

$$S = \int\frac{dx\,lx}{\sqrt{1-xx}}\left[\begin{smallmatrix}ab & x=0\\ ad & x=1\end{smallmatrix}\right]$$

atque

atque facta fubftitutione $y = \sqrt{1 - xx}$, habebimus, vti modo monuimus

$$S = -\int \frac{dy}{\sqrt{1-yy}} \left(\frac{yy}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \text{etc.} \left[\begin{matrix} ab\ y = 0 \\ ad\ y = 1 \end{matrix} \right] \right.$$

fub his autem integrationis terminis, fcilicet ab $y = 0$ ad $y = 1$, iam fatis notum eft, fingulas partes, quae hic occurrunt, ad fequentes valores reduci:

$$\int \frac{yy\,dy}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{y^4\,dy}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{y^6\,dy}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{y^8\,dy}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{y^{10}\,dy}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{\pi}{2}$$

vbi nimirum eft $\frac{\pi}{2} = \int \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$, ita vt $1 : \pi$ exprimat rationem diametri ad peripheriam circuli.

§. 4. Quodfi ergo fingulos iftos valores introducamus, pro valore quaefito S impetrabimus fequentem feriem infinitam:

$$S = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8^2} + \text{etc.} \right)$$

ficque nunc totum negotium eo eft reductum, vt iftius feriei infinitae fumma Inueftigetur; qui labor fortaffe haud minus operofus videri poteft, quam id ipfum, quod nobis exfequi eft propofitum. Interim tamen ad cognitionem fummae huius feriei haud difficulter fequenti modo nobis pertingere licebit.

§. 5. Cum fit

$$\frac{1}{\sqrt{(1-zz)}} = 1 + \frac{1}{2} zz + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 + \text{etc.}$$

fi vtrinque per $\frac{dz}{z}$ multiplicemus et integremus, obtinebimus

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{1-zz}} = lz + \frac{1}{2^2} zz + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} z^6 + \text{etc.}$$

ficque

sicque ad ipsam seriem nostram sumus perducti, cuius ergo valor quaeri debet ex hac expressione: $\int \frac{dz}{z\sqrt{1-zz}} - lz$, integrali scilicet ita sumto, vt euanescat posito $z = 0$, quo facto statuatur $z = 1$, ac prodibit ipsa series

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1.3}{2.4^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8^2} + \text{etc.}$$

Hoc igitur modo totum negotium perductum est ad istam formulam integralem $\int \frac{dz}{z\sqrt{1-zz}}$, quae posito $\sqrt{1-zz} = v$ transit in hanc formam: $\frac{-dv}{1-vv}$ cuius integrale constat esse $-\frac{1}{2} l \frac{1+v}{1-v} = -l \frac{1+v}{\sqrt{(1-vv)}}$. Quodsi loco v restituatur valor $\sqrt{1-zz}$, tota expressio, qua indigemus, ita se habebit:

$$\int \frac{dz}{(z\sqrt{1-zz})} - lz = -l\frac{(1+\sqrt{1-zz})}{z} - lz + C = C - l(1+\sqrt{1-zz}),$$

vbi constans ita accipi debet, vt valor euanescat, posito $z = 0$, ideoque erit $C = l2$. Quamobrem, posito $z = 1$, summa seriei quaesita erit $l2$, hincque valor ipsius formulae integralis propositae erit

$$\int \frac{dx\, lx}{\sqrt{(1-xx)}} = S = -\frac{\pi}{2} l 2$$

prorsus vti longe alia methodo inueneram, ex quo iam satis intelligitur, istam veritatem vtique altioris esse indaginis, ideoque attentione Geometrarum maxime dignam.

Alia demonstratio integrationis propositae.

§. 6. Cum sit $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ elementum arcus circuli cuius sinus $= x$, ponamus istum angulum $= \phi$, ita vt sit $x = \text{sin.}\,\phi$ et $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = d\phi$, atque facta hac substitutione valor quantitatis S, in quem inquirimus, ita repraesentabitur: $S = \int d\phi\, l\, \text{sin.}\,\phi \left[\begin{smallmatrix} a & \phi = 0 \\ ad & \phi = 90^\circ \end{smallmatrix}\right]$. Cum enim ante termini fuissent $x = 0$ et $x = 1$, iis nunc respondent $\phi = 0$ et $\phi = 90^\circ$ siue $\phi = \frac{\pi}{2}$. Hic igitur totum negotium eo redit, vt formula $l\,\text{sin.}\,\phi$ commode in seriem infinitam conuerta-

vertatur. Hunc in finem ponamus $l\,\text{fin.}\,\Phi = s$ eritque $ds = \frac{d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi}$. Nouimus autem esse

$$\frac{\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi} = 2\,\text{fin.}\,2\Phi + 2\,\text{fin.}\,4\Phi + 2\,\text{fin.}\,6\Phi + 2\,\text{fin.}\,8\Phi + \text{etc.}$$

Si enim vtrinque per fin. Φ multiplicemus, ob

$$2\,\text{fin.}\,n\Phi\,\text{fin.}\,\Phi = \text{cof.}\,(n-1)\Phi - \text{cof.}\,(n+1)\Phi,$$

vtique prodit

$$\text{cof.}\,\Phi = \text{cof.}\,\Phi + \text{cof.}\,3\Phi + \text{cof.}\,5\Phi + \text{cof.}\,7\Phi + \text{cof.}\,9\Phi + \text{etc.}$$
$$- \text{cof.}\,3\Phi - \text{cof.}\,5\Phi - \text{cof.}\,7\Phi - \text{cof.}\,9\Phi - \text{etc.}$$

Hac igitur ferie pro $\frac{\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi}$ in vfum vocata erit

$$s = C - \text{cof.}\,2\Phi - \tfrac{1}{2}\text{cof.}\,4\Phi - \tfrac{1}{3}\text{cof.}\,6\Phi - \tfrac{1}{4}\text{cof.}\,8\Phi - \tfrac{1}{5}\text{cof.}\,10\Phi - \text{etc.}$$

vbi cum fit $s = l\,\text{fin.}\,\Phi$ ideoque $s = 0$, quando fin. $\Phi = 1$ ideoque $\Phi = \frac{\pi}{2}$, conftantem C ita definire oportet, vt pofito $\Phi = \frac{\pi}{2} = 90°$ euadat $s = 0$, ex quo colligitur fore

$$C = -1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \text{etc.} = -l\,2.$$

§. 7. Cum igitur fit

$$l\,\text{fin.}\,\Phi = -l\,2 - \text{cof.}\,2\Phi - \tfrac{1}{2}\text{cof.}\,4\Phi - \tfrac{1}{3}\text{cof.}\,6\Phi - \tfrac{1}{4}\text{cof.}\,8\Phi - \text{etc.}$$

erit valor formulae propofitae

$$\int d\Phi\,l\,\text{fin.}\,\Phi = C - \Phi\,l\,2 - \tfrac{1}{2}\text{fin.}\,2\Phi - \tfrac{1}{8}\text{fin.}\,4\Phi - \tfrac{1}{18}\text{fin.}\,6\Phi$$
$$- \tfrac{1}{32}\text{fin.}\,8\Phi - \tfrac{1}{50}\text{fin.}\,10\Phi - \text{etc.}$$

quae expreffio cum euanefcere debeat pofito $\Phi = 0$, conftans hic ingreffa erit $C = 0$, ita vt iam in genere fit

$$\int d\Phi\,l\,\text{fin.}\,\Phi = -\Phi\,l\,2 - \frac{2\,\text{fin.}\,2\Phi}{2^2} - \frac{2\,\text{fin.}\,4\Phi}{4^2} - \frac{2\,\text{fin.}\,6\Phi}{6^2} - \frac{2\,\text{fin.}\,8\Phi}{8^2}$$
$$- \frac{2\,\text{fin.}\,10\Phi}{10^2} - \frac{2\,\text{fin.}\,12\Phi}{12^2} - \text{etc.}$$

Quodfi iam hic capiatur $\Phi = 90° = \frac{\pi}{2}$, omnium angulorum 2Φ; 4Φ; 6Φ; 8Φ etc. qui hic occurrunt finus euanefcunt, ideoque valor quaefitus erit

$$S = \int d\Phi\,l\,\text{fin.}\,\Phi \left[\begin{smallmatrix} a & \Phi = 0 \\ ad & \Phi = 90° \end{smallmatrix}\right] = -\tfrac{\pi}{2}\,l\,2$$

quemadmodum etiam in priore demonftratione oftendimus.

§. 8. Ista autem demonstratio praecedenti ideo longe antecellit, quod nobis non solum valorem formulae propositae exhibeat casu quo $\Phi = 90°$, sed etiam verum eius valorem ostendat, quicunque angulus pro Φ accipiatur, id quod ad ipsam formulam propositam $\int \frac{dx\, lx}{\sqrt{1-xx}}$ transferri poterit, cuius adeo valorem pro quolibet valore ipsius x assignare poterimus. Quodsi enim istius formulae valorem desideremus ab $x = 0$ vsque ad $x = a$, quaeratur angulus α cuius sinus sit aequalis ipsi a atque semper habebitur

$$\int \frac{dx\, lx}{\sqrt{1-xx}} \left[\begin{smallmatrix} ab & x = 0 \\ ad & x = a \end{smallmatrix}\right] = -\alpha\, l\, 2 - \frac{2 \sin. 2\alpha}{2^2} - \frac{2 \sin. 4\alpha}{4^2} - \frac{2 \sin. 6\alpha}{6^2} - \frac{2 \sin. 8\alpha}{8^2} - \text{etc.}$$

Vnde patet quoties fuerit $\alpha = \frac{i\pi}{2}$, denotante i numerum integrum quemcunque, quoniam omnes sinus euanescunt, valor formulae his casibus finite exprimi per $-\frac{i\pi}{2} l\, 2$; aliis vero casibus valor nostrae formulae per seriem infinitam satis concinnam exprimetur. Ita si capiatur $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vt sit $\alpha = \frac{\pi}{4}$ valor nostrae formulae erit

$$-\frac{\pi}{4} l\, 2 - \frac{2}{2^2} + \frac{2}{6^2} - \frac{2}{10^2} + \frac{2}{14^2} - \frac{2}{18^2} + \frac{2}{22^2} - \text{etc.}$$

quae series elegantius ita exprimitur:

$$-\frac{\pi}{4} l\, 2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} + \text{etc.}\right)$$

sicque hic occurrit series satis memorabilis

$$1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \frac{1}{81} - \frac{1}{121} + \text{etc.}$$

cuius summam nullo adhuc modo ad mensuras cognitas reuocare licuit.

§. 9. Quoniam tam egregia series hic se quasi praeter exspectationem obtulit, etiam alios casus euoluamus notabiliores, sumamusque $a = \frac{1}{2}$, vt sit $\alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$ atque nostrae formulae hoc casu valor erit

$$-\frac{\pi}{6} l\, 2 - \frac{\sqrt{3}}{2^2} - \frac{\sqrt{3}}{4^2} + \frac{\sqrt{3}}{8^2} + \frac{\sqrt{3}}{10^2} - \frac{\sqrt{3}}{14^2} - \frac{\sqrt{3}}{16^2} + \text{etc.}$$

quae expressio ita exhiberi potest

$$-\frac{\pi}{6} l\, 2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} - \frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} + \text{etc.}\right)$$

in

in qua ſerie quadrata multiplorum ternarii deficiunt. Sumamus nunc ſimili modo $a = \frac{\surd 3}{2}$, vt ſit $\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$, ac valor noſtrae formulae hoc caſu prodibit

$$-\frac{\pi}{3} l 2 - \frac{\surd 3}{2^2} + \frac{\surd 3}{4^2} - \frac{\surd 3}{8^2} + \frac{\surd 3}{10^2} - \frac{\surd 3}{14^2} + \frac{\surd 3}{16^2} - \text{etc.}$$

ſiue hoc modo exprimetur:

$$-\frac{\pi}{3} l 2 - \frac{\surd 3}{4} \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} + \text{etc.} \right)$$

Adhuc alia demonſtratio integrationis propoſitae.

§. 10. Introducatur in formulam noſtram angulus Φ, cuius coſinus ſit $= x$, ſiue ſit $x = \text{coſ.}\, \Phi$ et formula noſtra induet hanc formam: $-\int d\Phi\, l\, \text{coſ.}\, \Phi$, quod integrale a $\Phi = 90^\circ$ vsque ad $\Phi = 0$ erit extendendum. Quodſi autem hos terminos permutemus, valor S, quem quaerimus, ita exprimetur:

$$S = \int d\Phi\, l\, \text{coſ.}\, \Phi \left[\begin{smallmatrix} a & \Phi = 0 \\ ad & \Phi = 90^\circ \end{smallmatrix} \right].$$

Vt hic $l\, \text{coſ.}\, \Phi$ in ſeriem idoneam conuertamus, ſtatuamus vt ante $s = l\, \text{coſ.}\, \Phi$, eritque $ds = -\frac{d\Phi\, \text{ſin.}\, \Phi}{\text{coſ.}\, \Phi}$. Conſtat autem per ſeriem eſſe

$$\frac{\text{ſin.}\, \Phi}{\text{coſ.}\, \Phi} = 2\, \text{ſin.}\, 2\Phi - 2\, \text{ſin.}\, 4\Phi + 2\, \text{ſin.}\, 6\Phi - 2\, \text{ſin.}\, 8\Phi + \text{etc.}$$

Cum enim in genere ſit

$$2\, \text{ſin.}\, n\Phi\, \text{coſ.}\, \Phi = \text{ſin.}\, (n+1)\Phi + \text{ſin.}\, (n-1)\Phi$$

ſi vtrinque per coſ. Φ multiplicemus orietur

$$\begin{aligned} \text{ſin.}\, \Phi = \quad & \text{ſin.}\, 3\Phi - \text{ſin.}\, 5\Phi + \text{ſin.}\, 7\Phi - \text{ſin.}\, 9\Phi \\ & + \text{ſin.}\, \Phi - \text{ſin.}\, 3\Phi + \text{ſin.}\, 5\Phi - \text{ſin.}\, 7\Phi + \text{ſin.}\, 9\Phi \end{aligned} \ \text{etc.}$$

quare cum ſit $ds = -\frac{d\Phi\, \text{ſin.}\, \Phi}{\text{coſ.}\, \Phi}$, erit nunc

$$S = C + \frac{\text{coſ.}\, 2\Phi}{1} - \frac{\text{coſ.}\, 4\Phi}{2} + \frac{\text{coſ.}\, 6\Phi}{3} - \frac{\text{coſ.}\, 8\Phi}{4} + \frac{\text{coſ.}\, 10\Phi}{5} - \text{etc.}$$

Quia igitur eſt $s = l\, \text{coſ.}\, \Phi$, euidens eſt poſito $\Phi = 0$ fieri debere $s = 0$, vnde colligitur

$$C = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \text{etc.} = -l 2$$

 ſicque

ſicque erit

$$l\,\text{cof}\,\Phi = -l\,2 + \frac{\text{cof.}\,2\,\Phi}{1} - \frac{\text{cof.}\,4\,\Phi}{2} + \frac{\text{cof.}\,6\,\Phi}{3} - \frac{\text{cof.}\,8\,\Phi}{4} + \text{etc.}$$

quae ſeries ducta in $d\Phi$ et integrata praebet

$$S = \int d\Phi\, l\,\text{cof.}\,\Phi = C - \Phi\, l\,2 + \frac{\text{ſin.}\,2\,\Phi}{2} - \frac{\text{ſin.}\,4\,\Phi}{8} + \frac{\text{ſin.}\,6\,\Phi}{18} - \frac{\text{ſin.}\,8\,\Phi}{32} + \frac{\text{ſin.}\,10\,\Phi}{50} - \text{etc.}$$

quae expreſſio quia ſponte euaneſcit poſito $\Phi = 0$, inde patet fore $C = 0$, ſicque habebimus

$$\int d\Phi\, l\,\text{cof.}\,\Phi = -\Phi\, l\,2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\text{ſin.}\,2\,\Phi}{1} - \frac{\text{ſin.}\,4\,\Phi}{2^2} + \frac{\text{ſin.}\,6\,\Phi}{3^2} - \frac{\text{ſin.}\,8\,\Phi}{4^2} + \frac{\text{ſin.}\,10\,\Phi}{5^2} - \text{etc.}\right)$$

Sumto igitur $\Phi = \frac{\pi}{2} = 90°$, oritur vt ante $S = -\frac{\pi}{2}\, l\,2$. Praeterea vero etiam hinc integrale ad quemuis terminum vsque extendere licet.

§. 11. Quodſi formulam poſteriorem a praecedente ſubtrahamus, adipiſcemur in genere hanc integrationem:

$$\int d\Phi\, l\,\text{tang.}\,\Phi = -\text{ſin.}\,2\,\Phi - \tfrac{1}{3^2}\,\text{ſin.}\,6\,\Phi - \tfrac{1}{5^2}\,\text{ſin.}\,10\,\Phi - \text{etc.}$$

vnde patet hoc integrale euaneſcere caſibus $\Phi = 90°$ et in genere $\Phi = i\frac{\pi}{2}$. Poſtquam igitur iſtam integrationem triplici modo demonſtrauimus, ipſam Analyſin, quae me primum huc perduxit, hic delucide ſum expoſiturus.

Analyſis ad integrationem formulae $\int \frac{dx\, lx}{\sqrt{1-xx}}$ aliarumque ſimilium perducens.

§. 12. Tota haec Analyſis innititur ſequenti lemmati a me iam olim demonſtrato: Poſito breuitatis gratia $(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}} = X$, ſi hinc duae formulae integrales formentur $\int X x^{p-1} dx$ et $\int X x^{q-1} dx$, quae a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extendantur, ratio horum valorum ſequenti modo ad productum ex infinitis factoribus conflatum reduci poteſt

$$\frac{\int X x^{p-1} dx}{\int X x^{q-1} dx} = \frac{(m+p)q}{p(m+q)} \cdot \frac{(m+p+n)(q+n)}{(p+n)(m+q+n)} \cdot \frac{(m+p+2n)(q+2n)}{(p+2n)(m+q+2n)}\ \text{etc.}$$

vbi

vbi ſcilicet ſinguli factores tam numeratoris, quam denominatoris continuo eadem quantitate n augentur. Hic autem probe tendendum eſt, veritatem iſtius lemmatis ſubſiſtere non poſſe, niſi ſingulae litterae m, n, p et q denotent numeros poſitiuos, quos tamen ſemper tanqnam integros ſpectare licet.

§. 13. Circa has duas formulas integrales, a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſas, duo caſus imprimis ſeorſim notari merentur, quibus integratio actu ſuccedit, veruſque valor abſolute aſſignari poteſt. Prior caſus locum habet, ſi fuerit $p = n$, ita vt formula ſit $\int X x^{n-1} dx$. Poſito enim $x^n = y$ fiet $X = (1-y)^{\frac{m-n}{n}}$ et $x^{n-1} dx = \frac{1}{n} dy$ ſicque iſta formula euadet $\frac{1}{n} \int dy (1-y)^{\frac{m-n}{n}}$, pariter a termino $y = 0$ vsque ad $y = 1$ extendenda, quae porro poſito $1 - y = z$ abit in hanc formulam $-\frac{1}{n} \int z^{\frac{m-n}{n}} dz$ a termino $z = 1$ vsque ad $z = 0$ extendendam; eius ergo integrale manifeſto eſt $-\frac{1}{m} z^{\frac{m}{n}} + \frac{1}{m}$; vnde facto $z = 0$ valor erit $= \frac{1}{m}$. Conſequenter pro caſu $p = n$ habebimus

$$\int X x^{n-1} dx \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{m}$$

ſicque ſi fuerit vel $p = n$ vel $q = n$, integrale abſolute innoteſcit.

§. 14. Alter caſus notatu dignus eſt quo $p = n - m$, ita vt formula integranda ſit $\int X x^{n-m-1} dx$; tum enim, ſi ponatur $x(1-x^n)^{\frac{-1}{n}}$ ſiue $\frac{x}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}} = y$, poſito $x = 0$ fiet $y = 0$, at poſito $x = 1$ fiet $y = \infty$; tum autem erit

$$y^{n-m} = \frac{x^{n-m}}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}} = X x^{n-m}$$

 vnde

vnde formula integranda erit $\int y^{n-m} \frac{dx}{x}$. Cum igitur ſit $\frac{x}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}} = y$, erit $\frac{x^n}{1-x^n} = y^n$, vnde colligitur $x^n = \frac{y^n}{1+y^n}$, ideoque $n\,l\,x = n\,l\,y - l\,1 + y^n$, cuius differentiatio praebet

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y(1+y^n)}$$

quo valore ſubſtituto formula noſtra integranda erit $\int \frac{y^{n-m-1}\,dy}{1+y^n}$ a termino $y = 0$ vsque ad $y = \infty$ extendenda, quae formula ideo eſt notatu digna, quod ab omni irrationalitate eſt liberata.

§. 15. Quoniam igitur hoc caſu ad formulam rationalem ſumus perducti, ex elementis calculi integralis conſtat, eius integrationem ſemper per logarithmos et arcus circulares abſolui poſſe, tum vero pro hoc caſu non ita pridem oſtendi, huius formulae: $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}$ integrale ab $x = 0$ vsque ad $x = \infty$ extenſum reduci ad valorem $\frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}$; facta igitur applicatione pro noſtro caſu habebimus

$$\int \frac{y^{n-m-1}\,dy}{1+y^n} = \frac{\pi}{n \sin. \frac{(n-m)\pi}{n}} = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}$$

quamobrem pro caſu $p = n - m$ valor integralis ſequenti modo abſolute exprimi poteſt, eritque

$$\int X\, x^{n-m-1}\, dx \left[\begin{matrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{matrix} \right] = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}},$$

quod idem manifeſto tenendum eſt, ſi fuerit $q = n - m$.

§. 16. His praemiſſis ponamus porro breuitatis gratia

$$\int X\, x^{p-1}\, dx \left[\begin{matrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{matrix} \right] = P \text{ et}$$

$$\int X\, x^{q-1}\, dx \left[\begin{matrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{matrix} \right] = Q$$

atque

atque lemma allatum nobis praebet hanc aequationem

$$\frac{P}{Q} = \frac{(m+p)q}{p(m+1)} \cdot \frac{(m+p+n)(q+n)}{(p+n)(m+q+n)} \cdot \frac{(m+p+2n)(q+2n)}{(p+2n)(m+q+2n)} \text{ etc.}$$

Hinc igitur ſumendis logarithmis deducimus

$$lP - lQ = l(m+p) - lp + l(m+p+n) - l(p+n) + l(m+p+2n) - l(p+2n) \text{etc.}$$
$$+ lq - l(m+q) + l(q+n) - l(m+q+n) + l(q+2n) - l(m+q+2n) \text{etc.}$$

haecque aequalitas ſemper locum habebit, quicunque valores litteris m, n, p et q tribuantur, dummodo fuerint poſitiui.

§. 17. Cum igitur haec aequalitas in genere ſubſiſtat, etiam veritati erit conſentanea, quando quaepiam harum litterarum m, n, p et q infinite parum immutantur, ſiue tanquam variabiles ſpectantur. Hanc ob rem conſideremus ſolam quantitatem p tanquam variabilem, ita vt reliquae litterae m, n et q maneant conſtantes, ideoque etiam quantitas Q erit conſtans, dum altera P variabitur; ex quo differentiando nanciſcemur hanc aequationem:

$$\frac{dP}{P} = \frac{dp}{m+p} - \frac{dp}{p} + \frac{dp}{m+p+n} - \frac{dp}{p+n} + \frac{dp}{m+p+2n} - \frac{dp}{p+2n}$$
$$+ \frac{dp}{m+p+2n} - \frac{dp}{p+3n} + \text{etc.}$$

vbi totum negotium eo redit, quemadmodum differentiale formulae P, quae eſt integralis, exprimi oporteat.

§. 18. Cum igitur P ſit formula integralis ſolam quantitatem x tanquam variabilem inuoluens, quandoquidem in eius integratione exponens p vt conſtans tractari debet, demum poſt integrationem ipſam quaentitatem P tanquam functionem duarum variabilium x et p ſpectare licebit; vnde quaeſtio huc redit, quomodo valorem, hoc charactere $\left(\frac{dP}{dp}\right)$ exprimi ſolitum inueſtigari oporteat, qui ſi indicetur littera Π, aequatio ante inuenta hanc induet formam:

$$\frac{\Pi}{P} = \frac{1}{m+p} - \frac{1}{p} + \frac{1}{m+p+n} - \frac{1}{p+n} + \frac{1}{m+p+2n} - \frac{1}{p+2n} + \text{etc.}$$

 Hanc

Hanc vero ſeriem infinitam haud difficulter ad expreſſionem finitam reuocare licebit hoc modo: Ponatur

$$s = \frac{v^{m+p}}{m+p} - \frac{v^p}{p} + \frac{v^{m+p+n}}{m+p+n} - \frac{v^{p+n}}{p+n} + \frac{v^{m+p+2n}}{m+p+2n} - \frac{v^{p+2n}}{p+2n} + \text{etc.}$$

ita vt facto $v = 1$ littera s nobis exhibeat valorem quaeſitum $\frac{\Pi}{P}$; at vero differentiatio nobis dabit

$$\frac{ds}{dv} = v^{m+p-1} - v^{p-1} + v^{m+p+n-1} - v^{p+n-1} + v^{m+p+2n-1} - v^{p+2n-1} + \text{etc.}$$

cuius ſeriei infinitae ſumma manifeſto eſt

$$\frac{v^{m+p-1} - v^{p-1}}{1 - v^n} = \frac{v^{p-1}(v^m - 1)}{1 - v^n}.$$

Hinc igitur viciſſim concludimus fore

$$S = \int \frac{v^{p-1}(v^m - 1)\,dv}{1 - v^n}$$

quae formula integralis a $v = 0$ vsque ad $v = 1$ eſt extendenda; ſicque habebimus

$$\frac{\Pi}{P} = \int \frac{v^{p-1}(v^m - 1)\,dv}{1 - v^n} \left[\begin{matrix}\text{a } v = 0\\ \text{ad } v = 1\end{matrix}\right].$$

§. 19. Ad valorem autem $\left(\frac{dP}{dp}\right)$, quem hic littera Π indicauimus, inueſtigandum, ex principiis calculi integralis ad functiones duarum variabilium applicati iam ſatis notum eſt differentiale formulae integralis $P = \int X x^{p-1} dx$ ex ſola variabilitate ipſius p oriundum obtineri, ſi formula poſt ſignum integrationis poſita $X x^{p-1}$ ex ſola variabilitate ipſius p differentietur atque elementum dp ſigno integrationis praefigatur; at vero quia X non continet p, hic vt conſtans tractari debet: poteſtatis vero x^{p-1} differentiale hinc natum erit $x^{p-1} dp\, lx$; quam ob rem ex hac differentiatione orietur $dP = dp \int X x^{p-1} dx\, lx$, ita vt tantum poſt ſignum integrationis factor lx acceſſerit, ex quo manifeſtum

nifeſtum eſt, fore

$$\Pi = \int X x^{p-1} dx\, lx \left[\begin{smallmatrix} ab & x = 0 \\ ad & x = 1 \end{smallmatrix}\right].$$

hinc igitur ſequens theorema generale conſtituere licebit.

Theorema generale.

§. 20. Poſito breuitatis gratia $X = (1 - x^n)^{\frac{m-n}{n}}$ ſi ſequentes formulae integrales omnes a termino $x = 0$ ad terminum $x = 1$ extendantur, ſequens aequalitas ſemper erit veritati conſentanea:

$$\int \frac{X x^{p-1} dx\, lx}{\int X x^{p-1} dx} = \int \frac{x^{p-1}(x^m - 1) dx}{1 - x^n}$$

nihil enim obſtabat, quo minus loco v ſcriberemus x, quandoquidem iſti valores tantum a terminis integrationis pendent.

§. 21. Hoc igitur modo deducti ſumus ad integrationem huiusmodi formularum $\int X x^{p-1} dx\, lx$ in quibus quantitas logarithmica lx poſt ſignum integrationis tanquam factor ineſt, quarum valorem exprimere licuit per binas formulas integrales ordinarias, cum ſit

$$\int X x^{p-1} dx\, lx = \int X x^{p-1} dx . \int \frac{x^{p-1}(x^m - 1) dx}{1 - x^n}$$

integralibus ſcilicet ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſis, vbi breuitatis gratia poſuimus $(1 - x^n)^{\frac{m-n}{n}} = X$. Hinc igitur pro binis caſibus memorabilibus ſupra expoſitis bina theoremata particularia deriuemus.

Theorema particulare I, quo $p = n$.

§. 22. Quoniam ſupra vidimus caſu $p = n$ fieri $\int X x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$, hoc valore ſubſtituto habebimus iſtam aequationem ſatis elegantem:

$$\int X x^{n-1} dx\, lx = \frac{1}{m} \int \frac{x^{n-1}(x^m - 1) dx}{1 - x^n}$$

dum

dum scilicet ambo integralia ab $x=0$ ad $x=1$ extenduntur.

Theorema particulare II, quo $p=n-m$.

§. 23. Quoniam pro hoc casu, quo $p=n-m$ supra ostendimus esse

$$\int X x^{n-m-1} dx = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}$$

nunc deducimur ad sequentem integrationem maxime notata dignam:

$$\int X x^{n-m-1} dx\, lx = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} \int \frac{x^{n-m-1}(x^m-1)dx}{1-x^n}$$

si quidem haec ambo integralia ab $x=0$ vsque ad $x=1$ extendantur; vbi meminisse oportet esse

$$X = (1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}.$$

§. 24. Hic probe notetur theorema generale latissime patere, propterea quod in eo insunt tres exponentes indefiniti, scilicet m, n et p, qui penitus arbitrio nostro relinquuntur, quos ergo infinitis modis pro lubitu definire licet, dummodo singulis valores positiui tribuantur, ita vt semper valor huius formulae integralis $\int X x^{p-1} dx\, lx$, quam ob factorem lx tanquam transcendentem spectari oportet, per formulas integrales ordinarias exprimi queat, quae cum sint generalissima, operae pretium erit non nullos casus speciales euoluere.

I. Euolutio casus quo $m=1$ et $n=2$.

§. 25. Hoc igitur casu erit $X=\frac{1}{\sqrt{1-xx}}$, vnde pro hoc casu theorema generale ita se habebit

$$\int \frac{x^{p-1} dx\, lx}{\sqrt{1-xx}} = -\int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt{1-xx}} \cdot \int \frac{x^{p-1} dx}{1+x}$$

si-

siquidem singula haec integralia ab $x=0$ ad $x=1$ extendantur. Quoniam igitur hic tantum exponens p arbitrio nostro relinquitur, hinc sequentia exempla perlustremus.

Exemplum I. quo $p=1$.

§. 26. Hoc igitur casu aequatio superior hanc induet formam:

$$\int \frac{dx\, lx}{\sqrt{1-xx}} = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} \cdot \int \frac{dx}{1+x}$$

vbi, integralibus ab $x=0$ ad $x=1$ extensis, notum est fieri

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \int \frac{dx}{1+x} = l\,2$$

ita vt iam habeamus

$$\int \frac{dx\, lx}{\sqrt{1-xx}} \left[\begin{smallmatrix} ab\ x=0 \\ ad\ x=1 \end{smallmatrix} \right] = -\frac{\pi}{2}\, l\,2,$$

quae est ea ipsa formula, quam initio huius dissertationis tractauimus et cuius veritatem iam triplici demonstratione corroborauimus.

§. 27. Eundem valorem elicere licet ex theoremate particulari secundo, quo erat $p=n-m$, siquidem nunc ob $n=2$ et $m=1$ erit $p=1$; inde enim ob $X=\frac{1}{\sqrt{1-xx}}$ istud theorema praebet

$$\int \frac{dx\, lx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{2 \sin. \frac{\pi}{2}} \int - \frac{dx}{1+x} = -\frac{\pi}{2}\, l\,2.$$

Exemplum II. quo $p=2$.

§. 28. Hoc igitur casu aequatio superior hanc induet formam:

$$\int \frac{x\,dx\, lx}{\sqrt{1-xx}} = -\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-xx}} \cdot \int \frac{x\,dx}{1+x}.$$

Iam vero integralibus ab $x=0$ ad $x=1$ extensis notum est fore

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-xx}} = 1 \text{ et } \int \frac{x\,dx}{1+x} = 1 - l\,2$$

ita

ita vt habeamus

$$\int \frac{x\,dx\,lx}{\sqrt{1-xx}} \left[\begin{matrix} ab & x=0 \\ ad & x=1 \end{matrix} \right] = l\,2 - 1.$$

§. 29. Quoniam in hac formula integrale $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-xx}}$ algebraice exhiberi potest, cum sit $= 1 - \sqrt{1-xx}$, valor quaesitus etiam per reductiones consuetas erui potest, cum sit

$$\int \frac{x\,dx\,lx}{\sqrt{1-xx}} = (1-\sqrt{1-xx})\,lx - \int \frac{dx}{x}(1-\sqrt{1-xx})$$

positoque $x = 1$ erit

$$\int \frac{x\,dx\,lx}{\sqrt{1-xx}} = -\int \frac{dx}{x}(1-\sqrt{1-xx})$$

ad quam formam integrandam fiat $1 - \sqrt{1-xx} = z$, vnde colligitur $xx = 2z - zz$, ergo $2\,lx = lz + l(2-z)$ sicque fiet $\frac{dx}{x} = \frac{dz(1-z)}{z(2-z)}$, quibus valoribus substitutis erit

$$+\int \frac{dx}{x}(1-\sqrt{1-xx}) = +\int \frac{dz(1-z)}{2-z}$$

qui ergo valor erit $= C - z - l(2-z)$. Quia igitur posito $x = 0$ fit $z = 0$, constans erit $C = +l\,2$; facto igitur $x = 1$, quia tum fit $z = 1$, iste valor integralis erit $l\,2 - 1$, prorsus vt ante.

§. 30. Eundem valorem suppeditat theorema prius supra allatum, quo erat $p = n = 2$; inde enim statim fit $\int \frac{x\,dx\,lx}{\sqrt{1-xx}} = \int -\frac{x\,dx}{1+x}$. Ante autem vidimus esse $\int \frac{x\,dx}{1+x} = 1 - l\,2$ ita vt etiam hinc prodeat valor quaesitus $l\,2 - 1$.

Exemplum III. quo $p = 3$.

§. 31. Hoc igitur casu aequatio in theoremate generali allata hanc induet formam:

$$\int \frac{xx\,dx\,lx}{\sqrt{1-xx}} = -\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{1-xx}} \cdot \int \frac{xx\,dx}{1+x}.$$

Per reductiones autem notissimas constat esse

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{1-xx}} \left[\begin{matrix} ab & x=0 \\ ad & x=1 \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

at

at vero fractio spuria $\frac{xx}{1+x}$ resoluitur in has partes $x-1+\frac{1}{1+x}$, vnde erit $\int\frac{xxdx}{1+x}=\frac{1}{2}xx-x+l(1+x)$, quod integrale iam euanescit posito $x=0$; facto ergo $x=1$ eius valor erit $=-\frac{1}{2}+l2$; quamobrem integrale quod quaerimus erit

$$\int\frac{xxdx\,lx}{\sqrt{1-xx}}\left[\begin{matrix}ab\ x=0\\ ad\ x=1\end{matrix}\right]=-\frac{\pi}{4}(l2-\frac{1}{2}).$$

Exemplum IV. quo $p=4$.

§. 32. Hoc igitur casu aequatio superior hanc induet formam:

$$\int\frac{x^3dx\,lx}{\sqrt{1-xx}}=-\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-xx}}\cdot\int\frac{x^3dx}{1+x}.$$

Per reductiones autem notissimas constat esse

$$\int\frac{x^3d3}{\sqrt{1-xx}}\left[\begin{matrix}ab\ x=0\\ ad\ x=1\end{matrix}\right]=\frac{2}{3}$$

tum vero fractio spuria $\frac{x^3}{1+x}$ resoluitur in has partes: $xx-x+1-\frac{1}{x+1}$, vnde integrando fit

$$\int\frac{x^3dx}{1+x}=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}xx+x-l(1+x)$$

ex quo valor formulae erit $=\frac{5}{6}-l2$. His ergo valoribus substitutis adipiscimur hanc integrationem:

$$\int\frac{x^3dx\,lx}{\sqrt{1-xx}}\left[\begin{matrix}ab\ x=0\\ ad\ x=1\end{matrix}\right]=-\frac{2}{3}(\frac{5}{6}-l2).$$

Exemplum V. quo $p=5$.

§. 33. Hoc igitur casu aequatio superior hanc induet formam:

$$\int\frac{x^4dx\,lx}{\sqrt{1-xx}}=-\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-xx}}\cdot\int\frac{x^4dx}{1+x}.$$

Constat autem esse

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-xx}}\left[\begin{matrix}ab\ x=0\\ ad\ x=1\end{matrix}\right]=\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}$$

tum vero fractio spuria $\frac{x^4}{1+x}$ manifesto resoluitur in has partes: $x^3-xx+x-1+\frac{1}{x+1}$, vnde integrando fit

$$\int\frac{x^4dx}{1+x}=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}xx-x+l(1+x)$$

 ex

ex quo valor formulae erit $= -\frac{7}{12} + l\,2$. His igitur valoribus ſubſtitutis prodibit iſta integratio:

$$\int \frac{x^4\,dx\,lx}{\sqrt{1-xx}} \left[\begin{smallmatrix} ab & x=0 \\ ad & x=1 \end{smallmatrix}\right] = -\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}\left(l\,2 - \frac{7}{12}\right).$$

Exemplum VI. quo $p = 6$.

§. 34. Hoc igitur caſu aequatio ſuperior induet hanc formam:

$$\int \frac{x^5\,dx\,lx}{\sqrt{1-xx}} = -\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-xx}} \cdot \int \frac{x^5\,dx}{1+x}.$$

Conſtat autem per reductiones notas eſſe

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-xx}} \left[\begin{smallmatrix} ab & x=0 \\ ad & x=1 \end{smallmatrix}\right] = \frac{2.4}{3.5}$$

tum vero fractio ſpuria $\frac{x^5}{1+x}$ reſoluitur in has partes:

$$x^4 - x^3 + xx - x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

vnde integrando nanciſcimur

$$\int \frac{x^5\,dx}{1+x} = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + x - l(1+x)$$

ex quo valor huius formulae erit $= \frac{47}{60} - l\,2$; quibus valoribus ſubſtitutis prodibit iſta integratio:

$$\int \frac{x^5\,dx\,lx}{\sqrt{1-xx}} \left[\begin{smallmatrix} ab & x=0 \\ ad & x=1 \end{smallmatrix}\right] = -\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{47}{60} - l\,2\right).$$

II. Euolutio caſus quo $m = 3$ et $n = 2$.

§. 35. Hic ergo erit $X = \sqrt{(1-xx)}$, vnde theorema noſtrum generale nobis praebebit hanc aequationem:

$$\int x^{p-1}\,dx\,lx.\sqrt{1-xx} = \int x^{p-1}\,dx\sqrt{1-xx}.\int \frac{x^{p-1}(x^3-1)\,dx}{1-xx}$$

vbi cum ſit

$$\frac{x^3-1}{1-xx} = \frac{-xx-x-1}{x+1} = -x - \frac{1}{x+1}$$

erit poſtrema formula integralis

$$-\int x^p\,dx - \int \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x}$$

quae

quae integrata ab $x = 0$ ad $x = 1$ dat

$$-\frac{1}{p+1} - \int \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x}$$

quam ob rem habebimus

$$\int x^{p-1}\,dx\,lx.\sqrt{1-xx} = -\int x^{p-1}dx\sqrt{1-xx}\left(\frac{1}{p+1} + \int \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x}\right).$$

Hinc igitur ſequentia exempla notaſſe iuuabit.

Exemplum I. quo $p = 1$.

§. 36. Pro hoc igitur caſu poſtremus factor euadet, $\frac{1}{2} + l\,2$, ita vt ſit

$$\int dx\,lx.\sqrt{1-xx} = -\left(\tfrac{1}{2} + l\,2\right)\int dx\sqrt{1-xx}.$$

Pro formula autem $\int dx\sqrt{1-xx}$ ſtatuatur $\sqrt{1-xx} = 1 - vx$ fietque $x = \frac{2v}{1+vv}$ et $\sqrt{1-xx} = \frac{1-vv}{1+vv}$ atque $dx = \frac{2dv(1-vv)}{(1+vv)^2}$ vnde fiet $dx\sqrt{1-xx} = \frac{2dv(1-vv)^2}{(1+vv)^3}$, cuius integrale reſoluitur in has partes: $\frac{2v}{(1+vv)^2} - \frac{v}{1+vv} + \text{A tang.}\,v$; quae expreſſio, cum extendi debeat ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$, prior terminus erit $v = 0$, alter vero terminus eſt $v = 1$; ita vt integrale illud a $v = 0$ vsque ad $v = 1$ extendi debeat. At vero illa expreſſio ſponte euaneſcit poſito $v = 0$, facto autem $v = 1$, valor integralis erit $= \frac{\pi}{4}$, quam ob rem habebimus

$$\int dx\,lx.\sqrt{1-xx}\left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right] = -\frac{\pi}{4}\left(\tfrac{1}{2} + l\,2\right).$$

§. 37. Hic quidem calculum per longas ambages euoluimus, prouti reductio ad rationalitatem formulae $\sqrt{1-xx}$ manuduxit; at vero ſolus aſpectus formulae $\int dx\sqrt{1-xx}$ ſtatim declarat, eam exprimere aream quadrantis circuli, cuius radius $= 1$, quem nouimus eſſe $= \frac{\pi}{4}$. Caeterum adhiberi potuiſſet iſta reductio:

$$\int dx\sqrt{1-xx} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-xx} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$$

cuius va[illegible] ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſus manifeſto dat $\frac{\pi}{4}$.

Exemplum II. quo $p = 2$.

§. 38. Hoc ergo casu postremus factor fit

$$\frac{1}{3} + \int \frac{x\,dx}{1+x} = \frac{4}{3} - l\,2$$

sicque habebimus

$$\int x\,dx\,lx.\sqrt{1-xx} = -\left(\tfrac{4}{3} - l\,2\right)\int x\,dx\sqrt{1-xx}$$

perspicuum autem est esse

$$\int x\,dx\sqrt{1-xx} = C - \tfrac{1}{3}(1-xx)^{\frac{3}{2}}$$

qui valor ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensus praebet $\frac{1}{3}$, ita vt habeamus

$$\int x\,dx\,lx.\sqrt{1-xx}\left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right] = -\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{4}{3} - l\,2\right).$$

III. Euolutio casus quo $m = 1$ et $n = 3$.

§. 39. Hoc igitur casu erit $X = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$, vnde theorema generale nobis praebet hanc aequationem:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx\,lx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \cdot \int \frac{x^{p-1}(x-1)\,dx}{1-x^3}$$

vbi postrema formula reducitur ad hanc: $-\int \frac{x^{p-1}\,dx}{xx+x+1}$, ita vt habeamus

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx\,lx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = -\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \cdot \int \frac{x^{p-1}\,dx}{xx+x+1}$$

sequentia igitur exempla adiungamus.

Exemplum I. quo $p = 1$.

§. 40. Hoc igitur casu postremus factor euadit $\int \frac{dx}{xx+x+1}$, cuius integrale indefinitum reperitur $\frac{2}{\sqrt{3}}\,A\,tg.\frac{x\sqrt{3}}{2+x}$ qui valor posito $x = 1$ abit in $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; quocirca hoc casu habe-

habebimus

$$\int \frac{dxx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \int \frac{dx\,lx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

at vero formula integralis $\int \frac{dx^4}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$ peculiarem quantitatem tranſcendentem inuoluit, quam neque per logarithmos, neque per arcus circulares explicare licet.

Exemplum II. quo $p = 2$.

§. 41. Hoc igitur caſu poſtremus factor erit $\int \frac{xdx}{1+x+xx}$ qui in has partes reſoluatur:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2xdx + dx}{1+x+xx} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x+xx}$$

vbi partis prioris integrale eſt

$$\tfrac{1}{2}l(1+x+xx) = \tfrac{1}{2}l\,3 \text{ (poſito ſcilicet } x = 1)$$

alterius vero partis integrale eſt $-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, quo valore ſubſtituto habebimus

$$\int \frac{xdx\,lx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = -\tfrac{1}{2}\left(l\,3 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.$$

Nunc vero iſtam formulam integralem commode aſſignare licet per reductionem ſupra initio indicatam; cum enim hic ſit $m = 1$ et $n = 3$, tum vero ſumſerimus $p = 2$, erit $p = n - m$. Supra autem §. 15. inuenimus, hoc caſu integrale fore $= \frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\frac{m\pi}{n}}$, qui valor noſtro caſu abit in $\frac{\pi}{3\,\text{ſin.}\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Hoc igitur valore ſubſtituto noſtram formulam per meras quantitates cognitas exprimere poterimus, hoc modo:

$$\int \frac{xdx\,lx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \left[\begin{matrix}\text{ab } x = 0\\ \text{ad } x = 1\end{matrix}\right] = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left(l\,3 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

IV. Euolutio casus quo $m = 2$ et $n = 3$.

§. 42. Hoc igitur casu erit $X = \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - x^3)}}$ vnde theorema generale praebet istam aequationem:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx\,lx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{x^{p-1}(xx-1)\,dx}{1-x^3}.$$

vbi forma postrema transmutatur in hanc: $-\int \frac{x^{p-1}dx(1+x)}{1+x+xx}$; vnde fiet

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx\,lx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = -\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{x^{p-1}\,dx(1+x)}{1+x+xx}$$

vnde sequentia exempla expediamus.

Exemplum I. quo $p = 1$.

§. 43. Hoc ergo casu membrum postremum erit $\int \frac{dx(1+x)}{1+x+xx}$, cuius integrale in has partes distribuatur:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx + dx}{1+x+xx} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x+xx}$$

vnde manifesto pro casu $x = 1$ prodit $\frac{1}{2}(l3 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}})$; quamobrem nostra aequatio erit

$$\int \frac{dx\,lx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\frac{1}{2}(l3 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}.$$

In hac autem formula integrali, ob $m = 2$ et $n = 3$, quia sumsimus $p = 1$, erit $p = n - m$; pro hoc ergo casu per §. 15. valor istius formulae absolute exprimi poterit, eritque $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; consequenter etiam hoc casu per quantitates absolutas consequimur hanc formam:

$$\frac{dx\,lx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right] = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}(l3 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}).$$

§. 44. Quodsi hanc formam cum postrema casus praecedentis, quae itidem absolute prodiit expressa, combinemus,

nemus, earum summa primo dabit

$$\int \frac{x\,dx\,lx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} + \int \frac{dx\,lx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = -\frac{2\pi l3}{3\sqrt{3}}$$

sin autem posterior a priore subtrahatur, orietur ista aequatio:

$$\int \frac{x\,dx\,lx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} - \int \frac{dx\,lx}{\sqrt[3]{(1-x)^3}} = \frac{2\pi\pi}{27}.$$

Quoniam hoc modo ad expressiones satis simplices sumus perducti, operae pretium erit ambas aequationes sub alia forma repraesentare, qua binae partes integrales commode in vnam coniungi queant; statuamus scilicet $\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = z$, vnde fit $\frac{xx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = zz$, sicque prior formula induet hanc speciem: $\int \frac{zz\,dx\,lx}{x}$, posterior vero istam: $\int \frac{z\,dx\,lx}{x}$; tum vero habebimus $\frac{x^3}{1-x^3} = z^3$, vnde fit $x^3 = \frac{z^3}{1+z^3}$, ideoque

$$lx = lz - \tfrac{1}{3} l(1+z^3) = l\frac{z}{\sqrt[3]{(1+z^3)}}$$

hincque porro

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} - \frac{zz\,dz}{1+z^3} = \frac{dz}{z(1+z^3)}$$

quare his valoribus adhibitis prior formula integralis euadit $\int \frac{z\,dz}{1+z^3} . l\frac{z}{\sqrt[3]{(1+z^3)}}$; altera vero formula erit $\int \frac{dz}{1+z^3} . l\frac{z}{\sqrt[3]{(1+z^3)}}$.

§ 45. Quoniam autem integralia ab $x=0$ ad $x=1$ extendi debent, notandum est, casu $x=0$ fieri $z=0$, at vero casu $x=1$ prodire $z=\infty$, ita vt nouas istas formas a $z=0$ ad $z=\infty$ extendi oporteat. Quo obseruato prior harum formularum dabit

$$\int \frac{z\,dz}{1+z^3} . l\frac{z}{\sqrt[3]{(1+z)^3}} \left[\begin{matrix} a\ z=0 \\ ad\ z=\infty \end{matrix}\right] = -\frac{\pi l3}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi\pi}{27}$$

posterior vero

$$\int \frac{dz}{1+z^3} . l\frac{z}{\sqrt[3]{(1+z^3)}} \left[\begin{matrix} a\ z=0 \\ ad\ z=\infty \end{matrix}\right] = -\frac{\pi l3}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi\pi}{27}.$$

Hinc igitur summa harum formularum erit

$$\int \frac{dz(1+z)}{1+z^3} . l\frac{z}{\sqrt[3]{(1+z^3)}} = -\frac{2\pi l3}{3\sqrt{3}}$$

 at

at vero differentia

$$\int \frac{dz(z-1)}{1+z^2} \cdot l \frac{z}{\sqrt[3]{(1+z^3)}} = \frac{2\pi\pi}{27}.$$

§. 46. Hic non inutile erit obferuaffe, iftum logarithmum $l \frac{z}{\sqrt[3]{(1+z^3)}}$ commode in feriem infinitam fatis fimplicem conuerti poffe; cum enim fit

$$l \frac{z}{\sqrt[3]{(1+z^3)}} = \frac{1}{3} l \frac{z^3}{1+z^3} = -\frac{1}{3} l \frac{1+z^3}{z^3}$$

erit per feriem

$$l \frac{z}{\sqrt[3]{1+z^3}} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z^6} + \frac{1}{3z^9} - \frac{1}{4z^{12}} + \frac{1}{5z^{15}} \text{ etc.}\right)$$

verum ifta refolutio nullum vfum praeftare poteft ad integralia haec per feries euoluenda, propterea quod poteftates ipfius z in denominatoribus occurrunt, ideoque fingulae partes non ita integrari poffunt, vt euanefcant pofito $z = 0$.

Exemplum II. quo $p = 2$.

§. 47. Hoc igitur cafu factor poftremus euadit $\int \frac{xdx(1+x)}{1+x+xx}$, qui in has duas partes difcerpitur: $\int dx - \int \frac{dx}{1+x+xx}$, cuius ergo integrale ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenfum eft $= 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. Hinc igitur deducimur ad hanc aequationem:

$$\int \frac{xdx\,lx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = -\left(1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}.$$

Hic autem notandum iftam formulam integralem nullo modo abfolute exhiberi poffe, fed peculiarem quandam quantitatem tranfcendentem inuoluere.

V. Euolutio cafus, quo $m = 2$ et $n = 4$.

§. 48. Hoc igitur cafu erit $X = \frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}}$, vnde theorema noftrum generale nobis dabit hanc aequationem

$$\int \frac{x^{p-1}dx\,lx}{\sqrt{(1-x^4)}} = -\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{x^{p-1}dx}{1+xx}$$

at

at vero problema particulare prius pro hoc caſu praebet
$\int \frac{x^3 dx lx}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{2}\int \frac{x^3 dx}{1+xx}$. Cum autem ſit
$\int \frac{x^3 dx}{1+xx} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} l 2$, erit abſolute

$$\int \frac{x^3 dx lx}{\sqrt{(1-x^4)}} \left[\begin{matrix} ab & x=0 \\ ad & x=1 \end{matrix} \right] = -\frac{1}{4}(1 - l 2)$$

at vero hic caſus congruit cum ſupra §. 28. tractato. Si enim hic ponamus $xx=y$, quo facto termini integrationis manent $y=0$ et $y=1$, erit $lx=\frac{1}{2}ly$ et $xdx=\frac{1}{2}dy$; quibus valoribus ſubſtitutis noſtra aequatio abibit in hanc formam: $\frac{1}{4}\int \frac{ydyly}{\sqrt{1-yy}} = -\frac{1}{4}(1 - l 2)$ ſiue $\int \frac{ydy}{\sqrt{(1-yy)}} = l 2 - 1$, prorſus vt ſupra.

§. 49. Alterum vero theorema particulare ad praeſentem caſum accommodatum dabit
$\int \frac{xdx lx}{\sqrt{(1-x^4)}} = -\frac{\pi}{4}\int \frac{xdx}{1+xx}$; eſt vero
$\int \frac{xdx}{1+xx} = l\sqrt{1+xx} = \frac{1}{2} l 2$
ita vt habeamus

$$\int \frac{xdx lx}{\sqrt{(1-x^4)}} \left[\begin{matrix} ab & x=0 \\ ad & x=1 \end{matrix} \right] = -\frac{\pi}{8} l 2.$$

Quodſi vero hic vt ante ſtatuamus $xx=y$, obtinebitur $\int \frac{dyly}{\sqrt{1-yy}} = -\frac{\pi}{2} l 2$, qui eſt caſus ſupra §. 26. tractatus. His duobus caſibus exponens p erat numerus par, vnde caſus impares euolui conueniet.

Exemplum I. quo $p=1$.

§. 50. Hoc igitur caſu formula integralis poſtrema fiet $\int \frac{dx}{1+xx} = A$ tang. x, ita vt poſito $x=1$ prodeat $\frac{\pi}{4}$; tum vero aequatio noſtra erit, $\int \frac{dxlx}{\sqrt{(1-x^4)}} = -\frac{\pi}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, integralibus ſcilicet ab $x=0$ ad $x=1$ extenſis; vbi formula $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ arcum curuae elaſticae rectangulae exprimit, ideoque abſolute exhiberi nequit.

Exemplum II. quo $p = 3$.

§. 51. Hoc ergo caſu formula integralis poſtrema erit $\int \frac{xxdx}{1+xx} = \int dx - \int \frac{dx}{1+xx}$, cuius integrale poſito $x = 1$ fit $= 1 - \frac{\pi}{4}$, ita vt nunc aequatio noſtra euadat

$$\int \frac{xxdxlx}{\sqrt{(1-x^4)}} = -\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

quae formula integralis pariter abſolute exhiberi nequit; exprimit enim applicatam curuae elaſticae rectangulae.

§. 52. Quanquam autem haec duo exempla ad formulas inextricabiles perduxerunt, tamen iam pridem demonſtraui, productum horum duorum integralium $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} . \int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ aequari areae circuli, cuius diameter $= 1$, ſiue eſſe $= \frac{\pi}{4}$; quam ob rem, binis exemplis coniungendis, hoc inſigne theorema adipiſcimur $\int \frac{dxlx}{\sqrt{(1-x^4)}} . \int \frac{xxdxlx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi^2}{16}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. Facile autem patet, innumera alia huiusmodi theoremata ex hoc fonte hauriri poſſe, quae, per ſe ſpectata, profundiſſimae indaginis ſunt cenſenda.

DE

DE VALORE
FORMVLAE INTEGRALIS

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{lx} \cdot \frac{(1-x^b)(1-x^c)}{1-x^n}$$

A TERMINO $x=0$ VSQVE AD $x=1$ EXTENSAE.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Quae non ita pridem de integratione eiusmodi formularum differentialium, in quarum denominatore occurrit lx, in medium attuli, vbi ostendi, valorem huius formulae integralis: $\int \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{lx} dx$ ab $x=0$ ad $x=1$ extensum esse $= l\frac{a}{b}$, non solum summa attentione digna, sed etiam quasi nouum campum in methodo integrandi aperire sunt visa; propterea quod huiusmodi formularum integratio prorsus singularia artificia postulat, at ex principiis etiam nunc parum cognitis erat deducta. Tunc quidem temporis ista inuestigatio non admodum late patere videbatur, dum praeter formulam modo allegatam ad paucas alias eam mihi quidem extendere licuit; nunc autem, postquam hoc argumentum accuratius sum perscrutatus, deprehendi, formulam multo generaliorem, eam scilicet quae hic in titulo conspicitur, pari successu expediri posse. Quin etiam methodus, quam hic sum expositurus, etiam ad formulas adhuc generaliores facile extendi potest; vnde haud contemnenda incrementa in vniuersam Analysin redundare videntur.

§. 2. Deſignemus igitur littera S valorem formulae propoſitae, quem ſcilicet induit, ſi eius integratio a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extendatur, ita vt ſit

$$S = \int \frac{x^{a-1}\,dx}{lx} \cdot \frac{(1-x^b)(1-x^c)}{1-x^n} \left[\begin{array}{l} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{array}\right]$$

ad quem valorem inueſtigandum ante omnia obſeruari conuenit, fractionem $\frac{(1-x^b)(1-x^c)}{1-x^n}$ ita eſſe comparatam, vt poſito $x = 1$ penitus euaneſcat. Cum enim in numeratore tam $(1-x^b)$ quam $(1-x^c)$ factorem $(1-x)$ inuoluat, ideoque totus numerator factorem habeat $(1-x)^2$, dum in denominatore tantum factor ſimplex $1-x$ ineſt, euidens eſt, poſito $x = 1$ totam fractionem euaneſcere debere, id quod etiam inde intelligitur, quod caſu $x = 1$ tam numerator quam denominator euaneſcit; vnde, ſi iuxta regulam notiſſimam tam loco numeratoris, qui euolutus eſt $1 - x^b - x^c + x^{b+c}$, quam loco denominatoris vtriusque differentialia ſcribantur, prodit iſta fractio:

$$\frac{-b\,x^{b-1} - c\,x^{c-1} + (b+c)\,x^{b+c-1}}{-n\,x^{n-1}}$$

illi aequalis caſu $x = 1$, poſito autem $x = 1$, iſta fractio abit in hanc: $\frac{-b-c+b+c}{-n}$, quae manifeſto eſt $= 0$.

§. 3. Cum numerator fractionis modo conſideratae ſit $1 - x^b - x^c + x^{b+c}$, ſi is per $1 - x^n$ diuidatur, ex quaternis terminis orientur quatuor ſequentes ſeries geometricae infinitae:

I. $1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + x^{4n} + x^{5n} + \text{etc.}$

II. $-x^b - x^{n+b} - x^{2n+b} - x^{3n+b} - x^{4n+b} - x^{5n+b} - \text{etc.}$

III. $-x^c - x^{n+c} - x^{2n+c} - x^{3n+c} - x^{4n+c} - x^{5n+c} - \text{etc.}$

IV. $x^{b+c} + x^{n+b+c} + x^{2n+b+c} + x^{3n+b+c} + x^{4n+b+c} + x^{5n+b+c} + \text{etc.}$

Harum

Harum igitur ferierum fingulos terminos duci oportet in formulam $\frac{x^{a-1}\,dx}{lx}$; tum enim omnium integralia, ab $x=0$ ad $x=1$ extenfa, fi in vnam fummam colligantur, dabunt valorem quaefitum littera S defignatum.

§. 4. Hoc ergo modo totum negotium reducitur ad integrationem talis formulae: $\frac{x^m\,dx}{lx}$, ab $x=0$ ad $x=1$ extendendam. Haec autem formula continet fundamentum principale, vnde omnia, quae olim de hoc argumento fum commentatus, funt deducta; tum autem ad eius integrale inueniendum vfus fum doctrina circa functiones duarum variabilium verfante, quam ad praefens inftitutum non fatis commode applicare liceret; quamobrem hic aliam methodum in medium fum allaturus, cuius beneficio ifta integratio, qua indigemus, multo facilius et clarius inftitui poterit, et qua fimul omnia, quae huc pertinent, haud mediocriter illuftrabuntur.

§. 5. Cum fit $lx^m = m\,lx$, fi littera e denotet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus vnitati aequatur, pofito breuitatis gratia $m\,lx = y$ erit $lx^m = y = y\,le$, hincque viciffim fiet $x^m = e^y = e^{m\,lx}$. Cum igitur per feriem notiffimam fit

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{yy}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

erit pro noftro cafu

$$x^m = 1 + \frac{m\,lx}{1} + \frac{mm}{1.2}(lx)^2 + \frac{m^3}{1.2.3}(lx)^3 + \frac{m^4}{1.2.3.4}(lx)^4 + \text{etc.}$$

hac igitur ferie in vfum vocata erit

$$\frac{x^m}{lx} = \frac{1}{lx} + \frac{m}{1} + \frac{mm}{1.2}lx + \frac{m^3}{1.2.3}(lx)^2 + \frac{m^4}{1.2.3.4}(lx)^3 + \frac{m^5}{1.2.3.4.5}(lx)^4 + \text{etc.}$$

Huius igitur feriei fingulos terminos in dx ductos integrari oportet, vnde quidem ex termino primo orietur formula $\int\frac{dx}{lx}$, cuius valorem, ab $x=0$ ad $x=1$ extenfum, effe infi-

infinitum oſtendi, cuius loco hic vbique ſcribamus characterem Δ ..m vero ex termino ſecundo oritur integrale $\frac{m}{1} x = m$.

§. 6. Pro integralibus ex reliquis terminis oriundis ex elementis calculi integralis ſatis liquet, ſi integralia ab $x = 0$ ad $x = 1$ extendantur, fore vt ſequitur:

$$\int dx\, lx = -1;\ \int dx (lx)^2 = +1.2;\ \int dx (lx)^3 = -1.2.3;$$
$$\int dx (lx)^4 = +1.2.3.4;\ \int dx (lx)^5 = -1.2.3.4.5 \text{ etc.}$$

his igitur valoribus ſubſtitutis reperiemus fore

$$\int \frac{x^m\, dx}{lx} = \Delta + m - \frac{mm}{2} + \frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4} + \frac{m^5}{5} + \frac{m^6}{6} + \frac{m^7}{7} - \text{etc.}$$

Ex doctrina autem logarithmorum conſtat eſſe

$$l(1 + m) = m - \frac{mm}{2} + \frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4} + \text{etc.}$$

quo valore ſubſtituto habebimus

$$\int \frac{x^m\, dx}{lx} = \Delta + l(1 + m)$$

qui ergo eſt valor huius formulae integralis a termino $x = 0$ ad $x = 1$ extenſae, quos terminos in ſequentibus ſemper ſubintelligi oportet, vnde eos non amplius commemorabimus.

§. 7. Iſte quidem valor integralis inſigni incommodo laborare videtur, propterea quod characterem Δ implicat, cuius valor non ſolum eſt incognitus, ſed adeo infinitus; verum quia pro omnibus huiusmodi formulis perpetuo idem manet, ita vt ſit

$$\int \frac{x^n\, dx}{lx} = \Delta + l(1 + n)$$

euidens eſt, ſi harum formularum altera ab altera ſubtrahatur, iſtum characterem penitus ex calculo egredi, ac prodire $\int \frac{x^m - x^n}{lx} . dx = l\frac{1+m}{1+n}$, qui eſt ille ipſe caſus, ad quem

pri-

primo initio ſum perductus. Quo autem clarius appareat, quibusnam caſibus iſte character Δ penitus ex calculo ſit exceſſurus, contemplemur hanc formam indefinitam:

$$X = A x^{\alpha} + B x^{\beta} + C x^{\gamma} + D x^{\delta} + E x^{\varepsilon} + \text{etc.}$$

ac per integrale illud inuentum erit

$$\int \frac{X\,dx}{lx} = A + B\,\Delta + C\,\Delta + D\,\Delta + \text{etc.}$$
$$+ A\,l(1+\alpha) + B\,l(1+\beta) + C\,l(1+\gamma) + D\,l(1+\delta) + \text{etc.}$$

Quocirca, ſi coefficientes A, B, C, D etc. ita fuerint comparati, vt ſit $A + B + C + D + \text{etc.} = 0$, ſemper iſtud integrale ita exprimetur:

$$\int \frac{X\,dx}{lx} = A\,l(1+\alpha) + B\,l(1+\beta) + C\,l(1+\gamma) + D\,l(1+\delta) + \text{etc.}$$

perinde ac ſi formula canonica fuiſſet $\int \frac{x^m\,dx}{lx} = l(1+m)$, reiecto charactere Δ.

§. 6. Quoties igitur fuerit

$$X = A x^{\alpha} + B x^{\beta} + C x^{\gamma} + D x^{\delta} + \text{etc.}$$

exiſtente $A + B + C + D + \text{etc.} = 0$, tum integrale $\int \frac{X\,dx}{lx}$, non amplius charactere Δ inquinabitur, atque ſingulas integrationes ita inſtituere licebit, quaſi reuera foret

$$\int \frac{x^m\,dx}{lx} = l(1+m).$$

Cum igitur ſeries $A + B + C + D + \text{etc.}$ exhibeat valorem ipſius X, ſi ponatur $x = 1$, manifeſtum eſt, iſtam integrationem perpetuo ſuccedere, ſi X eiusmodi exprimat functionem ipſius x, vt poſito $x = 1$ ea in nihilum abeat. Quare cum formula, quam hic tractare ſuſcepimus

$$X = \frac{x^{a-1}(1-x^b)(1-x^c)}{1-x^n}$$

vti iam obſeruauimus ad nihilum redigitur poſito $x = 1$, eius integrationem rite abſoluere licebit ope formulae canonicae $\int \frac{x^n\,dx}{lx} = l(1+m)$, nullo ſcilicet reſpectu habito ad characterem Δ initio introductum.

§. 9. Quoniam igitur iam ſupra perducti ſumus ad quatuor ſeries infinitas, quas per formulam $\frac{x^{n-1}dx}{lx}$ multiplicari, tum vero integrari oportet, ſi hanc operationem in ſingulis terminis inſtituamus, valor quaeſitus S per ſequentes quatuor ſeries infinitas expreſſus reperietur:

$$S = \begin{cases} \text{I. } la + l(a+n) + l(a+2n) + l(a+3n) + l(a+4n) + \text{etc.} \\ \text{II. } -l(a+b) - l(a+b+n) - l(a+b+2n) - l(a+b+3n) \\ \qquad - l(a+b+4n) - \text{etc.} \\ \text{III. } -l(a+c) - l(a+c+n) - l(a+c+2n) - l(a+c+3n) \\ \qquad - l(a+c+4n) - \text{etc.} \\ \text{IV. } l(a+b+c) + l(a+b+c+n) + l(a+b+c+2n) + l(a+b+c+3n) \\ \qquad + l(a+b+c+4n) + \text{etc.} \end{cases}$$

Hoc igitur modo tota quaeſtio huc eſt reducta, vt expreſſiones finitae inueſtigentur, quae iſtis logarithmorum ſeriebus infinitis ſint aequales.

§. 10. Cum igitur valor quaeſitus S infinitis logarithmis aequalis ſit inuentus; eum ipſum tanquam logarithmum ſpectari conueniet; quamobrem ſtatuamus $S = lO$ atque a logarithmis ad numeros regrediendo valor ipſius O ſequenti modo per factores exprimi deprehendetur:

$$O = \frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)} \cdot \frac{(a+n)(a+b+c+n)}{(a+b+n)(a+c+n)} \cdot \frac{(a+2n)(a+b+c+2n)}{(a+b+2n)(a+c+2n)} \cdot \frac{(a+3n)(a+b+c+3n)}{(a+b+3n)(a+c+3n)} \text{ etc.}$$

quam expreſſionem in membra puncto ſeparata diſtinximus, quorum quodlibet continet binos factores in numeratore, totidemque in denominatore, qui factores in ſingulis membris ita ſunt comparati, vt ſumma factorum numeratoris ſemper aequalis ſit ſummae factorum denominatoris. Praeterea vero notetur, ſumendo i pro numero infinito membrum infiniteſimum eſſe $\frac{(a+in)(a+b+c+in)}{(a+b+in)(a+c+in)}$, quod euolutum praebet $\frac{a(a+b+c)+in(2a+b+c)+iinn}{(a+b)(a+c)+in(2a+b+c)+iinn}$, cuius valor ob partes primas finitas euaneſcentes manifeſto vnitati aequatur;

tur; vnde intelligitur, hanc expreſſionem valorem finitum ac determinatum eſſe habituram, et quo plura membra actu in ſe inuicem ducantur, eo propius continuo ad valorem ipſius O appropinquatum iri, quandoquidem membra ſatis remota continuo minus ab vnitate diſcrepant.

§. 11. Vt nunc in verum valorem litterae O inquiramus, in ſubſidium vocemus inſigne Lemma, cuius veritatem iam in calculo integrali fuſius demonſtraui, quod ita ſe habet: Si ponatur

$$P = \int x^{p-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}} \text{ et}$$

$$Q = \int x^{q-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$$

tum erit

$$\frac{P}{Q} = \frac{(m+p)q}{p(m+q)} \cdot \frac{(m+p+n)(q+n)}{(p+n)(m+q+n)} \cdot \frac{(m+p+2n)(q+2n)}{(p+2n)(m+q+2n)} \cdot \frac{(m+p+3n)(q+3n)}{(p+3n)(m+q+3n)} \text{ etc.}$$

quae expreſſio pariter ex infinitis membris conſtat, in quorum ſingulis tam numerator quam denominator etiam binis factoribus conſtat, prorſus vti noſtra expreſſio pro O inuenta, vnde haud difficulter litterae p, q et m ita definiri poterunt, vt prodeat $O = \frac{P}{Q}$, ſi quidem littera n vtrinque eundem ſignificatum retinet; hocque modo valor litterae O ſaltem ad formulas integrales ordinarias P et Q reducetur. Hic autem probe eſt recordandum, ſingulas litteras p, q, m et n numeros poſitiuos deſignare debere, id quod etiam de noſtris litteris a, b et c eſt tenendum, quandoquidem formula noſtra canonica $\int \frac{x^m dx}{lx} = l(1+m)$ cum veritate conſiſtere nequit, niſi $1+m$ fuerit numerus poſitiuus, quia alioquin logarithmi numerorum negatiuorum hinc prodeuntes forent imaginarii.

§. 12. Ad hanc conformitatem $\frac{P}{Q}$ et O conſtituendam ſufficiet membra prima, quae ſunt $\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}$ et $\frac{(m+p)q}{p(m+q)}$, ad

 iden-

identitatem perduxiſſe, propterea quod deinceps omnia ſequentia membra ſponte inter ſe conuenient. Iſta autem identitas duplici modo obtineri poterit: ſumto enim $q = a$ vel ſtatui poterit $m + q = a + b$ vel $m + q = a + c$, ita vt priori modo ſit $m = b$, poſteriori vero modo $m = c$; at vero tum pro priori modo erit $p = a + c$, vnde ſponte fiet $m + p = a + b + c$; pro poſteriori vero modo, quo $m = c$, ſumi debet $p = a + b$, vnde denuo ſponte fit $m + p = a + b + c$; quam ob rem hinc geminos valores pro p et q nanciſcemur, vnde etiam geminae ſolutiones orientur, quae ſunt:

$$\text{I. Solutio} \begin{cases} P = \int x^{a+c-1}\, dx\, (1 - x^n)^{\frac{b-n}{n}} \\ Q = \int x^{a-1}\, dx\, (1 - x^n)^{\frac{b-n}{n}} \end{cases}$$

$$\text{II. Solutio} \begin{cases} P = \int x^{a+b-1}\, dx\, (1 - x)^{\frac{c-n}{n}} \\ Q = \int x^{a-1}\, dx\, (1 - x)^{\frac{c-n}{n}} \end{cases}$$

vtrinque enim erit $O = \frac{P}{Q}$, et cum ſit $S = lO$, erit $S = lP - lQ$ ſicque valorem ipſius S per formulas finitas expreſſum invenimus.

§. 13. Circa valores autem litterarum p et q duos caſus imprimis memorabiles notari conuenit, quibus eos adeo abſolute exhibere licet: alter enim praebet

$$\text{I. } \int x^{n-1}\, dx\, (1 - x^n)^{\frac{m-n}{n}} = \frac{1}{m}$$

alter vero in hoc conſiſtit vt ſit

$$\text{II. } \int x^{n-m-1}\, dx\, (1 - x^n)^{\frac{m-n}{n}} = \frac{\pi}{n \operatorname{ſin.} \frac{m\pi}{n}}$$

vbi π denotat 180°, ſiue ſemiperipheriam circuli, cuius radius $= 1$. Quare cum pro noſtra ſolutione priore ſit

$m = b$

$m = b$, videamus, vtrum p et q ad iſtos valores abſolutos reducere liceat. Hoc autem euenit quando $b = c$ et inſuper $a = n - b$, quo caſu ambae ſolutiones inter ſe congruent, quem ergo caſum ſeorſim euoluiſſe operae pretium erit.

Euolutio caſus quo $c = b$ et $a = n - b$.

§. 14. Hoc igitur caſu erit formula propoſita

$$S = \int \frac{x^{n-b-1}\, dx}{lx} \cdot \frac{(1 - x^b)^2}{1 - x^n}$$

tum vero vidimus eſſe

$$P = \int x^{n-1}\, dx\, (1 - x^n)^{\frac{b-n}{n}} = \tfrac{1}{b} \text{ et}$$

$$Q = \int x^{n-b-1}\, dx\, (1 - x^n)^{\frac{b-n}{n}} = \frac{\pi}{n \,\text{ſin.}\, \frac{b\pi}{n}}$$

quam ob rem, cum ſit $S = lP - lQ = l\frac{P}{Q}$, erit his valoribus ſubſtitutis $S = l\frac{n \,\text{ſin.}\, \frac{b\pi}{n}}{b\pi}$, vbi euidens eſt eſſe debere $b < n$, vnde ſequentia exempla conſideraſſe iuuabit.

Exemplum I. quo $b = 1$ et $n = 2$.

§. 15. Hoc ergo caſu erit $\text{ſin.} \frac{b\pi}{n} = 1$, hincque $S = l\frac{2}{\pi}$ quam ob rem, ſi formula propoſita fuerit $S = \int \frac{dx}{lx} \cdot \frac{(1-x)}{1+x}$; erit $S = l\frac{2}{\pi}$; at vero valorem ipſius S per logarithmos euoluendo, vti ſupra fecimus, ob $a = 1$; $b = c = 1$ et $n = 2$ prodibit

$$S = \begin{cases} l1 + l3 + l5 + l7 + l9 + l11 + \text{etc.} \\ -2l2 - 2l4 - l2l6 - 2l8 - 2l10 - \text{etc.} \\ +l3 + l5 + l7 + l9 + l11 + l12 + \text{etc.} \end{cases}$$

quibus in ordinem redactis erit

$$S = l1 - 2l2 + 2l3 - 2l4 + 2l5 - 2l6 + 2l7 - 2l8 + 2l9 \text{ etc.}$$

§. 16. Viciſſim igitur, ſi proponatur iſta ſeries logarithmorum:

$$s = l\,1 - l\,2 + l\,3 - l\,4 + l\,5 - l\,6 + l\,7 \text{ etc.}$$

eius ſumma aſſignari poterit. Cum enim ſit $S - 2s = -l\,1 = 0$, ob $S = l\frac{2}{\pi}$ erit $s = \frac{1}{2} l \frac{2}{\pi} = l\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; ſiue cum ſit $\pi > 2$ erit $s = -l\sqrt{\frac{\pi}{2}}$: iſta ſcilicet ſumma s erit negatiua.

Exemplum II. quo $b = 1$ et $n = 3$.

§. 17. Hoc igitur caſu, quo $a = 2$, formula integranda propoſita erit

$$S = \int \frac{x\,dx}{lx} \cdot \frac{(1-x)^2}{1-x^3} = \int \frac{x\,dx}{lx} \cdot \frac{1-x}{1+x+xx}$$

deinde cum ſit ſin. $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, valor quaeſitus erit $S = l\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; at vero idem valor S per ſeriem logarithmorum expreſſus ob $a = 2$; $b = c = 1$ et $n = 3$ erit

$$S = \begin{cases} l\,2 + l\,5 + l\,8 + l\,11 + l\,14 + l\,17 + \text{etc.} \\ -2l\,3 - 2l\,6 - 2l\,9 - 2l\,12 - 2l\,15 - \text{etc.} \\ +l\,4 + l\,7 + l\,10 + l\,13 + l\,16 + l\,19 + \text{etc.} \end{cases}$$

ſicque ergo erit

$$S = l\,2 - 2l\,3 + l\,4 + l\,5 - 2l\,6 + l\,7 + l\,8 - 2l\,9 + l\,10 + l\,11 - 2l\,12 + l\,13 + l\,14 \text{ etc.}$$

cuius ergo ſeriei ſatis regularis ſumma eſt $S = l\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

Exemplum III. quo $b = 2$ et $n = 3$.

§. 18. Hoc igitur caſu erit $a = 1$ et formula noſtra integralis fiet

$$S = \int \frac{dx}{lx} \cdot \frac{(1-xx)^2}{1-x^3} = \int \frac{dx}{lx} \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{1+x+xx}$$

cuius ergo valor erit $S = l\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; at vero idem valor S per ſeriem logarithmorum expreſſus ob $a = 1$, $b = c = 2$ et $n = 3$ erit

$$S = \begin{cases} l\,1 + l\,4 + l\,7 + l\,10 + l\,13 + \text{etc.} \\ -2l\,3 - 2l\,6 - 2l\,9 - 2l\,12 - \text{etc.} \\ +l\,5 + l\,8 + l\,11 + l\,14 + \text{etc.} \end{cases}$$

ſic-

ſicque ergo erit

$$S = l1 - 2l3 + l4 + l5 - 2l6 + l7 + l8 - 2l9 + l10 + l11 \text{ etc.}$$

cuius ſeriei ſumma eſt $S = l\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; vnde cum ſit $S = l\frac{P}{Q}$ erit

$$\frac{P}{Q} = \frac{1.3}{3.3} \cdot \frac{4.8}{6.6} \cdot \frac{7.11}{9.9} \cdot \frac{10.14}{12.12} \text{ etc.}$$

cuius ergo valor erit $= \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Exemplum VI. quo $b = 1$ et $n = 4$.

§. 19. Hinc ergo ob $a = 3$ formula noſtra integralis erit

$$S = \int \frac{xx\,dx}{lx} \cdot \frac{(1-x)^2}{1-x^4} = \int \frac{xx\,dx}{lx} \cdot \frac{(1-x)}{(1+x)(1+xx)}$$

cuius ergo valor erit $= l\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$; at vero idem valor per ſeriem logarithmorum ob $a = 2$, $b = c = 1$ et $n = 4$ hoc modo exprimetur:

$$S = \begin{cases} l3 + l7 + l11 + l15 + \text{etc.} \\ -2l4 - 2l8 - 2l12 - \text{etc.} \\ +l5 + l9 + l13 + \text{etc.} \end{cases}$$

hincque ergo erit

$$\frac{P}{Q} = \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \frac{11.13}{12.12} \text{ etc.} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

Exemplum V. quo $b = 3$ et $n = 4$.

§. 20. Hoc ergo caſu erit $a = 1$, et formula noſtra integralis fiet $S = \int \frac{dx}{lx} \cdot \frac{(1-x^3)^2}{1-x^4}$, cuius valor erit $S = l\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}$ qui etiam hoc modo per ſeriem logarithmorum exprimetur:

$$S = \begin{cases} l1 + l5 + l9 + l13 + l17 + \text{etc.} \\ -2l4 - 2l8 - 2l12 - 2l16 - \text{etc.} \\ +l7 + l11 + l15 + l19 + \text{etc.} \end{cases}$$

hinc ergo fiet

$$\frac{P}{Q} = \frac{1.7}{4.4} \cdot \frac{5.11}{8.8} \cdot \frac{9.15}{12.12} \cdot \frac{13.19}{16.16} \text{ etc.} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}.$$

§. 21. Praeter hos autem casus, quibus ambas formulas P et Q simul integrationem admittere obseruauimus, pro certo affirmare licet, nullos alios insuper dari, quibus hoc eueniat. Interim tamen dantur innumerabiles alii casus, quibus valor nostrae formulae integralis S absolute sine formulis integralibus assignari potest, etiamsi neutra formularum P et Q seorsim integrari queat, qui casus cum per se sint notatu dignissimi, iis inuestigandis sequens problema destinemus.

Problema.

Inuestigare casus, quibus formulae integralis propositae valorem S absolute sine formulis integralibus exprimere licet.

Solutio.

§. 22. Totum ergo negotium huc redit, vt eiusmodi relationes inter exponentes a, b, c et n eruantur, quibus fractio supra adhibita $\frac{P}{Q}$ absolute exprimi queat, quamuis neutra harum formularum seorsim integrationem admittat; tum enim formulae propositae valor quaesitus erit $S = l\frac{P}{Q}$. Verum istam fractionem $\frac{P}{Q}$ vidimus designare istud productum in infinitum excurrens

$$\frac{P}{Q} = \frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)} \cdot \frac{(a+n)(a+b+c+n)}{(a+b+n)(a+c+n)} \cdot \frac{(a+2n)(a+b+c+2n)}{(a+b+2n)(a+c+2n)} \text{ etc.}$$

§. 23. Nunc vero meminisse iuuabit, tam sinus quam cosinus angulorum per huiusmodi producta infinita exprimi solere; cum enim sit

$$\text{sin.} \frac{p\pi}{2r} = \frac{p\pi}{2r} \cdot \frac{4rr-pp}{4rr} \cdot \frac{16rr-pp}{16rr} \cdot \frac{36rr-pp}{36rr} \text{ etc.}$$

erit duabus huiusmodi expressionibus combinandis

$$\frac{\text{sin.} \frac{p\pi}{2r}}{\text{sin.} \frac{q\pi}{2r}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{4rr-pp}{4rr-qq} \cdot \frac{16rr-pp}{16rr-qq} \cdot \frac{36rr-pp}{36rr-qq} \cdot \frac{64rr-pp}{64rr-qq} \text{ etc.}$$

Quare si superior expressio pro $\frac{P}{Q}$ inuenta ad hanc formam reuo-

reuocari queat, tum vtique erit

$$S = l\,\text{fin.}\,\frac{p\pi}{2r} - l\,\text{fin.}\,\frac{q\pi}{2r}.$$

Quo autem ista reductio facilius succedat, posteriorem expressionem hac forma repraesentemus:

$$\frac{\text{fin.}\,\frac{p\pi}{2r}}{\text{fin.}\,\frac{q\pi}{2r}} = \frac{p(2r-p)}{q(2r-q)} \cdot \frac{(2r+p)(4r-p)}{(2r+q)(4r-q)} \cdot \frac{(4r+p)(6r-p)}{(4r+p)(6r-q)} \text{ etc.}$$

cuius expressionis membra manifesto ita progrediuntur, vt singuli factores tam numeratorum quam denominatorum continuo eodem incremento $2r$ augeantur. Quare cum in expressione $\frac{P}{Q}$ singuli factores capiant incrementum n, statui debebit $n = 2r$, quo notato sufficiet prima membra ad conformitatem redigere, id quod eueniet sumendo $a = p$; $a + b + c = 2r - p$; $a + b = q$; $a + c = 2r - q$ vnde singulae litterae colliguntur

$$1^\circ.\ a = p;\quad 2^\circ.\ b = q - p;\quad 3^\circ.\ c = 2r - p - q$$

existente $n = 2r$. Hinc autem operae pretium erit notasse, fore $2a + b + c = 2r = n$; ita vt formula nostra generalis ad casum hunc semper accommodari queat, si modo fuerit $n = 2a + b + c$: tum enim fit $p = a$; $q = a + b$ et $2r = 2a + b + c$.

§. 24. Quodsi vero formula nostra generalis euoluatur ac loco n scribatur iste valor $2a + b + c$, ea induet hanc formam:

$$S = \int \frac{dx}{x\,l\,x} \cdot \left(\frac{x^a - x^{a+b} - x^{a+c} + x^{a+b+c}}{1 - x^{2a+b+c}} \right)$$

cuius ergo valor si loco p, q et r modo inuenti valores scribantur, erit

$$S = l\,\frac{P}{Q} = l\,\text{fin.}\,\frac{a\pi}{2a+b+c} - l\,\text{fin.}\,\frac{(a+b)\pi}{2a+b+c}$$

quae formula vtique ita est absoluta, vt nullam amplius formulam integralem inuoluat, prorsus vti desideratur. Patet

tet igitur casum ante tractatum in hoc casu non contineri: cum enim in illo fuisset $a = n - b$ et $c = b$, hinc fiet $2a + b + c = 2n$, cum praesenti casu sit $2a + b + c = n$.

§. 25. Quodsi iam in hac expressione litteras p, q et r in calculum introducamus, formula nostra integralis ad hanc speciem reducetur:

$$S = \int \frac{dx}{x\,lx} \cdot \frac{x^p - x^q - x^{2r-q} + x^{2r-p}}{1 - x^{2r}}$$

cuius igitur valor ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensus erit

$$S = l\ \text{sin.}\ \tfrac{p\pi}{2r} - l\ \text{sin.}\ \tfrac{q\pi}{2r}$$

vbi manifestum est, hanc expressionem eandem manere, etiamsi loco p scribatur $2r - p$, loco q vero $2r - q$; propterea quod

$$\text{sin.}\ \tfrac{(2r-p)\pi}{2r} = \text{sin.}\ \tfrac{p\pi}{2r} \text{ et sin.}\ \tfrac{(2r-q)\pi}{2r} = \text{sin.}\ \tfrac{q\pi}{2r}$$

at vero ipsa formula integralis, facta siue alterutra substitutione, siue vtraque coniunctim, prorsus non variatur.

§. 26. Quodsi loco p et q scribamus $r - p$ et $r - q$ illi sinus transmutantur in cosinus; tum autem ipsa formula integralis erit

$$S = \int \frac{dx}{x\,lx} \cdot \frac{x^{r-p} - x^{r-q} - x^{r+q} + x^{r+p}}{1 - x^{2r}}$$

cuius valor nunc erit $= l\ \text{cos.}\ \frac{p\pi}{2r} - l\ \text{cos.}\ \frac{q\pi}{2r}$, vbi iterum manifestum est, nullam mutationem oriri, siue litterae p et q valores habeant positiuos siue negatiuos.

Corollarium I.

§. 27. Cum igitur his casibus neutra formularum integralium P et Q integrationem actu admittat, eo magis notatu dignum hic occurrit, quod nihilo minus valor fractionis $\frac{P}{Q}$ absolute exprimi possit, cum per sinus sit

$\frac{P}{Q} = \frac{\text{fin.}\,\frac{p\pi}{2r}}{\text{fin.}\,\frac{q\pi}{2r}}$. Cum igitur hoc cafu fit $a = p$; $b = q - p$; $c = 2r - p - q$ et $n = 2r$ valores, integrales pro P et Q fupra. §. 12. exhibiti in fequentes abibunt formas:

$$P = \int \frac{x^{2r-q-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p-q}{2r}}} \text{ et}$$

$$Q = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p-q}{2r}}}.$$

Quicunque ergo valores exponentibus tribuantur, femper erit $\frac{P}{Q} = \frac{\text{fin.}\,\frac{p\pi}{2r}}{\text{fin.}\,\frac{q\pi}{2r}}$.

Corollarium II.

§. 28. Quoniam hic loco p et q fcribere licet $2r-p$ et $2r-q$, hinc quaternas formulas integrales exhibere poffumus, ita vt pro fingulis fit $\frac{P}{Q} = \frac{\text{fin.}\,\frac{p\pi}{2r}}{\text{fin.}\,\frac{q\pi}{2r}}$, qui quaterni valores ita fe habebunt:

$$\text{I. } P = \int \frac{x^{2r-q-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p-q}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p-q}{2r}}}$$

$$\text{II. } P = \int \frac{x^{2r-q-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{2-\frac{p-q}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{2r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{2-\frac{p-q}{2r}}}$$

$$\text{III. } P = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{p+q}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{p+q}{2r}}}$$

$$\text{IV. } P = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{q-p}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{2r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{q-p}{2r}}}.$$

 Corol-

Corollarium III.

§. 29. Quodſi hic loco p et q ſcribamus $r-p$ et $r-q$, quo pacto ſinus in coſinus transmutantur, quaternas impetrabimus formulas integrales pro P et Q, ita comparatas, vt pro omnibus ſit $\frac{P}{Q} = \frac{\operatorname{cof.} \frac{p\pi}{2r}}{\operatorname{cof.} \frac{q\pi}{2r}}$, qui quaterni valores erunt:

$$\text{I. } P = \int \frac{x^{r+q-1}\, dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{q-p}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{r-p-1}\, dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{q-p}{2r}}}$$

$$\text{II. } P = \int \frac{x^{r+q-1}\, dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p+q}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{r+p-1}\, dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p+q}{2r}}}$$

$$\text{III. } P = \int \frac{x^{r-q-1}\, dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p-q}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{r-p-1}\, dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p-q}{2r}}}$$

$$\text{IV. } P = \int \frac{x^{r-q-1}\, dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p-q}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{r+p-1}\, dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p-q}{2r}}}.$$

quae quaternae formulae tam pulchre inter ſe conſpirant, vt aliter non diſcrepent, niſi ratione ſignorum, quibus litterae P et Q ſunt affectae.

Corollarium IV.

§. 30. Hae autem formulae prorſus ſunt diuerſae ab illis quas ſupra in euolutione §. 14. habuimus, vbi erat $\frac{P}{Q} = \frac{n \operatorname{ſin.} \frac{b\pi}{n}}{b\pi}$, quod diſcrimen quo clarius ob oculos ponatur, loco b et n ſcribamus p et $2r$, vt fiat $\frac{P}{Q} = \frac{2r \operatorname{ſin.} \frac{p\pi}{2r}}{p\pi}$; tum autem ſit

P $= \int$

$$P=\int\frac{x^{2r-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p}{2r}}}\quad\text{et}\quad Q=\int\frac{x^{2r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p}{2r}}}$$

quae formulae actu integrationem admittent, dum colligitur

$$P=\frac{1}{p}\quad\text{et}\quad Q=\frac{\pi}{2r\,\text{fin.}\frac{p\pi}{2r}}.$$

Corollarium V.

§. 31. Quodfi in formulis penultimi corollarii capiamus $q=0$, vt fiat $\frac{P}{Q}=\text{cof.}\frac{p\pi}{2r}$, binas tantum pro hoc cafu diuerfas formulas pro P et Q nancifcemur, quae funt:

$$\text{I. } P=\int\frac{x^{r-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p}{2r}}}\quad\text{et}\quad Q=\int\frac{x^{r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p}{2r}}}$$

$$\text{II. } P=\int\frac{x^{r-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p}{2r}}}\quad\text{et}\quad Q=\int\frac{x^{r+p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p}{2r}}}.$$

Sin autem in formulis antepenultimi corollarii ftatuamus $q=r$, vt prodeat $\frac{P}{Q}=\text{fin.}\frac{p\pi}{2r}$, iterum prodibunt binae formulae pro P et Q, quae funt:

$$\text{I. } P=\int\frac{x^{r-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}+\frac{p}{2r}}}\quad\text{et}\quad Q=\int\frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}+\frac{p}{2r}}}$$

$$\text{II. } P=\int\frac{x^{r-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{3}{2}-\frac{p}{2r}}}\quad\text{et}\quad Q=\int\frac{x^{2r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}+\frac{p}{2r}}}.$$

Corollarium VI.

§. 32. Quodfi in formulis Corollarii II. ftatuamus $q=r-p$, vt fiat $\text{fin.}\frac{q\pi}{2r}=\text{cof.}\frac{p\pi}{2r}$, habebitur $\frac{P}{Q}=\text{tang.}\frac{p\pi}{2r}$ et

 qua-

quaterni valores pro formulis P et Q erunt

$$\text{I. } P=\int\frac{x^{r+p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}+\frac{p}{r}}} \text{ et } Q=\int\frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}+\frac{p}{r}}}$$

$$\text{II. } P=\int\frac{x^{r+p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{3}{2}}} \text{ et } Q=\int\frac{x^{2r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{III. } P=\int\frac{x^{r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}}} \text{ et } Q=\int\frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{IV. } P=\int\frac{x^{r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{3}{2}-\frac{p}{r}}} \text{ et } Q=\int\frac{x^{2r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{3}{2}-\frac{p}{r}}}.$$

Corollarium VII.

§ 33. Plurimum autem etiam intererit nosse, ipsam formulam integralem S pro his casibus, quibus fit simpliciter vel $\frac{P}{Q}=\text{cof.}\,\frac{p\pi}{2r}$, vel $\frac{P}{Q}=\text{fin.}\,\frac{p\pi}{2r}$ vel, $\frac{P}{Q}=\text{tang.}\,\frac{p\pi}{2r}$, fieri, pro primo:

$$S=\int\frac{dx}{x\,l\,x}\cdot\frac{x^{r-p}-2x^{r}+x^{r+p}}{1-x^{2r}}=l\,\text{cof.}\,\frac{p\pi}{2r}$$

pro secundo casu:

$$S=\int\frac{dx}{x\,l\,x}\cdot\frac{x^{p}-2x^{r}+x^{2r-p}}{1-x^{2r}}=l\,\text{fin.}\,\frac{p\pi}{2r}$$

pro tertio autem casu:

$$S=\int\frac{dx}{x\,l\,x}\cdot\frac{x^{p}-x^{r-p}-x^{r+p}+x^{2r-p}}{1-x^{2r}}=l\,\text{tang.}\,\frac{p\pi}{2r}$$

quae postrema formula reducitur ad hanc:

$$\int\frac{dx}{x\,l\,x}\cdot\frac{x^{p}-x^{r-p}}{1+x^{r}}=l\,\text{tang.}\,\frac{p\pi}{2r}$$

quae est eadem integratio, quam non ita pridem ex diversissimis principiis elicueram.

Scho-

Scholion.

§. 34. Poſtremo autem circa omnes has varias formulas integrales probe notetur, eas, in quibus exponens denominatoris reperitur vnitate maior, vtpote incongruas reiiciendas eſſe; propterea quod earum valores integrati poſito $x = 1$ euadant infiniti, quod quidem, cum in vtraque formula P et Q ſimul eueniat, non impedit, quo minus fractio $\frac{P}{Q}$ aſſignatum obtineat valorem; ſed quia eum hinc definire non licet, etiam iſtiusmodi formulae optatum vſum non praeſtant. Commode autem euenit, vt plures formulae adſint, ex quibus valorem verum deriuare liceat.

NOVAE

NOVAE DEMONSTRATIONES CIRCA RESOLVTIONEM NVMERORVM IN QVADRATA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Quum ſaepe et multum in hoc argumento fuiſſem occupatus, neque tamen ea demonſtratio quam olim dederam circa reſolutionem omnium numerorum in quatuor vel pauciora quadrata mihi ipſi penitus ſatisfeciſſet; eo maiore ardore euolui demonſtrationem quam Celeb. D. *la Grange* nuper in *Primo Volumine Nouorum Actorum Acad. Scientiar. Boruſ.* huius Theorematis tradidit, quam vtique negotium perfeciſſe ſum admiratus, etiamſi eius momenta nimis longe repetita at vehementer operoſa viderentur.

§. 2. Lectoribus autem haud ingratum fore arbitror, ſi praecipua momenta, quibus haec demonſtratio innititur, hic breuiter et concinne propoſuero: Poſtquam Cel. Auctor hoc Lemma praemiſit, quod ſi duae ſummae binorum quadratorum $pp + qq$ et $rr + ss$ communem habeant diuiſorem ϱ, neque tamen ſingula quadrata per eum diuidi queant, tum non ſolum ipſum hunc diuiſorem ϱ, ſed etiam ambos quotos $\frac{pp+qq}{\varrho}$ et $\frac{rr+ss}{\varrho}$ fore ſummas duorum quadratorum, progreditur ad Theorema demonſtrandum: quod ſi ſumma quatuor quadratorum $P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$ diuiſibilis fuerit per numerum quemcunque A, neque tamen ſingula quadrata per eum ſint diuiſibilia, tum ipſum hunc numerum A fore ſummam quatuor quadratorum, cuius demonſtratio ſequentibus continetur ratiociniis.

1^{m}. Posito quoto ex illa diuisione oriundo $= a$, vt sit $Aa = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$, si forte eueniat, vt binae formulae $P^2 + Q^2$ et $R^2 + S^2$ habeant communem diuisorem ϱ, quem ergo etiam numerus a continebit, ponit $a = b\varrho$, vt fiat $Ab = \frac{P^2 + Q^2}{\varrho} + \frac{R^2 + S^2}{\varrho}$, quae formulae quum per Lemma praemissum sint summae duorum quadratorum, habebitur huiusmodi aequatio:

$$Ab = pp + qq + rr + ss$$

vbi formulae $pp + qq$ et $rr + ss$ non amplius habebunt factorem communem.

2do. Tum vero ponit $pp + qq = t$ et $rr + ss = u$, vt sit $Ab = t + u$, quam aequationem ducit in t, faciendo $Abt = tt + tu$; et quia tu etiam est summa duorum quadratorum, puta $xx + yy$, sumendo scilicet $x = pr + qs$ et $y = ps - qr$, fiet $Abt = tt + xx + yy$.

3^{io}. Nunc per numeros t et b, quippe qui inter se sunt primi, ambos x et y ita exprimi posse obseruat, vt sit $x = \alpha t + \gamma b$ et $y = \beta t + \delta b$; vbi quum litterae α, β, γ, δ infinitis modis accipi queant, siue negatiue siue positiue, inter earum valores tales certe dabuntur, vt sit $\alpha \lessgtr \frac{1}{2}b$ et $\beta \lessgtr \frac{1}{2}b$.

4to. His iam valoribus pro x et y substitutis resultabit ista aequatio:

$$Abt = tt(1 + \alpha^2 + \beta^2) + 2bt(\alpha\gamma + \beta\delta) + bb(\gamma\gamma + \delta\delta).$$

Quae expressio quum diuisibilis esse debeat per b, neque tamen in primo membro tt hanc diuisionem admittat, necesse est, vt ibi formula $1 + \alpha^2 + \beta^2$ factorem habeat b; eodem modo vltimum membrum $\gamma\gamma + \delta\delta$ diuisibile per t esse, necesse est. Ponatur ergo $1 + \alpha^2 + \beta^2 = ba'$, et quia vterque numerus α et β minor est quam $\frac{1}{2}b$, manifestum est fore $a' \lessgtr \frac{1}{2} + \frac{1}{b}$. Facta ergo diuisione per b, erit

$$At = a'tt + 2t(\alpha\gamma + \beta\delta) + b(\gamma\gamma + \delta\delta).$$

5to. Multiplicetur nunc haec aequatio per a', vt prodeat

$$A a' t = a'^2 t^2 + 2 a' t (\alpha\gamma + \beta\delta) + a' b (\gamma\gamma + \delta\delta)$$

et in vltimo membro loco $a' b$ scribendo valorem $1 + \alpha^2 + \beta^2$, fiet

$$A a' t = a'^2 t^2 + 2 a' t (\alpha\gamma + \beta\delta) + (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) + \gamma^2 + \delta^2$$

quae expressio in sequentia quatuor quadrata resoluetur:

$$A a' t = (a' t + \alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\beta\gamma - \alpha\delta)^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

Vbi quum summa binorum postremorum quadratorum $\gamma^2 + \delta^2$ diuisibilis sit per numerum t, necesse est, vt summa duorum priorum quoque diuisibilis sit per t, ita vt hic duae binorum quadratorum summae occurrant communem diuisorem t habentes; quare si per t diuidatur, ambo illi quoti itidem erunt summae binorum quadratorum.

6to. Quodsi ergo ponamus

$$\frac{(a' t + \alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\beta\gamma - \alpha\delta)^2}{t} = p'^2 + q'^2 \text{ et } \frac{\gamma^2 + \delta^2}{t} = r'^2 + s'^2$$

habebimus $A a' = p'^2 + q'^2 + r'^2 + s'^2$. In hac autem formula $A a'$, si cum prima $A a$ comparetur, numerus a' multo minor erit quam a, quandoquidem $b < a$ et $a' < \frac{1}{2} b$. Simili modo ergo peruenire licebit ad formulam $A a''$, vbi a'' multo minor erit quam a', sicque tandem perueniri necesse est ad formulam A. 1, ita vt iam ipse numerus A reperiatur aequalis summae quatuor quadratorum.

§. 3. Demonstrato hoc Theoremate insuper ostendi oportet, proposito quocunque primo, semper exhiberi posse summam quatuor quadratorum per eum diuisibilem, quorum tamen singula quadrata diuisionem non admittant. Atque hoc etiam Cel. *la Grange* modo maxime ingenioso demonstrat, qui autem tantopere est abstrusus et prolixus, vt eius momenta breuiter et dilucide nequaquam exhiberi possint. Nunc igitur famosum illud Theorema siue *Ba-*

cheti

cheti siue *Fermatii*: quod omnis numerus in quadrata quatuor vel pauciora resolui possit, pro perfecte demonstrato est habendum. Quia enim pro numero primo quocunque semper dari potest summa quatuor quadratorum per illum diuisibilis, omnes numeri primi summae erunt quatuor pauciorumue quadratorum; et quia iam dudum demonstratum est, producta ex duobus pluribusue numeris, qui singuli sunt summae quatuor pauciorumue quadratorum, quoque in quatuor quadrata dispertiri posse, solidissime iam est euictum, omnes plane numeros esse summas quatuor quadratorum pauciorumue.

§. 4. Quamuis omnino nefas esset, quicquam contra soliditatem et rigorem harum demonstrationum excipere, tamen nemo negabit, eas nimis longe esse repetitas neque ipsa fundamenta et rationes singulorum ratiociniorum, quibus hae demonstrationes sint compositae, haud leui obscuritate esse inuolutas, ita vt etiamnunc merito clariores et perceptu faciliores demonstrationes desiderare liceat. Quo quidem desiderio summae laudi, quam istae demonstrationes merentur, nihil detrahi est censendum.

§. 5. Quum igitur, postquam hoc argumentum de nouo perpendissem, in nouas et satis planas eorundem Theorematum demonstrationes mihi incidere contigerit, iis, qui hoc studio delectantur, communicatio harum nouarum demonstrationum certe gratissima fore videtur; quocirca eas hoc loco quantum potero breuiter et dilucide sum propositurus. Ac primo quidem a Theoremate illo notissimo simulque plenissime demonstrato, quo omnes diuisores cuiusque summae duorum inter se primorum, ipsi summis duorum quadratorum aequales affirmantur, incipiam, cum quod haec noua demonstratio simplicitate se maxime commendat, tum vero quod, iisdem vestigiis insistendo, demonstratio facile ad quatuor quadrata extendi potest.

 Lem-

Lemma I.

§. 6. *Productum ex duabus summis binorum quadratorum itidem est summa duorum quadratorum.*

Nam si illud productum fuerit $(aa+bb)(\alpha\alpha+\beta\beta)$ et capiatur

$$A=a\alpha+b\beta \text{ et } B=a\beta-b\alpha,$$

vtique erit

$$(aa+bb)(\alpha\alpha+\beta\beta)=AA+BB.$$

Theorema I.

Si numerus N *fuerit diuisor summae duorum quadratorum* P^2+Q^2 *inter se primorum, tum ipse ille numerus* N *erit summa duorum quadratorum.*

Demonstratio.

Quo hanc demonstrationem facilius etiam in numeris exsequi liceat, cui forte libuerit, obseruo, quantumuis magni fuerint numeri P et Q, ex iis semper aliam summam duorum quadratorum $pp+qq$ formari posse, quorum radices p et q semissem numeri propositi N non superent. Nam si ponatur

$$P=fN\pm p \text{ et } Q=gN\pm q$$

notissimum est, numeros p et q ita sumi posse, vt semissem $\frac{1}{2}N$ non superent. Quum igitur iam sit

$$P^2+Q^2=N^2(ff+gg)+2N(\pm fp\pm gq)+pp+qq$$

haecque expressio per N sit diuisibilis, euidens est etiam hanc binorum quadratorum summam per N diuisibilem fore. Hoc praemisso ipsam demonstrationem sequentibus momentis complectar:

1°. Quum igitur ista formula $pp+qq$ diuisorem habeat N, ponendo quotum $=n$ habebimus $Nn=pp+qq$, vbi ergo n minor erit quam $\frac{1}{2}N$, quia $p<\frac{1}{2}N$ et $q<\frac{1}{2}N$.

2°. Iam iſtos numeros p et q per numerum n ita exprimere licebit, vt ſit $p = a + \alpha n$ et $q = b + \beta n$; vbi admiſſis etiam numeris negatiuis pro a et b, eas infra $\frac{1}{2} n$ deprimere licebit, vti iam initio obſeruauimus. Tum vero erit

$$Nn = aa + bb + 2n(a\alpha + b\beta) + nn(\alpha\alpha + \beta\beta).$$

Et quia in Lemmate praemiſſo erat $a\alpha + b\beta = A$, fiet

$$Nn = aa + bb + 2nA + nn(\alpha\alpha + \beta\beta).$$

3^{tio}. Huius ergo expreſſionis primum membrum $aa+bb$ factorem habeat neceſſe eſt n, quia reliqua membra iam per ſe diuiſorem n admittunt. Statuamus ergo $aa+bb = nn'$, et quia $a < \frac{1}{2} n$ et $b < \frac{1}{2} n$, ideoque $nn' < \frac{1}{2} nn$, erit vtique $n' < \frac{1}{2} n$. Hoc autem valore ſubſtituto et diuiſione per n facta prodit

$$N = n' + 2A + n(\alpha\alpha + \beta\beta).$$

4°. Hanc aequationem ducamus in n' et quia $nn' = aa+bb$, poſtremum membrum per Lemma praemiſſum reducitur ad

$$nn'(\alpha\alpha + \beta\beta) = (aa + bb)(\alpha\alpha + \beta\beta) = AA + BB,$$

ita vt nunc habeamus

$$Nn' = n'n' + 2n'A + AA + BB$$

quae expreſſio manifeſto eſt ſumma duorum quadratorum, ſcilicet:

$$Nn' = (n' + A)^2 + B^2.$$

5°. Quum ergo initio fuiſſet productum Nn ſumma duorum quadratorum, indeque hic elicuerimus productum minus Nn' etiam aequale ſummae duorum quadratorum, eodem modo ad talia producta continuo minora pertingere licebit, ſcilicet Nn'', Nn''' etc. Neceſſe igitur eſt vt tandem ad productum minimum ſcilicet N. 1 perueniatur, ſicque ipſe numerus propoſitus N quoque erit ſumma duorum quadratorum.

 Corol-

Corollarium.

Mirum forsitan videbitur, quum peruentum fuerit ad huiusmodi numerum $n' = 1$, quomodo sequentes operationes similes se sint habiturae, id quod facile patebit, sumendo statim $n = 1$, tum enim habebitur $p = a + \alpha . 1$ et $q = b + \beta . 1$, vbi manifesto sumere licet $a = 0$ et $b = 0$, quippe quo pacto fiunt $< \frac{1}{2}$; tum vero, ob $aa + bb = 0$, vtique erit $n' = 0$, atque hic progressio vlterior nostri ratiocinii sponte sistitur.

Scholion.

§ 7. Eodem modo demonstrari potest, omnes numeros vel huius formae: $pp + 2qq$ vel: $pp + 3qq$, alios non admittere diuisores, nisi qui ipsi sint eiusdem formae, siquidem numeri p et q fuerint primi inter se; neque vero hoc ratiocinium ad formas altiores, veluti: $pp + 5qq$; $pp + 6qq$ extendi potest, quia tum non amplius sequeretur, numerum n' necessario minorem esse quam n. Priorum igitur illorum casuum demonstrationes hic adponamus.

Lemma II.

§. 8. *Productum ex duobus numeris huius formae* $pp + qq$ *semper est numerus eiusdem formae.*

Si enim tale productum proponatur $(aa + 2bb)(\alpha\alpha + 2\beta\beta)$ et sumatur $A = a\alpha + 2b\beta$ et $B = a\beta - b\alpha$, tum vtique erit $AA + 2BB = (aa + 2bb)(\alpha\alpha + 2\beta\beta)$.

Theorema II.

Si N *fuerit diuisor numeri* $pp + 2qq$ *et* p *et* q *sint primi inter se, tum etiam ipse numerus* N *in tali forma continebitur.*

Demon-

Demonstratio.

Hic iterum numeros p et q infra semissem numeri N deprimere licebit et nostra demonstratio sequenti modo procedet:

1°. Sit $Nn = pp + 2qq$, et quia $p < \frac{1}{2}N$ et $q < \frac{1}{2}N$ erit $n < \frac{3}{4}N$. Iam ponatur vt ante $p = a + \alpha n$ et $q = b + \beta n$, vbi a et b capi poterunt minores quam $\frac{1}{2}n$, hincque habebitur

$$Nn = aa + 2bb + 2n(a\alpha + 2b\beta) + nn(\alpha\alpha + 2\beta\beta)$$

quae forma per Lemma praemissum reducitur ad

$$Nn = aa + 2bb + 2nA + nn(\alpha\alpha + 2\beta\beta).$$

2°. Hic igitur primum membrum $aa + 2bb$ factorem habebit n; vnde posito $aa + 2bb = nn'$, erit vtique $n' < \frac{3}{4}n$. Hoc iam valore substituto et per n diviso fiet

$$N = n' + 2A + n(\alpha\alpha + 2\beta\beta).$$

3°. Multiplicetur per n' atque per Lemma praemissum habebitur

$$nn' = (\alpha\alpha + 2\beta\beta) = (aa + 2bb)(\alpha\alpha + 2\beta\beta) = AA + 2BB;$$

ita vt nunc habeatur

$$Nn' = n'^2 + 2n'A + AA + 2BB,$$

quae forma manifesto ad hanc reducitur:

$$Nn' = (n' + A)^2 + 2B^2,$$

ideoque itidem numerus formae $pp + 2qq$.

4°. Quum ergo sit $n' < n$, simili modo ad producta sequentia peruenire licebit Nn''; Nn''' etc., ita vt numeri n, n', n'', n''' etc. continuo decrescant. Tandem ergo perueniatur necesse est ad formam $N.1$, ita vt ipse numerus N quoque in eadem forma $pp + 2qq$ contineatur.

Lemma III.

§. 9. *Productum ex duobus numeris formae* $pp + 3qq$ *semper ad similem formam reduci potest.*

Sit

Sit enim tale productum $(aa+3bb)(\alpha\alpha+3\beta\beta)$ et capiatur $A=a\alpha+3b\beta$ et $B=a\beta-b\alpha$, manifesto habebitur

$$AA+3BB=(aa+3bb)(\alpha\alpha+3\beta\beta).$$

Theorema III.

Si N *fuerit diuisor numeri* $pp+3qq$, *vbi* p *et* q *sint numeri primi inter se, tum ipse numerus* N *ad eandem formam reduci poterit.*

Demonstratio.

Quum iterum spectare liceat $p<\frac{1}{2}N$ et $q<\frac{1}{2}N$, ipsa forma $pp+3qq$ minor erit quam N^2. Posito ergo $pp+3qq=Nn$ factor n minor erit quam N, quae quidem reductio ad demonstrationem non est necessaria: ea enim aeque procedet etiamsi fuerit $n>N$, vti sequitur:

1°. Posito iam $p=a+\alpha n$ et $q=b+\beta n$, hic numeros a et b minores statuere licet quam $\frac{1}{2}n$, saltem non maiores; tum autem erit

$$Nn=aa+3bb+2n(a\alpha+3b\beta)+nn(\alpha\alpha+3\beta\beta)$$

quae per Lemma praemissum fit

$$Nn=aa+3bb+2nA+nn(\alpha\alpha+3\beta\beta).$$

2°. Necesse igitur est, vt primum membrum $aa+3bb$ factorem habeat n; quare, posito $aa+3bb=nn'$, hic numerus n' certe minor erit quam n, saltem non maior; tum vero facta diuisione per n prodibit

$$N=n'+2A+n(\alpha\alpha+3\beta\beta).$$

3°. Multiplicemus iam per n' et postremum membrum

$$nn'(\alpha\alpha+3\beta\beta)=(aa+3bb)(\alpha\alpha+3\beta\beta)$$

per Lemma praemissum fit $AA+3BB$, sicque habebimus

$$Nn'=n'^2+2n'A+AA+3BB,$$

quae

quae expreſſio manifeſto reducitur ad hanc:

$$N n' = (n' + A)^2 + 3 B^2.$$

4°. Quum igitur $N n'$ iterum ſit formae $pp + 3qq$ et $n' < n$, eodem modo continuo progredi licebit ad continuo minora producta $N n''$. $N n'''$ etc. donec tandem ad vltimum $N . 1$ perueniatur; atque adeo demonſtratum eſt, fore ipſum numerum N formae $pp + 3qq$.

Corollarium I.

Fundamentum huius demonſtrationis vt et praecedentium in hoc conſiſtit, quod a quolibet numero n perueniatur ad alium n' multo minorem, id quod iis caſibus, quibus n eſt numerus ſatis magnus, per ſe eſt perſpicuum. Quin etiam haec ratio eo caſu valet, quo $n = 1$: quia enim tum ſumi poterit $a = 0$ et $b = 0$, ob $nn' = 0$ vtique fiet $n' = 0$. Interim tamen pro hoc Theoremate ſingularis plane caſus occurrit, quando in progreſſione numerorum n, n', n'' etc. tandem ad binarium peruenitur; qui caſus eo maiorem attentionem meretur, quod nusquam alibi occurrat.

Corollarium II.

Pro hoc ergo caſu ſtatuamus ſtatim $n = 2$, et manifeſtum eſt in formula $pp + 3qq$ vtrumque numerum p et q eſſe debere imparem: vtrumque enim parem aſſumere non licet, quia p et q inter ſe primi ſtatuuntur. Quare quum hic fieri debeat $p = a + 2\alpha$ et $q = b + 2\beta$, fiet $a = 1$ et $b = 1$, ideoque $aa + 3bb = 4 = nn'$; vnde patet etiam n' fore $= 2$, ita vt nulla vlterior diminutio locum habere poſſit. Quoties ergo hoc euenit, tum non ipſe numerus N, ſed eius duplum $2N$ erit numerus formae $pp + 3qq$.

Corollarium III.

Hoc eo magis clarum reddetur, ſi perpendamus, formulam $pp + 3qq$, quando ambo numeri p et q ſunt im-

pares, non ſolum eſſe parem ſed etiam per quatuor diuiſibilem, neque adeo impariter parem vnquam eſſe poſſe formae $pp+3qq$. Quoties ergo, vti his caſibus vſu venit, numerus $2N$ in forma $pp+3qq$ contineatur, tum N ſemper erit numerus par, eiusque ſemiſſis $\frac{1}{2}N$, ſeu pars quarta ipſius $2N$ in hac forma $pp+3qq$ continebitur. Quoties enim vterque numerus p et q eſt impar, tum etiam $\frac{pp+3qq}{4}$ ſemper eſt numerus eiusdem formae, idque adeo in integris, quod quidem non tam facile perſpicitur. Poſito enim $p=2r+1$ et $q=2s+1$, prodit forma

$$\frac{pp+3qq}{4}=1+r+rr+3s+3ss$$

quam generatim neutiquam in integris ad quadratum cum triplo quadrato reducere licet. Sequenti autem modo haec reſolutio in genere inſtitui poterit. Obſeruo enim omnia quadrata imparia in hac forma $(4m+1)^2$ contineri, ſi quidem pro m etiam numeri negatiui admittantur; namque ſi m ſit poſitiuum, quadrata numerorum 1, 5, 9, 13, quorum forma eſt $4i+1$ reſultant; ſin autem m ſit numerus negatiuus, tum quadrata numerorum 3, 7, 11, 15 etc. quorum forma eſt $4i-1$, oriuntur. Iam ponamus

$pp=(4r+1)^2$ et $qq=(4s+1)^2$, eritque

$$\frac{pp+3qq}{4}=1+2r+4rr+6s+12ss$$

quae manifeſto ad hanc formam redigitur: $(1+r+3s)^2+3(r-s)^2$.

Scholion.

His Theorematibus praemiſſis id quod nobis maxime eſt propoſitum adgrediamur, demonſtraturi, quod ſummae quatuor quadratorum nullos alios diuiſores admittant, niſi qui ipſi quoque ſint ſummae quatuor quadratorum. Ad ſimilitudinem autem praecedentium Theorematum Lemma quoque praemitti oportet.

Lemma

Lemma IV.

§. 10. *Productum ex duobus pluribusue numeris, qui singuli sunt summae quatuor quadratorum, semper quoque per summam quatuor quadratorum exprimi potest.*

Sit tale productum

$$(aa+bb+cc+dd)(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta)$$

et capiatur

$$A=\alpha a+b\beta+c\gamma+d\delta$$
$$B=a\beta-b\alpha-c\delta+d\gamma$$
$$C=a\gamma+b\delta-c\alpha-d\beta$$
$$D=a\delta-b\gamma+c\beta-d\alpha$$

horumque quadratorum summa erit

$$A^2+B^2+C^2+D^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$$

manifestum enim est singula producta ex binis partibus se mutuo destruere et singula quadrata litterarum Latinarum in singula Graecarum duci.

Theorema IV.

Si N *fuerit diuisor cuiuspiam summae quatuor quadratorum, seu formae* pp+qq+rr+ss, *quae quidem singula per* N *non sint diuisibilia*, *tum* N *certe erit summa quatuor quadratorum.*

Demonstratio.

Non parum iuuabit hic quoque notasse, quatuor illas radices p, q, r, s infra semissem numeri propositi N deprimi posse; demonstratio autem sequenti modo procedet:

1°. Denotante n quotum ex illa diuisione resultantem, vt sit

$$Nn=pp+qq+rr+ss$$

vbi litterae p, q, r, s ita ad n referantur, vt sit

$$p=a+n\alpha;\; q=b+n\beta;\; r=c+n\gamma;\; s=d+n\delta$$

 cui-

euidens omnino eſt, litteras a, b, c, d ita ſumi poſſe, vt $\frac{1}{2}n$ non ſuperent; quandoquidem valores negatiui hinc non excluduntur, ſicque formula $aa+bb+cc+dd$ certe minor erit quam nn.

2°. His autem valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra erit:

$$Nn = aa+bb+cc+dd+2n(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta) \\ +nn(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta)$$

quae ex Lemmate praemiſſo, vbi poſuimus

$$A = a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta,$$

ita contrahitur:

$$Nn = aa+bb+cc+dd+2nA+nn(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta).$$

Quia ergo hic pars prima $aa+bb+cc+dd$ factorem habere debet n, ſtatuatur $aa+bb+cc+dd = nn'$, eritque omnino $n' < n$, vti modo oſtendimus. Facta ergo diuiſione per n obtinebimus

$$N = n'+2A+n(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta).$$

3°. Multiplicemus nunc per n' et quia

$$nn' = (aa+bb+cc+dd)$$

habebimus ex Lemmate praemiſſo

$$nn'(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta) = A^2+B^2+C^2+D^2,$$

qua forma introducta noſtra aequatio erit:

$$Nn' = n'^2+2n'A+A^2+B^2+C^2+D^2$$

quae manifeſto ad haec quatuor quadrata reducitur:

$$Nn' = (n'+A)^2+B^2+C^2+D^2.$$

4°. Quatenus igitur hic $n' < n$, eodem modo ad formas continuo minores Nn'', Nn''' etc. pertingere licebit, donec tandem ad formam N. 1 perueniatur, ideoque numerus propoſitus N quatuor quadratis aequetur.

Corol-

Corollarium I.

Hoc ratiocinium iterum leui exceptioni eſt obnoxium, quando ſcilicet fuerit $n = 2$ omnesque numeri p, q, r, s impares: tumenim fiet $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ et $d = 1$ hincque $nn' = 4$, ita vt quoque fiat $n' = 2$, ſicque non minor quam n. Verum quum hinc numerus 2 N aequetur ſummae quatuor quadratorum, aliunde perſpicuum eſt, etiam ſemiſſem N fore ſummam quatuor quadratorum, ita vt haec exceptio nihil plane turbare ſit cenſenda.

Corollarium II.

Quo hoc clarius perſpiciatur ſint numeri p, q, r, s pares et n numerus par; tum quia

$$Nn = pp + qq + rr + ss \text{ erit}$$

$$\tfrac{1}{2} Nn = \left(\tfrac{p+q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p-q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{r+s}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{r-s}{2}\right)^2$$

quae quatuor quadrata itidem erunt integra, qua reductione vti licebit, quamdiu omnes radices quatuor quadratorum fuerint impares; tum autem exceptio ante memorata ſponte concidit.

Scholion.

Hac demonſtratione potiſſimum Theorema illud Fermatianum conficitur, quandoquidem altera pars, quae adhuc ſupereſt, quod ſcilicet propoſito quocunque numero primo ſemper ſummae quatuor quadratorum exhiberi queant per illum diuiſibiles, a me iam dudum ſatis clare eſt expedita atque adeo nuper a Celeb. *la Grange* ſubtiliſſima demonſtratione eſt firmata. Vt tamen hoc argumentum penitus conficiam, ſequentem demonſtrationem admodum facilem hic ſubiungam.

Theorema V.

§. 11. *Propoſito quocunque numero primo* N *non ſolum quaterna quadrata verum adeo terna quadrata infinitis modis*

modis exhiberi possunt, quorum summa sit diuisibilis per istum numerum N, *neque tamen singula per eum diuidi queant.*

Demonstratio.

Respectu numeri N omnes plane numeri in aliqua sequentium formarum continentur:

$$\lambda N;\ \lambda N+1;\ \lambda N+2;\ \lambda N+3 \ldots \lambda N+N-1$$

quarum numerus est N. Seposita autem prima forma, quae multipla ipsius λN continet, circa reliquas, quarum numerus est $N-1$, notandum est, quadrata primae formae $\lambda N+1$ et vltimae $\lambda N+N-1$ ad eandem formam $\lambda N+1$ redire; quadrata vero secundae formae $\lambda N+2$ et penultimae $\lambda N+N-2$ ad formam $\lambda N+4$; tertiae vero et antepenultimae ad $\lambda N+9$ redigi et ita porro; ita vt hae tantum formae

$$\lambda N+1;\ \lambda N+4;\ \lambda N+9 \text{ etc.}$$

quarum numerus est $\frac{1}{2}(N-1)$, quadrata in se complecti queant, quas formas primae classis appellemus, et ita designemus:

$$\lambda N+a;\ \lambda N+b;\ \lambda N+c;\ \lambda N+d \text{ etc.}$$

ita vt litterae a, b, c, d etc. vel ipsa quadrata 1, 4, 9, 16 denotent, vel, si numerum N excedant, residua ex divisione restantia. Reliquae vero formae, quarum numerus itidem erit $\frac{1}{2}(N-1)$, hoc modo designentur:

$$\lambda N+\alpha;\ \lambda N+\beta;\ \lambda N+\gamma \text{ etc.}$$

quas formas posterioris classis vocabimus. De his autem geminis classibus tres sequentes proprietates notentur, quas quidem facile demonstrare licet:

1°. Productum ex binis numeris primae classis itidem in prima classe continetur, scilicet forma $\lambda N+ab$ in prima classe reperietur: si enim ab maius fuerit quam N, eius loco residuum ex diuisione per N facta relictum, capi est intelligendum.

2°.

2°. Numeri primae classis, a, b, c, d etc. in quemcunque numerum posterioris classis α, β, γ etc. ducti, in classem posteriorem incident.

3°. Denique producta ex binis numeris posterioris classis veluti $\alpha\beta$ in classem primam transferuntur.

His praemissis demonstrabo: si non darentur terna quadrata, quorum summa diuisibilis esset per N, tum maximum absurdum inde esse sequuturum. Ad hoc concedamus tantisper aduersario, nulla dari terna quadrata, quorum summa sit diuisibilis per N: multo minus ergo duo talia quadrata dabuntur. Hinc statim sequitur, formam $\lambda N - a$, siue quod eodem redit $\lambda N + (N - a)$ non in prima classe occurrere: si enim daretur quadratum formae $\lambda N - a$, hoc ad quadratum formae $\lambda N + a$ praeberet summam per N diuisibilem, contra hypothesin. Forma igitur $\lambda N - a$ in posteriore classe contineatur necesse est, sicque inter litteras α, β, γ, δ etc. reperientur numeri -1, -4, -9 etc. Sit f numerus quicunque primae classis, ita vt dentur quadrata formae $\lambda N + f$ ad quae si addantur quadrata formae $\lambda N + 1$, summa binorum habebit formam $\lambda N + f + 1$. Iam si daretur quadratum formae $\lambda N - f - 1$, haberetur summa tria quadratorum per N diuisibilis, quod quum negetur, forma $\lambda N - f - 1$ non in prima classe, ideoque in posteriori continebitur, in qua ergo quum reperiantur numeri -1 et $-f-1$, eorum productum $+f+1$ in priori classe occurret necesse est. Simili modo ostendetur in prima classe quoque occurrere debere numeros

$$f + 2,\ f + 3,\ f + 4 \text{ etc.}$$

quare sumto $f = 1$, in prima classe occurrerent omnes plane formae

$$\lambda N + 1,\ \lambda N + 2,\ \lambda N + 3 \text{ etc.}$$

nullaeque penitus pro classe posteriore relinquerentur. Interim

terim tamen eodem ratiocinio vidimus, in claſſe poſteriore occurrere numeros -1, $-f-1$, $-f-2$ etc. ideoque etiam omnes plane formas; quod quum ſit maxime abſurdum, ſequitur falſum eſſe, non dari terna quadrata quorum ſumma ſit diuiſibilis per numerum propoſitum N. Dantur ergo omnino terna multoque magis quaterna huiusmodi quadrata, quorum ſumma per N erit diuiſibilis.

Corollarium.

Ex hoc Theoremate cum praecedente coniuncto manifeſto ſequitur, omnes plane numeros primos eſſe ſummas quatuor vel pauciorum quadratorum. Et quum producta ex binis pluribusue huiusmodi numeris eandem naturam ſequantur, ſolidiſſime euictum eſt, *omnes plane numeros eſſe ſummas quatuor quadratorum vel adeo pauciorum.*

Scholion.

Loco huius propoſitionis Cel. *la Grange* Theorema multo latius patens in medium attulit et demonſtratione muniuit ingenioſiſſima quidem, ſed tantopere abſtruſa et intellectu difficili, vt non niſi ſumma adhibita attentione percipi poſſet. Demonſtrauit ſcilicet, propoſito quocunque numero primo A ſemper bina quadrata pp et qq ad illum prima dari poſſe, ita vt formulae $pp - Bqq - C$ per eum numerum primum A fiat diuiſibilis, quicunque numeri pro litteris B et C accipiantur, dummodo fuerint primi reſpectu ipſius A. Idem igitur Theorema aliquanto latius extenſum cum demonſtratione longe faciliori et planiori hic ſubiungam.

Theorema VI.

§. 12. *Propoſito quocunque numero primo* N, *ſemper terna quadrata* xx, yy *et* zz *ad eum prima exhibere licet,* vt

vt formula $\lambda xx + \mu yy + \nu zz$ *per numerum illum primum* N *fiat diuisibilis, dummodo isti coefficientes* λ, μ *et* ν *ad ipsum* N *fuerint primi, hoc est, nullus eorum neque euanescat, neque ipsi* N, *neque eius multiplo cuipiam fuerit aequalis.*

Demonstratio.

Denotent litterae a, b, c, d etc. omnia residua, quae quae ex diuisione quadratorum per numerum primum propositum N facta relinquuntur, quos numeros ante ad classem priorem retulimus, quo um multitudo est $\frac{1}{2}(N-1)$: in iis scilicet omnes occurrunt numeri quadrati 1, 4, 9, 16 etc. minores quam N; maiorum autem residua illa ex diuisione per N resultantia accedunt. Ad eandem vero classem etiam iidem numeri a, b, c, d etc. quouis multiplo numeri N aucti sunt referendi. Omnes autem reliqui numeri minores quam N quorum numerus itidem est $\frac{1}{2}(N-1)$, quosque *non-residua* appellare licet, ad classem posteriorem sunt relati et litteris Graecis α, β, γ, δ etc. designentur. Circa hos numeros duplicis generis iam ante notauimus: producta ex binis residuis, seu classis prioris, iterum in eandem classem cadere, veluti ab, ac, bc etc., quatenus scilicet per diuisionem infra N deprimuntur; at productum ex residuo in non-residuum in classe posteriore non-residuorum reperiri; ac denique producta ex binis non residuis iterum fore residua. His notatis demonstrationem ita adornabimus, vt ostendamus, ingens absurdum esse sequuturum, si nulla daretur formula $\lambda xx + \mu yy + \nu zz$ per numerum N diuisibilis. Demonstratio autem sequenti modo procedet.

1°. Quum omnia quadrata aequentur cuipiam residuo a, vel b, vel c, multiplo quodam numeri N aucto, si daretur talis formula $\lambda xx + \mu yy + \nu zz$ per numerum N diuisibilis, ob $xx = \zeta N + a$; $yy = \eta N + b$ et $zz = \theta N + c$

 foret

foret vtique formula $\lambda a+\mu b+\nu c$ per N diuiſibilis. Quare, qui noſtrum Theorema negauerit, ſtatuere debet, nullam dari huiusmodi formulam $\lambda a+\mu b+\nu c$ per N diuiſibilem.

2°. Quum igitur nulla detur huiusmodi formula per N diuiſibilis, multo minus fieri poterit $=0$, ideoque iſta aequatio: $\lambda a=-\mu b-\nu c$ erit impoſſibilis, pariter ac talis aequatio: $\lambda a=(\zeta N-\mu)b+(\eta N-\nu)c$. Verum quia λ, μ et ν ſunt primi ad N, ſemper coefficientes ζ et η ita accipere licet, vt formulae $\zeta N-\mu$ et $\eta N-\nu$ fiant per λ diuiſibiles. Ponamus ergo $\zeta N-\mu=\lambda m$ et $\eta N-\nu=\lambda n$, atque impoſſibilis quoque erit iſta aequatio: $a=+mb+nc$.

3°. Quum igitur iſta formula $mb+nc$ non ſit aequalis a, ideoque in claſſe reſiduorum non reperiatur (ſecundum mentem ſcilicet aduerſarii qui noſtrum Theorema negat) neceſſario in altera claſſe non-reſiduorum reperietur; ibidem ergo etiam (quia c vnitatem denotare poteſt) occurret $mb+n$, hincque adeo omnes iſtae formulae:

$$ma+n;\ mb+n;\ mc+n;\ md+n \text{ etc.}$$

quae quum omnes a ſe inuicem diuerſae et numero ſint $\frac{1}{2}(N-1)$, his tota claſſis non-reſiduorum exhaurietur, quatenus ſcilicet diuiſae per N infra N deprimuntur.

4°. In eadem vero etiam claſſe occurere debent omnia producta horum numerorum in quemlibet numerum primae claſſis veluti d, quae ergo erunt

$$mad+nd;\ mbd+nd;\ mcd+nd \text{ etc.}$$

Verum producta ad, bd, cd etc. in priorem claſſem cadunt, ac reperientur inter ipſos numeros a, b, c, d etc., ſicque in altera claſſe inter non-reſidua occurrent quoque omnes hae formulae:

$$ma+nd;\ mb+nd;\ mc+nd \text{ etc.}$$

quae praecedentes ſingulas ſuperant quantitate $n(d=1)$.
Hoc

Hoc difcrimen ponatur breuitatis gratia $= \omega$, quod vtique ad ipfum diuiforem N erit primum, fi modo pro d non affumatur vnitas, quia $d - 1$ eft $< N$, atque etiam numerus n primus ad N.

5°. Quodfi igitur in claffe non-refidorum contineatur numerus α, ibidem quoque occurret $\alpha + \omega$, atque ob eandem rationem hic numerus, iterum incrementum ω accipiens, fcilicet $\alpha + 2\omega$ ibi reperiatur neceffe eft; atque ob eandem rationem, etiam numeri $\alpha + 3\omega$, $\alpha + 4\omega$. Omnes igitur termini huius progreffionis Arithmeticae:

$$\alpha;\ \alpha + \omega;\ \alpha + 2\omega;\ \alpha + 3\omega \text{ etc.}$$

quatenus fcilicet per N diuifae infra N deprimuntur, inter non-refidua occurrere debebunt.

6°. Quia differentia huius progreffionis eft ω, numerus fcilicet ad N primus, in hac progreffione occurrunt termini non folum per N diuifibiles, fed etiam infuper omnes, qui per N diuifi pro refiduis praebent omnes plane numeros 1, 2, 3, 4 etc. nullo exclufo. Quocirca fecundum mentem aduerfarii in claffe non-refiduorum omnes plane occurrerent numeri, 1, 2, 3, 4 etc. quod qum fit abfurdum, opinio aduerfarii certe eft falfa: fcilicet falfum eft, nullos dari numeros formae

$$\lambda xx + \mu yy + \nu zz,$$

qui fint per N diuifibiles. Vtique igitur tales numeri dabuntur; atque hoc ipfum eft, quod praeftare fufcepimus.

Corollarium I.

Non folum autem femper tria huiusmodi quadrata xx, yy et zz reperire licet, fed etiam vnum eorum, veluti zz, pro lubitu affumere licet, dum ne fit per N divifibile. Ita fi f denotet numerum pro lubitu datum non divifibilem per N, femper affignare licebit bina quadrata xx et yy, vt formula $\lambda xx + \mu yy + \nu ff$ fiat per N

 diuifi-

diuisibilis. Ad hoc demonstrandum, quicunque fuerit numerus z, semper dabitur eiusmodi numerus v, vt productum vz per N diuisum relinquat datum residuum f. Sit enim $vz = \theta N + f$, et formula nostra per vv multiplicata, quae vtique adhuc diuisibilis erit per N, fiet

$$\lambda vvxx + \mu vvyy + \nu(\theta\theta N^2 + 2\theta Nf + ff)$$

vbi, quia membra $\theta\theta N^2 + 2\theta Nf$ per N sponte sunt divisibilia, etiam reliqua forma $\lambda vvxx + \mu vvyy + \nu ff$ per N diuisibilis erit.

Corollarium II.

Quicunque fuerint numeri λ, μ, ν, pro vno eorum semper vnitatem aliumue numerum pro lubitu assumere licet. Quia enim, per θ multiplicando, haec formula:

$$\theta\lambda xx + \theta\mu yy + \theta\nu zz$$

diuisionem per N admittit, loco θ eiusmodi numerum assumere licebit, vt productum $\theta\lambda$ per N diuisum relinquat vnitatem; tum autem haec formula:

$$xx + \theta\mu . yy + \theta\nu zz$$

etiamnunc per N erit diuisibilis. Quin etiam hic loco $\theta\mu$ et $\theta\nu$ residua ex diuisione per N facta oriunda scribere licet, hocque modo formulam, illi, quam Cel. *la Grange* est contemplatus, omnino similem assequimur.

Scholion.

Ecce ergo demonstrationem omnibus numeris absolutam tandem sumus assecuti Theorematis illius notissimi, quod omnes plane numeri sint summae quatuor vel paucorum quadratorum, quam quidem iam olim Fermatius se inuenisse est professus, iniuria autem temporum intercidisse etiamnunc maxime est dolendum. Nullum enim plane est dubium, quin Fermatii demonstratio multo simplicior et generalior fuerit, quam istae, quae nunc demum lucem

aspexe-

aſpexerunt. Quantum enim ex eius monimentis ſuſpicari licet, ex principiis longe diuerſis demonſtrationem ſuam petiiſſe videtur; quandoquidem ſe aſſeuerat ex eodem fonte demonſtraſſe: quod omnes plane numeri ſint ſummae numerorum vel trium trigonalium vel pauciorum; tum etiam ſummae quinque pentagonalium aut pauciorum; nec non ſummae ſex hexangonalium et ita porro, a qua generalitate noſtra determinatio longiſſime abeſt. Atque etiamnunc demonſtrationem ignoramus, quod omnis numerus ſit ſumma trium vel pauciorum trigonalium. Interim tamen circa hoc Theorema obſeruari conuenit, id tantum in numeris integris eſſe verum, dum alterum, quod hic demonſtrauimus etiam numeros fractos complectitur: omnes enim iſtae fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$ etc. nullo modo in ternos numeros trigonales reſolui ſe patiuntur, ſiue nullos valores rationales loco x, y, z inuenire licet, vt fiat

$$\frac{1}{2} = \frac{xx+x}{2} + \frac{yy+y}{2} + \frac{zz+z}{2},$$

quare, quod maxime mirandum videtur, haec aequatio:

$$1 = xx + x + yy + y + zz + z$$

eſt impoſſibilis, quicunque etiam numeri fracti pro x, y, z accipiantur.

CONSIDERATIONES CIRCA BRACHYSTOCHRONAS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Problema I.

Tab. I. Fig. 1. *Inuenire curuas Brachyſtochronas* A M, *ſuper quibus corpus breuiſſimo tempore ex* A *in* M *perueniat, dum ſcilicet, a grauitate naturali animatum, deſcenſum in puncto* A *inchoat.*

Solutio.

Sumto axe A P verticali ſint pro curua quaeſita coordinatae $AP = x$ et $PM = y$, atque ex natura motus conſtat fore celeritatem in puncto $M = 2\sqrt{gx}$, denotante g altitudinem lapſus vno minuto ſecundo, ita vt formula $2\sqrt{gx}$ denotet ſpatium vno minuto ſecundo hac velocitate percurrendum. Quum nunc, poſito $dy = p\,dx$, ſit elementum curuae $Mm = dx\sqrt{(1+pp)}$, erit tempus deſcenſus per arcum $AM = \int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{gx}}$, idque in minutis ſecundis expreſſum; quae formula, quum debeat eſſe minimum, ſi comparetur cum formula illa generali in diſſertatione: *Methodus noua et facilis calculum variationum tractandi* Vid. *Comment. Nouor. Tom. XVI.* ſcil. cum $\int Z\,dx$, dat $Z = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{gx}}$, et quia ibi poſuimus $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, habebimus pro noſtro caſu $M = -\frac{\sqrt{(1+pp)}}{4x\sqrt{gx}}$, $N = 0$, $P = \frac{p}{2\sqrt{gx(1+pp)}}$; quare, vt prima pars variationis ad nihilum redigatur, fieri oportet $0 = N - \frac{dP}{dx}$, hoc eſt $\frac{dP}{dx} = 0$, vnde fit $P = C$.

Po-

§. 2. Ponatur ergo ad vniformitatem obtinendam $\frac{p}{2\sqrt{gx(1+pp)}} = \frac{1}{2\sqrt{ga}}$, vt fiat $p\sqrt{a} = \sqrt{x(1+pp)}$, vnde colligitur $p = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}}$; nunc ob $dy = p\,dx$ pro curua quaesita nanciscimur hanc aequationem differentialem: $dy = dx\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, pro cuius integrali inueniendo capiatur in axe interuallum $AB = a$ et super AB tamquam diametro describatur semicirculus ANB, in quo erit applicata $PN = \sqrt{(ax-xx)}$, hinc

$$d.PN = \frac{\frac{1}{2}a\,dx - x\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$$

et differentiale arcus

$$d.AN = \frac{\frac{1}{2}a\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}},$$

atque hinc colligimus $d.AN - d.PN = \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}} = dy$, vnde patet esse $PM = y = AN - PN$; ex quo manifestum est, curuam inuentam esse cycloidem, prouolutione circuli, cuius diameter est a, sub recta horizontali AC natam.

§. 3. Deinde etiam patet arcum curuae quaesitae fore $AM = \int dx\sqrt{(1+pp)} = \int\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}} = 2a - 2\sqrt{(aa-ax)}$. Iam vero quum sit $BP = a - x$, ducta chorda BN media proportionalis inter BP et BA erit haec chorda $BN = \sqrt{(aa-ax)}$, sicque fit arcus $AM = 2AB - 2BN$. Promoueatur punctum P ad B vsque, quo pacto curua AM porrigetur vsque in E eritque E punctum cycloidis imum, ibique applicata $BE =$ arcui ANB, tum vero arcus $AME = 2AB$; hinc ergo prodibit arcus $EM = 2BN$. Dehinc vero continuetur curua AME vltra E, donec ad horizontalem redeat in D, eritque $AD = 2ANB$.

§. 4. Quoniam vero porro variatio continet membrum $dt\left(\frac{dy}{dt}\right)P$, vbi P est quantitas constans, euidens est hanc

hanc partem variationis non euanescere nisi sit $\left(\frac{dy}{dt}\right)=0$, atque hinc demum veram indolem huius quaestionis intelligimus, qua curua inuenta A M non absolute inter omnes curuas, sed inter eas tantum, quae per vtrumque terminum A et M transeunt, minimo gaudet tempore descensus.

§. 5. Inuestigemus autem etiam ipsum tempus, quo corpus ex A ad M pertingit, quod hac formula exprimitur

$$=\int\frac{dx\surd(1+pp)}{2\surd gx}=\int\frac{dx\surd a}{2\surd gx(a-x)}=\frac{1}{\surd ga}\int\frac{a\,dx}{2\surd(ax-xx)}$$
$$=\frac{1}{\surd ga}\int d.\,A.N,$$

sicque ipsum tempus per arcum A M in minutis secundis expressum $=\frac{AN}{\surd ga}$. Quare si ratio diametri ad peripheriam statuatur $1:\pi$, fiet arcus A N B $=\frac{1}{2}\pi a$; porro erit tempus descensus ad punctum imum per arcum A E $=\frac{\pi\surd a}{2\surd g}$, cuius duplum dabit tempus per arcum A E D, quod ergo est $\frac{\pi\surd a}{\surd g}$, ipsum vero spatium A D $=\pi a$.

§. 6. Notetur hic corpus quod in A quieuerat per solam grauitatis actionem in locum D transferri posse, cogitationem quidem ab omni resistentia abstrahendo; atque si spatium hoc A D vocetur $=s$, vt sit $a=\frac{s}{\pi}$, tempus, quo hoc modo corpus ex A in D pertingit, erit $=\frac{\surd\pi s}{\surd g}$, quod ergo tempus erit vnum minutum secundum, si capiatur $s=\frac{g}{\pi}$, atque hoc tempus est breuissimum, quo corpus ex A in D transferri potest, atque in genere corpus hoc modo per spatium quodcunque A D $=s$ transferetur eodem tempore, quo per altitudinem πs delabi potest.

§. 7. Quoniam formula, quae in hac curua est minimum, erat $\int\frac{dx\surd(1+pp)}{2\surd gx}$, ea pertinet ad casum quem in dissertatione citata §. 43. sumus contemplati; quare si ad nostram curuam in puncto M ducatur normalis M ω, omnes curuae proximae ipsi A M, quae ad hanc rectam

rectam M ω terminantur, hanc quoque habebunt proprietatem, vt pro iis variatio ſit nulla, hoc eſt vt omnes illae curuae aequalibus temporibus percurrantur; ſiquidem, quod probe notandum, omnes in eodem puncto A incipiant. Haec igitur recta M ω, quae ab omnibus curuis proximis arcus ſynchronos abſcindit, eos ſimul orthogonaliter ſecat.

§. 8. Quoniam aequatio pro curua A M inuenta $dy = \frac{x\,dx}{\surd(ax - xx)}$ eſt adhuc differentialis, per integrationem praeter conſtantem a, alia conſtans arbitraria ingredietur, qua effici poteſt vt initium curuae in datum punctum A incidat; quare ſi hoc punctum fuerit fixum, integrationem ita abſolui conuenit, vt ſumto $x = 0$, ſimul fiat $y = 0$. Quia autem adhuc conſtantem a pro arbitrio aſſumere licet, manifeſtum eſt aequationem noſtram infinitas continere lineas curuas: omnes ſcilicet cycloides a circulis quibuscunque genitas et in eodem puncto A inchoantes, quae omnes inter ſe ſunt ſimiles; atque hinc ſequens Problema reſoluere poterimus.

Problema II.

§. 9. *Deſcriptis ſuper recta horizontali* A D *infinitis cycloidibus, quae omnes in eodem puncto* A *incipiant, inuenire lineam curuam, quae omnes has cycloides ad angulos rectos traiiciat.*

Solutio.

§. 10. Sit curua AM vna quaecunque harum cycloidum, quae nata ſit ex circulo A N B, cuius diameter ergo vel radius hic vt variabilis eſt conſiderandus, vt ex eius variatione generatio omnium reliquarum cycloidum intelligi poſſit. Quum igitur quaeſtio huc ſit reducta, vt ab omnibus his cycloidibus arcus ſynchronos A M abſcindi opor- teat

Tab. I. Fig. 1.

teat, tempus autem descensus per arcum A M supra ita expressum sit inuentum $= \frac{AN}{\sqrt{g\,a}} = \frac{AN}{\sqrt{g.AB}}$, in omnibus his circulis vtcunque variatis perpetuo tantos arcus A N abscindi oportet, vt fiat $\frac{AN}{\sqrt{g.AB}}$ quantitas constans; tum vero ex singulis punctis N reperientur totidem puncta M, sumendo $PM = AN - PN$, siue concinnius $NM = AN$, atque omnia haec puncta M determinabunt traiectoriam quam quaerimus.

§. 11. Ponamus huius circuli indefiniti radium $AO = BO = r$, vt sit $AB = 2r$, et vocemus angulum $AON = \Phi$, eritque arcus $AN = r\Phi$ et applicata $PN = r \sin. \Phi$, abscissa vero $AP = r(1 - \cos. \Phi)$, quae si vocetur $= x$, eique respondens applicata traiectoriae $PM = y$, iam habebimus has determinationes: $x = r(1 - \cos. \Phi)$ et $y = r(\Phi - \sin. \Phi)$. Verum hic talis relatio inter r et Φ subsistere debet, vt fractio $\frac{AN}{\sqrt{g.AB}} = \frac{r\Phi}{\sqrt{2gr}} = \frac{\Phi\sqrt{r}}{\sqrt{2g}}$ semper constantem obtineat valorem.

§. 12. Statuamus ergo $\Phi\sqrt{r} = \sqrt{c}$, vt fiat $r = \frac{c}{\Phi^2}$, quo valore introducto pro coordinatis traiectoriae quaesitae habebimus has formulas:

$AP = x = \frac{c}{\Phi^2}(1 - \cos. \Phi)$ et $PM = y = \frac{c}{\Phi} - \frac{c \sin. \Phi}{\Phi^2} = \frac{c}{\Phi^2}(\Phi - \sin. \Phi)$.

Hinc autem pro directione curuae cognoscenda iuuabit etiam differentialia adnotasse, quae reperiuntur:

$dx = c\,d\Phi\left(\frac{\Phi \sin. \Phi - 2 + 2\cos. \Phi}{\Phi^3}\right)$; $dy = c\,d\Phi\left(\frac{-\Phi - \Phi\cos. \Phi + 2\sin. \Phi}{\Phi^3}\right)$

vnde anguli, quem tangens traiectoriae in M facit cum axe A B, tangens prodit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\Phi - \Phi\cos. \Phi + 2\sin. \Phi}{2 - 2\cos. \Phi - \Phi\sin. \Phi} = \frac{\Phi(1 + \cos. \Phi) - 2\sin. \Phi}{\Phi\sin. \Phi - 2(1 - \cos. \Phi)}$$

quae fractio reducitur ad hanc:

$$\frac{\cos. \frac{1}{2}\Phi(\Phi\cos. \frac{1}{2}\Phi - 2\sin. \frac{1}{2}\Phi)}{\sin. \frac{1}{2}\Phi(\Phi\cos. \frac{1}{2}\Phi - 2\sin. \frac{1}{2}\Phi)}$$

ita

ita vt habeamus $\frac{dy}{dx} = -\cot.\frac{1}{2}\Phi$; vnde patet angulum illum, cuius tangens eſt $-\frac{dy}{dx}$, fore $= 90° - \frac{1}{2}\Phi$. Hinc porro, ſi elementum curuae vocetur ds erit $\frac{dx}{ds} = \text{ſin.}\frac{1}{2}\Phi$ et $\frac{dy}{ds} = -\text{coſ.}\frac{1}{2}\Phi$, vnde colligitur

$$ds = c\,d\Phi\frac{(\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi - 2(1 - \text{coſ.}\,\Phi))}{\Phi^3\,\text{ſin.}\frac{1}{2}\Phi}$$

$$= 2c\,d\Phi\frac{(\Phi\,\text{coſ.}\frac{1}{2}\Phi - 2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}\Phi)}{\Phi^3},$$

vnde per reductiones obtinemus:

$$\frac{s}{2c} = \frac{\text{ſin.}\frac{1}{2}\Phi}{\Phi^2} + \int\frac{1}{2}\frac{d\Phi\,\text{coſ.}\frac{1}{2}\Phi}{\Phi^2} = \frac{\text{ſin.}\frac{1}{2}\Phi}{\Phi^2} - \frac{1}{2}\frac{\text{coſ.}\frac{1}{2}\Phi}{\Phi} - \frac{1}{4}\int\frac{d\Phi\,\text{ſin.}\frac{1}{2}\Phi}{\Phi}$$

denique radius oſculi traiectoriae in puncto M eſt

$$4c\frac{(\Phi\,\text{coſ.}\frac{1}{2}\Phi - 2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}\Phi)}{\Phi^3}$$

qui ergo etiam hoc modo exprimi poteſt:

$$\frac{2ds}{d\Phi} = \frac{2dx}{d\Phi\,\text{ſin.}\frac{1}{2}\Phi} = \frac{-2dy}{d\Phi\,\text{coſ.}\frac{1}{2}\Phi} = \frac{-dx}{d.\,\text{coſ.}\frac{1}{2}\Phi} = \frac{+dy}{d.\,\text{ſin.}\frac{1}{2}\Phi}.$$

§. 13. His praenotatis in praecipua ſymptomata et proprietates huius traiectoriae inquiramus, ac primo quidem ſumamus angulum $\Phi = 0$, ſeu infinite paruum, atque reperiemus abſciſſam $x = \frac{c}{2}$ et applicatam $y = 0$. Sumatur ergo in axe verticali altitudo $AG = \frac{1}{2}c$, eritque punctum G initium traiectoriae ſurſum vergentis, quae ad verticalem erit normalis ob $\frac{dy}{dx} = \infty$; at vero radius oſculi in hoc puncto G erit $4c\frac{(\Phi\,\text{coſ.}\frac{1}{2}\Phi - 2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}\Phi)}{\Phi^3}$, poſito $\Phi = 0$, qui valor reperitur $= \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}AG$. Hic notaſſe iuuabit, tempus deſcenſus per hanc altitudinem AG praeciſe conuenire cum tempore omnium arcuum ſynchronorum AM.

Tab. I. Fig. 2.

§. 14. Crescente angulo Φ curua haec sursum flectitur, ad cuius tractum cognoscendum sumamus angulum $\Phi = 90° = \frac{\pi}{2}$ eritque sin. $\frac{1}{2}\Phi =$ cos. $\frac{1}{2}\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vnde abscissa $x = \frac{4c}{\pi^2}$ et applicata $y = \frac{4c}{\pi^2}(\frac{\pi}{2} - 1)$; hoc porro loco $-\frac{dy}{dx} = 1$, quod indicat, tangentem in hoc puncto cum adplicata angulum semirectum facere. Hic vero radius osculi erit $\frac{16c(\pi - 4)}{\pi^3\sqrt{2}}$, vel mutato signo, vti etiam pro puncto G fecimus, erit radius osculi $= \frac{16c(4 - \pi)}{\pi^3\sqrt{2}}$, cuius valor est propemodum $0,313.c$ ideoque paulisper minor quem in puncto G.

§. 15. Sumamus nunc $\Phi = 180° = \pi$, et abscissa prodibit $x = \frac{2c}{\pi\pi}$ et applicata $y = \frac{c}{\pi}$; tum vero fit $-\frac{dy}{dx} = 0$, vnde tangens curuae in hoc puncto erit verticalis, ac propterea ista applicata P M omnium maxima. Per fractiones autem decimales pro hoc puncto reperitur abscissa $x = 0,2026.c$ et $y = 0,318.c$. Radius osculi denique in hoc puncto colligitur mutato signo $= \frac{8c}{\pi^3}$, proxime $= 0,258.c$ sicque curuatura continuo diminuitur.

§. 16. Ponamus nunc $\Phi = 2\pi$, vt fiat sin. $\frac{1}{2}\Phi = 0$, cos. $\frac{1}{2}\Phi = -1$; ibi ergo erit abscissa $x = 0$ et applicata $y = \frac{c}{2\pi}$. Hic ergo curua ad summam lineam horizontalem pertingit, eiusque distantia a puncto A semissis est applicatae maximae, quippe quae erat $\frac{c}{\pi}$. Quum vero hic fiat $-\frac{dy}{dx} = \infty$, tangens curuae erit ipsa recta horizontalis suprema. Hoc porro loco radius osculi colligitur $= \frac{c}{\pi\pi}$, proxime $= 0,101.c$, ita vt adhuc curuatura diminuatur.

§. 17. Statuamus porro $\Phi = 3\pi$, vt fiat

$$\text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\Phi = -1 \ \text{et cos.}\ \tfrac{1}{2}\Phi = 0.$$

Pro hoc ergo loco fit abscissa $x = \frac{2c}{9\pi^2}$, proxime $= 0,022.c$ et

et applicata $y = \frac{c}{3\pi}$; tum vero ob $-\frac{dy}{dx} = 0$, tangens in hoc loco erit verticalis, atque radius osculi $= -\frac{8c}{9\pi^3}$, vnde curua iam curuaturam mutauit, et, antequam huc peruenit, alicubi radius osculi euanuerit necesse est, quod euenit sumendo $\Phi = 2$ tang. $\frac{1}{2}\Phi$. Ad hunc locum inueniendum ponamus fuisse $\Phi = 3\pi - \omega$ eritque

$$3\pi - \omega = 2 \text{ tang.} \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right) = \text{cot.} \tfrac{1}{2}\omega$$

vnde patet angulum ω esse satis paruum. Ibi vero curua punctum flexus contrarii habuerit necessum est, ex quo sursum reflectendo ad eum locum pertingit, quem hic definiuimus.

§. 18. Ponendo iam $\Phi = 4\pi$, quo casu fit

$$\text{sin.} \tfrac{1}{2}\Phi = 0 \quad \text{et} \quad \text{cos.} \tfrac{1}{2}\Phi = 1$$

abscissa euadit $x = 0$ et applicata $y = \frac{c}{4\pi}$, hicque tangens iterum fit horizontalis ob $-\frac{dy}{dx} = \infty$; radius osculi vero reperitur $= -\frac{c}{4\pi\pi}$, qui scilicet est negatiuus ob cuspidem praecedentem. Hic ergo curuatura quadruplo maior est, quam casu $\Phi = 2\pi$.

§. 19. Ponamus nunc in genere $\Phi = 2n\pi$, existente n numero integro quocunque, et ob sin. $\Phi = 0$ et cos. $\Phi = 1$ erit abscissa $AP = x = 0$ et applicata

$$PM = y = \frac{c}{2n\pi} = \frac{0,159155 . c}{n},$$

deinde quum sit

$$-\frac{dy}{dx} = \text{cot.} \tfrac{1}{2}\Phi = \text{tang. } ATM,$$

ita vt sit angulus $ATM = 90° - \frac{1}{2}\Phi$, erit hic angulus $ATM = 90° - n\pi$, hoc est rectus, seu tangens MT erit horizontalis; tum vero radius osculi in hoc loco erit

$$= -\frac{c \cos. n\pi}{nn\pi\pi} = -\frac{0,101321 . c . \cos. n\pi}{nn},$$

vbi cos. $n\pi$ est vel $+1$ vel -1, prouti n fuerit numerus vel par vel impar.

§. 20. At si fuerit $\Phi = (2n+1)\pi$, ob sin. $\Phi = 0$ et cos. $\Phi = -1$, erit abscissa

$$AP = x = \frac{2c}{(2n+1)^2 \pi\pi} = \frac{0,202642.\,c}{(2n+1)^2} \text{ et applicata}$$

$$PM = y = \frac{c}{(2n+1)\pi} = \frac{0,318310.\,c}{2n+1}$$

deinde vero prodit angulus

$$ATM = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\Phi = 90^\circ - \frac{(2n+1)\pi}{2},$$

siue tangens in his locis erit verticalis. Radius osculi denique reperitur

$$= \frac{8\,c.\,\text{sin.}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi}{(2n+1)^3.\,\pi^3} = \frac{0,258012.\,c.\,\text{sin.}\,(n+\frac{1}{2})\pi}{(2n+1)^3}$$

vbi sin. $(n+\frac{1}{2}\pi)$ est vel $+1$ vel -1, prouti numerus n fuerit vel par, vel impar.

§. 21. Iam obseruauimus paulisper ante ista loca radium osculi euanescere ibique curuam cuspide esse donatam: singulas igitur has cuspides inuestigasse operae erit pretium. Ex formula autem generali liquet, radium osculi euanescere, quoties fuerit

$$\Phi = 2\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi = \frac{2\,\text{sin.}\,\Phi}{1+\text{cos.}\,\Phi} = \frac{2(1-\text{cos.}\,\Phi)}{\text{sin.}\,\Phi}$$

quae aequatio innumerabiles admittit solutiones, vti mox videbimus. Nunc autem pro his casibus statim manifestum est fore abscissam $x = \frac{c\,\text{sin.}\,\Phi^2}{4(1-\text{cos.}\,\Phi)} = \frac{c(1+\text{cos.}\,\Phi)}{4}$ et applicatam $y = \frac{1}{4}c.\,\text{sin.}\,\Phi$; tum vero in his cuspidibus tangens ad verticalem inclinatur angulo $= 90^\circ - \frac{1}{2}\Phi$, atque adeo ad horizontalem AD angulo $= \frac{1}{2}\Phi$.

§. 22. Quoniam istae cuspides reperiuntur in locis, vbi angulus Φ aliquanto minor est quam $(2n+1)\pi$, ad eas inueniendas ponamus $\Phi = (2n+1)\pi - 2\omega$, vt sit $\frac{1}{2}\Phi = (n+\frac{1}{2})\pi - \omega$, qui ergo arcus aequari debet

$$= \text{tang.}\,((n+\tfrac{1}{2})\pi - \omega) = \frac{1}{\text{tang.}\,\omega} = \frac{\text{cos.}\,\omega}{\text{sin.}\,\omega}$$

ita vt habeatur haec aequatio: $(n+\frac{1}{2})\pi - \omega = \frac{\text{cos.}\,\omega}{\text{sin.}\,\omega}$, ex qua quaeri oportet omnes valores anguli ω; vbi statim appa-

ret

ret, si numerus n esset infinitus, fore $\pi = 0$; ex quo intelligitur, quo maior sit numerus n, eo minorem prodire angulum ω. Ponamus ergo breuitatis gratia $(n+\frac{1}{2})\pi = \alpha$ et multiplicando per sin. ω habebimus $\alpha \sin.\omega - \omega \sin.\omega = \cos.\omega$; sed quia angulus ω est satis exiguus, ideoque vero proxime $\sin.\omega = \omega - \frac{1}{6}\omega^3 + \frac{1}{120}\omega^5$ et $\cos.\omega = 1 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{24}\omega^4$ nostra aequatio hanc induet formam:

$$0 = 1 - \alpha\omega + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\alpha\omega^3 - \frac{1}{8}\omega^4 - \frac{1}{120}\alpha\omega^5 + \frac{1}{144}\alpha\omega^6 + \frac{1}{5040}\alpha\omega^7.$$

§. 23. Si termini post duos priores negligantur, sequitur $\omega = \frac{1}{\alpha}$, qui ergo est valor prope verus; pro vero ergo ponamus

$$\omega = \frac{1}{\alpha} + \frac{A}{\alpha^3} + \frac{B}{\alpha^5} + \frac{C}{\alpha^7}$$

cuius potestates dabunt

$$\omega^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2A}{\alpha^4} + \frac{2B+AA}{\alpha^6}$$

$$\omega^3 = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{3A}{\alpha^5} + \frac{3AA+3B}{\alpha^7}$$

$$\omega^4 = \frac{1}{\alpha^4} + \frac{4A}{\alpha^6}$$

$$\omega^5 = \frac{1}{\alpha^5} + \frac{5A}{\alpha^7}$$

$$\omega^6 = \frac{1}{\alpha^6}$$

$$\omega^7 = \frac{1}{\alpha^7}$$

Substituantur igitur isti valores et termini in columnas disponantur secundum potestates ipsius α, sequenti modo:

$\frac{1}{\alpha^0}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha^4}$	$\frac{1}{\alpha^6}$
1			
-1	$-A$	$-B$	$-C$
	$+\frac{1}{2}$	$+1A$	$+\frac{2B+AA}{2}$
	$+\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2}A$	$+\frac{AA}{2}+\frac{B}{2}$
		$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}A$
		$-\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{24}A$
			$+\frac{1}{144}$
			$+\frac{1}{5040}$

Quia

Quia prima columna per ſe euaneſcit, ſingulae ſequentium ſeorſim ad nihilum redigantur, vnde prodibunt ſequentes aequationes:

$-A+\frac{2}{3}=0;\ -B+\frac{3}{2}A-\frac{2}{15}=0;\ -C+\frac{3}{2}B+AA-\frac{13}{24}A+\frac{1}{140}=0.$

Ex harum prima reperitur $A=\frac{2}{3}$, qui valor ſubſtitutus in ſecunda dat $B=\frac{13}{15}$ et $-C+\frac{13}{10}+\frac{4}{9}-\frac{13}{36}+\frac{1}{140}=0$, vnde $C=\frac{146}{105}$.

§. 24. His itaque inuentis angulus quaeſitus ω ita exprimitur vt ſit

$$\omega=\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\alpha^3}+\frac{13}{15.\alpha^5}-\frac{146}{105.\alpha^7}$$

exiſtente $\alpha=(2n+\frac{1}{2})\pi$; vbi notandum eſt arcum ω hoc modo exprimi in partibus radii; vnde is in minutis ſecundis reperietur, ſi a logarithmo ω ſubtrahatur 4,6855749. Hanc autem reductionem ſtatim obtinebimus, ſi a logarithmis numeratorum illorum quatuor hic logarithmus conſtans ſtatim ſubtrahatur; ſcilicet primae fractionis logarithmus eſt $5,3144251-l\alpha$; ſecundae fractionis logarithmus eſt $5,1383338-3\,l\alpha$; tertiae partis logarithmus eſt $5,2522772-5\,l\alpha$ et logarithmus quartae fractionis $5,1712615-7\,l\alpha$.

§. 25. Sumamus nunc pro n ſucceſſiue 1, 2, 3, 4 etc. et quum ſit $\pi=3,14159265$ etc. habebimus ſequentes valores pro logarithmo α, vnde reperitur

ſi $n=1$ erit Log. $\alpha=0,6732411$; $\omega=12°,32',24''$
ſi $n=2$ erit Log. $\alpha=0,8950898$; $\omega=7°,22',32''$
ſi $n=3$ erit Log. $\alpha=1,0412178$; $\omega=5°,14',23''$
ſi $n=4$ erit Log. $\alpha=1,1503623$; $\omega=4°,3',59''$
ſi $n=5$ erit Log. $\alpha=1,2375225$; $\omega=3°,19',24''$.

§. 26. Quum igitur poſuiſſemus $\Phi=(2n+1)\pi-2\omega$ pro qualibet cuſpide habebimus abſciſſam

$$x=\tfrac{1}{4}c(1-\text{cof.}\,2\omega)=\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\,\omega^2$$

et

et applicatam

$$y = \tfrac{1}{4} c \sin. 2\omega = \tfrac{1}{2} c \sin. \omega. \cos. \omega$$

ita vt ſit $\frac{x}{y} = \text{tang.}\, \omega$; deinde vero angulus

$$ATM = \omega - n\pi = n\pi + \omega,$$

ſeu ſimpliciter $= \omega$, ex quibus ſingularum cuſpidum poſitio innoteſcit.

Problema III.

§. 27. *In genere inveſtigare curuas Brachyſtochronas, quomodocunque celeritates per binas coordinatas* x *et* y *determinentur.*

Solutio.

§. 28. Sit curua AM brachyſtochrona quaeſita, in cuius puncto M ſit celeritas functio quaecunque coordinatarum x et y, quam ponamus $= \frac{1}{v}$, ſitque $dv = m\,dx + n\,dy$. Quia igitur tempus per arcum AM eſt $\int v\,dx \sqrt{(1+pp)}$ idque debet eſſe minimum, in forma noſtra generali fit $Z = v\sqrt{(1+pp)}$ hincque $M = m\sqrt{(1+pp)}$, $N = n\sqrt{(1+pp)}$ et $P = \frac{vp}{\sqrt{(1+pp)}}$; quare quum pro curua quaeſita ſit $0 = N - \frac{dP}{dx}$, habebimus ſequentem aequationem:

$$0 = n\,dx\sqrt{(1+pp)} - d.\left(\frac{vp}{\sqrt{(1+pp)}}\right) = n\,dx\sqrt{(1+pp)} - \frac{p(m\,dx + n\,dy)}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{v\,dp}{(1+pp)^{3:2}}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\frac{n\,dx - m\,dy}{v} = \frac{dp}{1+pp},$$

quam, quibusnam in caſibus integrare liceat, inueſtigemus.

§. 29. Vt priorem partem integrabilem reddamus, multiplicemus per

$$\frac{dv}{n\,dx - m\,dy} = \frac{m\,dx + n\,dy}{n\,dx - m\,dy} = \frac{m + np}{n - mp}$$

vt prodeat hac aequatio: $\frac{dv}{v} = \frac{dp(m+np)}{(1+pp)(n-mp)}$, cuius ſtatim duo ſe offerunt caſus, quibus ea integrationem admittit:

 alter

alter si $n = 0$, alter vero si $m = 0$; quos ambos data opera euoluamus.

§. 30. Sit igitur primo $n=0$, quod euenit si v fuerit functio ipsius x tantum, quae sit $v = X$; ac tum aequatio nostra erit: $\frac{dv}{v} = \frac{dX}{X} = -\frac{dp}{p(1+pp)}$, cuius integrale est

$$LX = L\sqrt{(1+pp)} - Lp + LA$$

sicque fiet $X = \frac{A\sqrt{(1+pp)}}{p}$, vnde colligitur

$$p = \frac{A}{\sqrt{(XX-AA)}} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{X}{\sqrt{(XX-AA)}};$$

tum vero, ob $dy = p\,dx$, aequatio pro brachystochrona resultat $dy = \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX-AA)}}$; vbi notandum, constantem arbitrariam A infinitas huiusmodi brachystochronas comprehendere. Sequens autem integratio ita expediri potest, vt curua in dato puncto, verbi gratia in A, incipiat: at vero formula minimi pro hoc casu erit $\int \frac{X^2\,dx}{\sqrt{(XX-AA)}}$.

§. 31. Sit iam $m=0$, siue v functio solius y, quae sit $v = Y$ atque nostra aequatio fit: $\frac{dv}{v} = \frac{dY}{Y} = \frac{p\,dp}{1+pp}$, cuius integrale est $LC = L\sqrt{(1+pp)} + LA$, siue $Y = A\sqrt{(1+pp)}$, vnde fit

$$p = \frac{\sqrt{(YY-AA)}}{A} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{Y}{A}.$$

Hinc ob $p = \frac{dy}{dx}$ aequatio inter coordinatas colligitur $dx = \frac{A\,dy}{\sqrt{(YY-AA)}}$: at formula minimi pro his curuis erit $\int \frac{Y^2\,dy}{\sqrt{(YY-AA)}}$, qui casus a praecedente prorsus non discrepat, et ex eo per solam commutationem coordinatarum immediate deduci potuisset. Caeterum hic iterum effici potest, vt omnes istae curuae in eodem dato puncto incipiant.

§. 32. Praeter hos autem duos casus datur adhuc tertius hoc modo eruendus: alterum membrum $\frac{dp(n+xp)}{(1+pp)(n-xp)}$ resoluetur in duas fractiones, quarum alterius denominator sit $1+pp$, alterius vero $n-mp$, atque elicietur ista aequatio: $\frac{dv}{v} = \frac{p\,dp}{1+pp} + \frac{m\,dp}{n-mp}$, quae manifesto est integrabilis,

bilis, si fuerit $m = x$ et $n = y$, quod idem euenit, si fuerit $m = s\,x$ et $n = s\,y$; tum enim aequatio nostra

$$\frac{dv}{v} = \frac{p\,dp}{1+pp} + \frac{x\,dp}{y-px}$$

integrata dat

$$L\,v = L\,\sqrt{(1+pp)} - L\,(y-px) + L\,A,$$

siue $v = \frac{A\sqrt{(1+pp)}}{y-px}$. Iam vero quantitatem v ex hac conditione definiri oportet: $dv = s\,(x\,dx + y\,dy)$; vnde perspicuum est s esse debere functionem ipsius $\sqrt{(xx+yy)}$, vnde etiam v aequabitur functioni eiusdem formulae $\sqrt{(xx+yy)}$. Hic quidem euidens est loco x et y sumi potuisse $x+a$ et $y+b$: at quia hoc non curuae mutarentur sed tantum positio axis, hanc varietatem considerare superfluum foret. Quare si initium harum curuarum detur, veluti in A, tum non opus est, vt pro hoc puncto sit $x = 0$ et $y = 0$, sed quantitates constantes quaecunque admitti possunt.

§. 33. Quodsi ergo v fuerit functio quaecunque quantitatis $\sqrt{(xx+yy)}$, pro brachystochronis habebimus hanc aequationem:

$$v\,(y-px) = A\sqrt{(1+pp)},$$

ex qua elicimus

$$p = \frac{vvxy \pm A\sqrt{(vv(xx+yy)-AA)}}{vvxx-AA}.$$

Quia nunc $p = \frac{dy}{dx}$, nanciscimur hanc aequationem differentialem:

$$dy\,(vvxx-AA) = vvxy\,dx + A\,dx\sqrt{(vv(xx+yy)-AA)}$$

quam autem, quomodo tractare oporteat, ex hac forma vix patet.

§. 34. Vtamur autem sequenti substitutione: ponamus $\sqrt{(xx+yy)} = u$, et $y = tx$, ita vt aequatio ad binas tantum variabiles t et u sit reducenda; at per eas x et y ita determinantur, vt sit $x = \frac{u}{\sqrt{(1+tt)}}$ et $y = \frac{tu}{\sqrt{(1+tt)}}$, ex quorum differentialibus colligitur

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{tdu(1+tt)+udt}{du(1+tt)-utdt}$$

qui valores, in ſuperiori expreſſione pro p inuenta ſubſtituti, praebent

$$\frac{tdu(1+tt)+udt}{du(1+tt)-utdt} = \frac{vvtuu \pm A(1+tt)\sqrt{(vvuu-AA)}}{vvuu-AA(1+tt)}$$

quae a fractionibus liberata abit in hanc:

$$udt(vvuu-AA(1+tt))+tdu(1+tt)(vvuu-AA(1+tt))$$
$$= -utdt(vvtuu \pm A(1+tt)\sqrt{(vvuu-AA)}$$
$$+du(1+tt)(vvtuu \pm A)1+tt)\sqrt{(vvuu-AA)})$$ ſeu
$$0 = udt(1+tt)(vvuu-AA \pm A\sqrt{(vvuu-AA)})$$
$$-Adu(1+tt)^2(A \pm \sqrt{(vvuu-AA)}).$$

Haec aequatio reducitur ad hanc:

$$\frac{dt}{1+tt} = \frac{Adu(A \pm \sqrt{(vvuu-AA)})}{u(vvuu-AA \pm A\sqrt{(vvuu-AA)})}$$

quae manifeſto in hanc formam transfunditur:

$$\frac{dt}{1+tt} = \pm \frac{Adu}{u\sqrt{(vvuu-AA)}}$$

vbi ambae variabiles t et u a ſe inuicem ſunt ſeparatae, ideoque hinc curuas conſtruere licet.

§. 35. Num autem praeter hos caſus alii adhuc dentur, qui conſtructionem admittant, merito dubitamus, niſi forte quis adiungere velit eiusmodi caſus, qui per immutationem coordinatarum reſultant, dum ipſae lineae curuae prorſus manent eaedem. Ita aequatio primo inuenta $\frac{dv}{v} = \frac{dp(m+np)}{(1+pp)(n-mp)}$ etiam integrabilis euadit, ſumendo $m = \alpha s$ et $n = \beta s$, ſiquidem hinc oritur iſta aequatio:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dp(\alpha+\beta p)}{(1+pp)(\beta-\alpha p)} = \frac{pdp}{1+pp} + \frac{\alpha dp}{\beta-\alpha p},$$

cuius integrale fit $Lv = L\sqrt{(1+pp)} - L(\beta-\alpha p) + LA$ ſiue $v = \frac{A\sqrt{(1+pp)}}{\beta-\alpha p}$. Quoniam vero tum fit $dv = s(\alpha dx + \beta dy)$ euidens eſt quantitatem v fore functionem formulae $\alpha x + \beta y$. Vnde ſi coordinatae ita mutentur, vt $\alpha x + \beta y$ iam fiat ipſa

ipsa abscissa, habebitur casus, quo v est functio quaecunque abscissae, qui igitur conuenit cum casu nostro primo.

§. 36. Calculus hic non parum molestus facilius ita expediri potest. Quum sit $p = \frac{tdu(1+tt)+udt}{du(1+tt)-utdt}$, erit $y-px = -\frac{uudt\sqrt{(1+tt)}}{du(1+tt)-utdt}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{\sqrt{(1+tt)((1+tt)du^2+uudt^2)}}{du(1+tt)-utdt}$, vnde aequatio primo inuenta $v(y-px) = A\sqrt{(1+pp)}$ transmutatur in hanc:

$$-vuudt = A\sqrt{((1+tt)du^2+uudt^2)}$$

ex qua sumtis quadratis elicitur

$$\frac{dt}{1+tt} = \pm \frac{A\,du}{u\sqrt{(vvuu-AA)}}$$

prorsus vt ante. Caeterum euidens est, hanc curuam esse brachystochronam, pro vi centripeta, functioni cuicunque distantiarum proportionali.

§. 37. In his igitur tribus casibus solutionem perducere licuit ad aequationes differentiales primi gradus, quae ob constantem A, si ea successiue varietur, infinitas curuas huius generis complectuntur; atque si hae aequationes denuo integrentur, noua constans introducenda ex dato cuiusque curuae initio A definiri poterit. Hoc modo ergo effici potest, vt omnes illae infinitae brachystochronae ex eodem puncto A originem ducant, atque ad hunc casum sequens Problema est accommodatum.

Problema IV.

§. 38. *Descriptis in plano infinitis brachystochronis* A M *inuenire curuas, quae illas omnes orthogonaliter traiiciant.*

Tab. I. Fig. 3.

Solutio.

§. 39. Sit AM vna harum brachystochronarum quaecunque, ad quam in puncto M constituatur recta normalis Ma, atque supra ostendimus, si infinitae aliae lineae A μ, ipsi A M proximae et ad hanc rectam M a terminatae, quae quidem in eodem puncto A incipiant, concipiantur, tum

variationem temporis pro iis omnibus fore nullam, ſiue tempus per curuam proximam A μ praeciſe aequale eſſe tempori per A M, vbicunque punctum μ in recta M a accipiatur, dummudo ipſi M fuerit proximum. Verum ne opus ſit demonſtrationem huius veritatis altius repetere, hic eam ſuccinctius ex ipſa natura brachyſtochronismi doceamus.

Tab. I. Fig. 4.

§. 40. Demonſtrandum ſcilicet eſt: vt arcus proximi A M et A μ ſint iſochroni elementum M μ neceſſario ad vtramque curuam normale eſſe debere. Si quis enim hoc negauerit, ei ſtatuendum eſt, angulum A M μ vel eſſe acutum vel obtuſum; vtrumque autem ad abſurdum ſequenti modo deducetur. Sit enim primo angulus A M μ acutus, et ad M μ ex puncto μ agatur normalis $\mu\,\alpha$, curuae A M in α occurrens, eritque $\alpha\,\mu < \alpha$ M; vnde ſi corpus percurrat viam A $\alpha\,\mu$, eam abſoluet breuiori tempore, quam viam AαM, quia vtrinque in α celeritas eſt eadem, at ſpatium $\alpha\,\mu$ breuius quam α M. Quum igitur per hypotheſin tempus per curuam A μ aequale ſit tempori per A M, nunc tempus per A $\alpha\,\mu$ breuius foret quam tempus per Aμ, ideoque ipſa linea Aμ non foret brachyſtochrona, quod eſt contra hypotheſin, quandoquidem hic aſſumimus curuam A μ eſſe brachyſtochronam ipſi A M proximam.

§. 41. Simili modo ſi angulus A M μ fuerit obtuſus, ad M μ ex puncto M agatur normalis M α, erit α M $< \alpha\,\mu$; vnde tempus per viam A $\alpha\,\mu$ breuius foret quam per A $\alpha\,\mu$. ideoque etiam breuius quam per A M, ideoque curua A M non foret brachyſtochrona, itidem contra hypotheſin. Ex quo conficitur, lineolam M μ neceſſario ad vtramque brachyſtochronam A M et A μ eſſe perpendicularem.

Fig. 3.

§. 42. Quod ſi ergo ab omnibus noſtris brachyſtochronis arcus ſynchronos A M et A μ abſcindamus, qui ſcilicet omnes eodem tempore abſoluantur, tum omnia puncta M μ reperientur in eiusmodi linea curua, quae om-

omnes brachyſtochronas ad angulos rectos ſecabit. Quum igitur tempus elementare ſupra fuerit $v\,dx\,\sqrt{(1+pp)}$, a qualibet brachyſtochronarum AM reſcindatur arcus AM, pro quo formula integralis $\int v\,dx\,\sqrt{(1+pp)}$ nanciſcatur valorem datum, puta C. Ex quo ſimul perſpicuum eſt, ſi etiam haec quantitas C varietur, hoc modo infinitas traiectorias orthogonales eſſe prodituras.

§. 43. Quae quo clariora reddantur, conſideremus caſum primum ſupra §. 30 deſcriptum, in quo pro curvis brachyſtochronis inuenimus hanc aequationem differentialem $dy = \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}}$; vbi quidem variabilitas litterae A infinitas noſtras brachyſtochronas producit: verum inſuper haec conditio abſolute neceſſaria adiungi debet, vt omnes iſtae curuae idem commune habeant initium in puncto A. Hoc ergo obſeruato, capiatur punctum M ita, vt formula integralis $\int \frac{XX\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}}$ datum obtineat valorem, puta C; vbi iterum probe tenendum eſt, hoc integrale ita capi debere, vt in initio A euaneſcat; tum autem punctum M ſimul erit in traiectoria orthogonali.

§. 44. Vt exemplo rem illuſtremus ſumamus $X = \sqrt{x}$ et $A = \sqrt{a}$, vt aequatio pro curuis ſecandis habeatur $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(x-a)}}$, ſeu integrando $2\sqrt{(ax - aa)} = y +$ conſt. vbi conſtantem ita definire oportet, vt omnes curuae in eodem puncto A incipiant. Ponamus ergo pro hoc initio fieri $x = f$ et $y = g$; ita vt hae litterae neutiquam ab a pendeant. Quare, vt hoc eueniat, conſtans illa debet eſſe $2\sqrt{(af - ga)} - g$; ſicque pro curuis ſecundis habetur haec aequatio: $2\sqrt{(ax - aa)} - 2\sqrt{(af - aa)} = y - g$; vbi euidens eſt litteram a, etſi variabilem, vltra f augeri non poſſe. Tum autem pro traiectoriis capi debebit $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)}} = C$, et integrando vt ſupra eſt praeſcriptum, ſcilicet vt integrale pro initio A euaneſcat:

2 ($\frac{2}{3}$

$$2\left(\tfrac{2}{3}a+\tfrac{1}{3}x\right)\sqrt{(x-a)}-2\left(\tfrac{2}{3}a+\tfrac{1}{3}f\right)\sqrt{(f-a)}$$

quod cuipiam quantitati datae, puta c, aequale positum dat:

$$(2a+x)\sqrt{(x-a)}-(2a+f)\sqrt{(f-a)}=\tfrac{3c}{2}.$$

Ex qua aequatione pro data curua A M, ad quam A refertur, definiatur abscissa x, indeque porro applicata y ope aequationis superioris:

$$y=2\left(\sqrt{(ax-aa)}-\sqrt{(af-aa)}\right)+g,$$

vt innotescat punctum M. At si quis desideret aequationem pro traiectoria ista orthogonali inter easdem coordinatas x et y, is tantum ex binis aequationibus inuentis quantitatem a eliminet, vt obtineat aequationem, in qua tantum occurrant litterae x, y cum constantibus f, g et c. Hac enim aequatione natura traiectoriae exprimetur.

§. 45. Ex hoc exemplo perspicuum est, quomodo huiusmodi casus tractari oporteat, vbi integratio non succedit: semper enim integratio tamquam cognita est spectanda, etiamsi fuerit transcendens, quo pacto quasi nouae litterae f et g ingrediuntur, quippe quae sunt coordinatae pro initio curuarum dato; deinde vero ipsa rei natura satis monstrat, quomodo reliquae operationes suscipi debeant.

§. 46. Cum olim problema traiectoriarum orthogonalium tanto studio esset tractatum, casus quem modo euoluimus imprimis omni attentione dignus est visus, atque hoc modo erat vere enunciatus:

Si curuarum secundarum natura expressa fuerit tali aequatione differentiali: $dy=\frac{A\,dx}{\sqrt{(XX-AA)}}$, tum traiectoria determinari debet ex hac aequatione: $\int\frac{XX\,dx}{\sqrt{(XX-AA)}}=C$. Verum sequentes conditiones necessario subintelligi debent: vt primo omnes curuae secundae in communi quodam puncto incipiant, deinde vt posterius integrale in ipso illo initio euanescat.

DE

DE INTEGRATIONE
AEQVATIONIS DIFFERENTIO - DIFFERENTIALIS
$$\frac{ddz}{dt^2} + \frac{2m\,dz}{dt} + nz = a \text{ fin. } ct + b \text{ cof. } ct$$
ALIARVMQVE EIVSDEM GENERIS.

Auctore

NICOLAO FVSS.

§. 1.

Quanquam generalis methodus huiusmodi aequationes differentiales fecundi gradus integrandi iam pridem a fummo Calculi Integralis Promotore, *L. Eulero*, in fuis huiusce calculi inftitutionibus fuerit expofita, praetereaque Geometrarum aliqui multum in hoc eodem argumento, fummoque cum fucceffu, laborauerint: applicationes tamen harum methodorum generalium ad cafus fpecialiores haud leues faepius offendunt difficultates calculosque valde operofos requirunt. Vnde non inutile effe duxi, fi methodos quasdam, quarum ope huiusmodi aequationes fpeciales integrare licet, in hifce pagellis propofuero.

§. 2. Occafionem autem ad huiusmodi aequationes tractandas mihi praebuit Lemma a *Rev. P. Frifio* in Cosmographiae fuae Phyficae et Mathematicae Tomo I. prolatum; quo, in fubfidium determinationis orbitae Lunaris, libro IV. inftitutae, affirmatur, huius aequationis differentio - differentialis:

$$ddt + a^2 t\,dz^2 = b\,dz^2 + c\,dz^2 \text{ cof. } mz$$

(cuius confimilem ex confideratione radii vectoris et actionis virium perturbatricium petierat) integrale effe:

$$t = \frac{b}{aa}(1 - \text{cof. } az) + \frac{c(\text{cof. } mz - \text{cof. } az)}{aa - mm}$$

quod quidem integrale ope multiplicatoris cof. $a z$ facili negotio eruitur. Verum fi in parte dextra plura huius formae membra variabilem z inuoluentia accedant, haec integratio magis magisque praegrauatur; vnde haud inutile erit methodum exponere, qua integralia talium aequationum differentialium fecundi gradus pro quolibet membrorum numero inueftigari queant.

§. 3. Sit igitur propofita haec aequatio differentio-differentialis:

$$d d t + a a t d z^2 = \Theta d z^2$$

vbi Θ denotat functionem quamcunque ipfius z; at fi aequationem tali modo repraefentemus:

$$\frac{d d t}{d z^2} + a a t = \Theta,$$

ftatim intelligitur, partem finiftram duplici modo integrabilem reddi poffe, dum fcilicet vel per fin. $a z$ vel per cof. $a z$ multiplicatur. Ducatur igitur aequatio propofita primo in $d z$ cof. $a z$, et integratio praebebit hanc aequationem:

$$\text{I. } \frac{d t}{d z} \text{cof. } a z + a t \text{ fin. } a z = \int \Theta d z \text{ cof. } a z.$$

Tum vero multiplicando per $d z$ fin. $a z$ et integrando prodibit haec:

$$\text{II. } \frac{d t}{d z} \text{fin. } a z - a t \text{ cof. } a z = \int \Theta d z \text{ fin. } a z$$

ita vt iam duas nacti fimus aequationes differentiales primi gradus, ex quarum alterutra quidem iterata integratione valor integralis t ftatim erui poffet; verum hoc faciliori negotio adipifcitur, binis ita combinatis, vt differentialia $\frac{d t}{d z}$ fe mutuo tollant, folaque variabilis finita t in calculo relinquatur, quod fit, priorem per fin. $a z$, pofteriorem vero per cof. $a z$ multiplicando: differentia enim horum productorum praebet integrale quaefitum

$$t = \tfrac{1}{a} \text{ fin. } a z \int \Theta d z \text{ cof. } a z - \tfrac{1}{a} \text{ cof. } a z \int \Theta d z \text{ fin. } a z.$$

§. 4. Cognita autem forma integralis quaesiti, facile erit pro quacunque aequatione differentio - differentiali huius generis ope integralis ficti integrale reale assignare. Sit enim proposita aequatio simplicissima haec:

$\frac{ddt}{dz^2} + aat = b$, cuius fingatur integrale

$t = A \operatorname{cos}. az + B \operatorname{sin}. az + C$, eritque hinc

$\frac{dt}{dz} = - Aa \operatorname{sin}. az + Ba \operatorname{cos}. az$ et

$\frac{ddt}{dz^2} = - Aaa \operatorname{cos}. az - Baa \operatorname{sin}. az$; tum vero

$aat = + Aaa \operatorname{cos}. az + Baa \operatorname{sin}. az + Caa$

ita vt colligendo fiat

$\frac{ddt}{dz^2} + aat = b = Caa$; ideoque $C = \frac{b}{aa}$

quo substituto integrale reale erit

$t = A \operatorname{cos}. az + B \operatorname{sin}. az + \frac{b}{aa}$

vbi litterae A et B designant certas constantes ex natura aequationis determinandas.

§. 5. Sin autem porro accedat terminus in parte dextra $c \operatorname{cos}. mz$, ita vt proposita habeatur talis aequatio:

$\frac{ddt}{dz^2} + aat = b + c \operatorname{cos}. mz$, statuatur integrale

$t = A \operatorname{cos}. az + B \operatorname{sin}. az + C + D \operatorname{cos}. mz$, eritque hinc

$\frac{dt}{dz} = - Aa \operatorname{sin}. az + Ba \operatorname{cos}. az - Dm \operatorname{sin}. mz$ et

$\frac{ddt}{dz^2} = - Aa^2 \operatorname{cos}. az - Ba^2 \operatorname{sin}. az - Dm^2 \operatorname{cos}. mz$;

tum vero

$aat = + Aa^2 \operatorname{cos}. az + Ba^2 \operatorname{sin}. az + Da^2 \operatorname{cos}. mz + Caa$

ita vt sit

$\frac{ddt}{dz^2} + aat = b + c \operatorname{cos}. mz = Caa + D(aa - mm) \operatorname{cos}. mz$

vnde partes constantes et variabiles seorsim aequatae praebent $C = \frac{b}{aa}$, vt ante, et $D = \frac{c}{aa - mm}$, quibus valoribus substitutis integrale reale aequationis propositae erit

$t = A \operatorname{cos}. az + B \operatorname{sin}. az + \frac{b}{aa} + \frac{c}{aa - mm} \operatorname{cos}. mz.$

 Quodsi

Quod si hic pro ipso variationum initio posito $z=0$ fiat etiam $t=0$, ob cos. $az=1$, sin. $az=0$ et cos. $mz=1$, nascitur aequatio

$$0=A+\frac{b}{aa}+\frac{c}{aa-mm}, \text{ vnde colligitur}$$

$$A=-\frac{b}{aa}-\frac{c}{aa-mm}, \text{ quo substituto erit}$$

$$t=\frac{b}{a^2}(1-\cos. az)+c.\frac{\cos. mz-\cos. az}{a^2-m^2}.$$

Hoc igitur integrale prorsus congruit cum illo, quod in Lemmate supra memorato assignauit Cel. *Frisius*.

§. 6. Accedat adhuc terminus $d\cos. nz$, seu proposita intelligatur aequatio differentio-differentialis haec:

$$\frac{ddt}{dz^2}+aat=b+c\cos. mz+d\cos. nz$$

cuius fingatur integrale huius formae:

$$t=A\cos. az+B\sin. az+C+D\cos. mz+E\cos. nz$$

et quia hinc post duplicem differentiationem fit

$$\frac{ddt}{dz^2}=-Aa^2\cos. az-Ba^2\sin. az-Dm^2\cos. mz-En^2\cos. nz$$

tum vero fit

$$aat=+Aa^2\cos. az+Ba^2\sin. az+Da^2\cos. mz+Ea^2\cos. nz+Caa$$

erit terminis collectis

$$\frac{ddt}{dz^2}+aat=b+c\cos. mz+d\cos. nz=Caa+D(a^2-m^2)\cos. mz$$
$$+E(a^2-n^2)\cos. nz$$

vnde concluditur $C=\frac{b}{aa}$, $D=\frac{c}{a^2-m^2}$ et $E=\frac{d}{a^2-n^2}$; ita vt integrale fiat:

$$t=A\cos. az+B\sin. az+\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a^2-m^2}\cos. mz+\frac{d}{a^2-n^2}\cos. nz$$

vbi, si integralia iterum ita facta concipiantur, vt posito $z=0$ fieri debeat $t=0$, erit

$$0=A+\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a^2-m^2}+\frac{d}{a^2-n^2} \text{ vnde fit}$$

$$A=-\frac{b}{a^2}-\frac{c}{a^2-m^2}-\frac{d}{a^2-n^2}, \text{ existente } B=0$$

quibus substitutis erit integrale cum eo in altero Lemmate operis allegati contento conueniens

$$t=\frac{b}{a^2}(1-\cos. az)+\frac{c(\cos. mz-\cos. az)}{}$$

§. 7. Quod si autem proposita fuerit aequatio haec sua specie generalissima:

$$\frac{ddt}{d\Phi^2} + nnt = a\,\mathrm{cos.}\,\alpha\Phi + b\,\mathrm{cos.}\,\beta\Phi + c\,\mathrm{cos.}\,\gamma\Phi + \mathrm{etc.}$$

euidens est integrale huius formae esse debere:

$$t = \mathrm{M\,sin.}\,n\Phi + \mathrm{N\,cos.}\,n\Phi + \mathrm{A\,cos.}\,\alpha\Phi + \mathrm{B\,cos.}\,\beta\Phi + \mathrm{etc.}$$

Tum autem bis differentiando erit

$$\frac{ddt}{d\Phi^2} = -\mathrm{M}n^2\,\mathrm{sin.}\,n\Phi - \mathrm{N}n^2\,\mathrm{cos.}\,n\Phi - \mathrm{A}\alpha^2\,\mathrm{cos.}\,\alpha\Phi - \mathrm{B}\beta^2\,\mathrm{cos.}\,\beta\Phi\ \mathrm{etc.}$$

tum vero

$$nnt = +\mathrm{M}n^2\,\mathrm{sin.}\,n\Phi + \mathrm{N}n^2\,\mathrm{cos.}\,n\Phi + \mathrm{A}n^2\,\mathrm{cos.}\,\alpha\Phi + \mathrm{B}n^2\,\mathrm{cos.}\,\beta\Phi + \mathrm{etc.}$$

vnde fit addendo

$$\frac{ddt}{d\Phi^2} + nnt = \mathrm{A}(n^2 - \alpha^2)\,\mathrm{cos.}\,\alpha\Phi + \mathrm{B}(n^2 - \beta^2)\,\mathrm{cos.}\,\beta\Phi + \mathrm{etc.}$$

est vero, vti assumsimus:

$$\frac{ddt}{d\Phi^2} + nnt = a\,\mathrm{cos.}\,\alpha\Phi + b\,\mathrm{cos.}\,\beta\Phi + c\,\mathrm{cos.}\,\gamma\Phi + \mathrm{etc.}$$

vnde colligitur

$$\mathrm{A} = \frac{a}{n^2 - \alpha^2},\quad \mathrm{B} = \frac{b}{n^2 - \beta^2},\quad \mathrm{C} = \frac{c}{n^2 - \gamma^2}\ \mathrm{etc.}$$

ita vt integrale reale aequationis propositae sit

$$t - \mathrm{M\,sin.}\,n\Phi + \mathrm{N\,cos.}\,n\Phi + \frac{a}{n^2 - \alpha^2}\,\mathrm{cos.}\,\alpha\Phi + \frac{b}{n^2 - \beta^2}\,\mathrm{cos.}\,\beta\Phi + \mathrm{etc.}$$

§. 38. Hic autem casus, quo vnius alteriusue coefficientis denominator euanescit, probe distingui debet, quia membrum, in quo occurrit, peculiarem euolutionem postulare videtur, cum tamen terminus ei respondens sine reassumtione aequationis differentio-differentialis ex ipsa integrata hoc modo erui queat. Statuatur $\alpha = n$, siue, quod eodem redit, $\alpha = n - \omega$, existente ω infinite paruo; eritque hinc

$$\mathrm{cos.}\,\alpha\Phi = \mathrm{cos.}\,n\Phi + \omega\Phi\,\mathrm{sin.}\,n\Phi \quad \mathrm{et} \quad nn - \alpha\alpha = 2n\omega,$$

vnde integralis membrum, huic coefficienti respondens erit

$$\frac{a}{2n\omega}\,\mathrm{cos.}\,n\Phi + \frac{a}{2n}\,\Phi\,\mathrm{sin.}\,n\Phi.$$

At quia pars $\frac{a}{2n\omega}\,\mathrm{cos.}\,n\Phi$ iam in partis sinistrae membro $\mathrm{N\,cos.}\,n\Phi$ complectitur, integrale reale nunc quidem

erit

$$t = M \sin. n\Phi + N \cos. n\Phi + \frac{a}{2n}\Phi \sin. n\Phi + \frac{b}{n^2-\beta^2}\cos.\beta\Phi + \text{etc.}$$

vti Auctor citatus alia via inuenit.

§. 9. Si denique proponatur aequatio

$$\frac{ddt}{d\Phi^2} + nnt = a \sin. \alpha\Phi + b \sin. \beta\Phi + c \sin. \gamma\Phi + \text{etc.}$$

statuatur eius integrale

$$t = M \sin. n\Phi + N \cos. n\Phi + A \sin. \alpha\Phi + B \sin. \beta\Phi + \text{etc.}$$

at si bis differentietur, prodibit

$$\frac{ddt}{d\Phi^2} = -Mn^2 \sin. n\Phi - Nn^2 \cos. n\Phi - A\alpha^2 \sin.\alpha\Phi - B\beta^2 \sin. \beta\Phi$$

ad quod si addatur nnt, fiet

$$\frac{ddt}{d\Phi^2} + nnt = A(n^2-\alpha^2) \sin. \alpha\Phi + B(n^2-\beta^2) \sin. \beta\Phi + \text{etc.}$$

ita vt ob

$$A = \frac{a}{n^2-\alpha^2},\ B = \frac{b}{n^2-\beta^2},\ C = \frac{c}{n^2-\gamma^2},\ \text{etc.}$$

sit integrale reale quaesitum

$$t = M \sin. n\Phi + N \cos. n\Phi + \frac{a}{n^2-\alpha^2}\sin.\alpha\Phi + \frac{b}{n^2-\beta^2}\sin.\beta\Phi + \text{etc.}$$

§. 10. Hic iterum notari meretur casus, quo $\alpha = n$. Pro membro igitur huic coefficienti respondente eruendo, ponatur vt ante $\alpha = n - \omega$, et quia tum

$$\sin. \alpha\Phi = \sin n\Phi - \omega\Phi \cos. n\Phi \quad \text{et} \quad nn - \alpha\alpha = 2n\omega$$

erit $\frac{a \sin. \alpha\Phi}{n^2-\alpha^2} = \frac{a \sin. n\Phi}{2n\omega} - \frac{a\Phi \cos. n\Phi}{2n}$, vbi pars $\frac{a \sin. n\Phi}{2n\omega}$ iam in priori integralis membro comprehenditur, ita vt integrale reale hoc casu sit

$$t = M \sin. n\Phi + N \cos. n\Phi - \frac{a\Phi \cos. n\Phi}{2n} + \frac{b}{n^2-\beta^2}\sin. \beta\Phi + \text{etc.}$$

§. 11. His circa integrationem aequationis differentialis secundi gradus a Reu. P. *Frisio* propositae, aliarumque generaliorum eiusdem generis, praemissis, aequationem in titulo expositam aggrediar, quae, licet alius sit generis, vsu tamen non carebit, si in eius integrale inquisiuerimus. Tractauit quidem Ill. *Eulerus* in *institutionum suarum calculi*

culi integralis Tomo II. talem aequationem:

$$ddy + A\,dy\,dx + By\,dx^2 = X\,dx^2,$$

denotante X functionem quamcunque ipsius x. Verum calculum ibi adhibitum probe inspicienti mox patebit applicationem huius aequationis generalioris ad casum nostrum non nisi maximo labore molestissimisque calculis suscipi posse; vnde non pigebit methodum exposuisse vulgari quidem minus naturalem, cuius autem ope integrale completum aequationis propositae calculo haud operoso eruitur.

§. 12. Integrationis autem aequationis

$$\frac{ddz}{dt^2} + \frac{2m\,dz}{dt} + nz = a\,\text{sin.}\,ct + b\,\text{cos.}\,ct$$

negotium non parum subleuabitur, si consideremus, integrale completum, quod quaerimus, duabus constari debere partibus, quarum prior inuoluat constantes per duplicem integrationem ingressas, quae sit $= \Delta$. Et cum haec integralis pars eiusmodi esse debeat quantitas, vt posito $z = \Delta$ fiat

$$\frac{ddz}{dt^2} + 2m\frac{dz}{dt} + nz = 0,$$

erit Δ integrale particulare aequationis propositae, quod si fuerit cognitum, integrale completum facile reperitur, dum altera integralis pars, quae sit T, huic addatur, ita vt integrale completum sit $z = \Delta + T$.

§. 13. Cum autem ex ipsa aequationis propositae natura perspicuum sit, quantitatem Δ, siue integrale particulare huiusmodi formae esse debere: $e^{\alpha t}$ vel etiam $Ae^{\alpha t}$, ponatur $z = Ae^{\alpha t}$, eritque

$$\frac{dz}{dt} = \alpha A e^{\alpha t} \text{ et } \frac{ddz}{dt^2} = \alpha\alpha A e^{\alpha t},$$

quibus in aequatione conditionali pro $z = \Delta$ substitutis prodit haec aequatio:

$$\alpha\alpha A e^{\alpha t} + 2m\alpha A e^{\alpha t} + nAe^{\alpha t} = 0, \text{ siue}$$

$$\alpha\alpha + 3m\alpha + n = 0, \text{ ideoque } \alpha = -m + \sqrt{mm - n}.$$

Vnde cum ob signa ambigua duo pro α prodierint valores, qui sint α et α' duo integralia particularia innotescunt,

ſcunt, ſiquidem conditioni ſatisfiet, ponendo tam $z = A e^{\alpha t}$ quam $z = A' e^{\alpha' t}$. Quin etiam componendo ſatisfiet $z = A e^{\alpha t} + A' e^{\alpha' t}$. Hic obſeruaſſe iuuabit, plerumque contingere, vt, cognito vno integrali particulari, in eo ſignum radicale ineſſe ſoleat, ob cuius ambiguitatem duo ſimul integralia particularia innoteſcunt, ex quibus deinceps integrale completum aſſignare licet; ita pro hoc caſu foret $z = A e^{\alpha t} + A' e^{\alpha' t}$ integrale completum, caſu ſcilicet $\alpha\alpha + 2 m \alpha + n = 0$, ita vt ob $\Delta = z$ habeamus valorem partis integralis

$$\Delta = A e^{\alpha t} + A' e^{\alpha' t}.$$

§. 14. Ne autem caſu, quo $n > mm$, imaginaria negotium nobis faceſſant, ponamus ad ea elidenda,

$\sqrt{n - mm} = \lambda$, eritque hinc $\alpha = -m \pm \lambda \sqrt{-1}$ ſiue

$\alpha = -m + \lambda \sqrt{-1}$ et $\alpha' = -m - \lambda \sqrt{-1}$.

Cum autem ſit

$$e^{\lambda\sqrt{-1}} = 1 + \frac{\lambda\sqrt{-1}}{1} - \frac{\lambda\lambda}{1.2} - \frac{\lambda^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{\lambda^4}{1 \ldots 4} + \frac{\lambda^5\sqrt{-1}}{1 \ldots 5} - \text{etc.}$$

ſiue

$$e^{\lambda\sqrt{-1}} = 1 - \frac{\lambda\lambda}{1.2} + \frac{\lambda^4}{1.2.3.4} - \frac{\lambda^6}{1 \ldots 6} + \text{etc.}$$
$$+ \sqrt{-1}\left(\frac{\lambda}{1} - \frac{\lambda^3}{1.2.3} + \frac{\lambda^5}{1 \ldots 5} - \text{etc.}\right)$$

tum vero conſtet eſſe

$$1 - \frac{\lambda\lambda}{1.2} + \frac{\lambda^4}{1.2.3.4} - \frac{\lambda^6}{1 \ldots 6} + \text{etc.} = \text{coſ.}\,\lambda \text{ et}$$
$$\frac{\lambda}{1} - \frac{\lambda^3}{1.2.3} + \frac{\lambda^5}{1 \ldots 5} - \frac{\lambda^7}{1 \ldots 7} + \text{etc.} = \text{ſin.}\,\lambda$$

erit $e^{\lambda\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\,\lambda + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\lambda$. Eodemque modo

$e^{-\lambda\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\,\lambda - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\lambda$, vnde fit

$$\Delta = A e^{-mt} . e^{\lambda t\sqrt{-1}} + A' e^{-mt} e^{-\lambda t\sqrt{-1}} =$$
$$A e^{-mt}(\text{coſ.}\,\lambda t + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\lambda t) + A' e^{-mt}(\text{coſ.}\,\lambda t - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\lambda t).$$

§. 15. Ponamus nunc breuitatis gratia

$A + A' = C$ et $(A - A')\sqrt{-1} = D$ eritque

$$\Delta = (C\,\text{coſ.}\,\lambda t + D\,\text{ſin.}\,\lambda t)\, e^{-mt},$$

quo

quo valore, ob $\Delta = z$, in noſtra aequatione ſubſtituto formula ſiniſtrorſum poſita reuera euanitura erit. Ad hoc oſtendendum ponatur

$$z = e^{-mt}(C \operatorname{cof.} \lambda t + D \operatorname{fin.} \lambda t)$$

eritque differentiando et per dt diuidendo

$$\frac{dz}{dt} = -me^{-mt}(C \operatorname{cof.} \lambda t + D \operatorname{fin.} \lambda t) + \lambda e^{-mt}(D \operatorname{cof.} \lambda t - C \operatorname{fin.} \lambda t)$$

ſiue

$$\frac{dz}{dt} = e^{-mt}((\lambda D - mC)\operatorname{cof.} \lambda t - (\lambda C + mD)\operatorname{fin.} \lambda t).$$

Hinc iterum ſi differentietur, prodibit:

$$\frac{ddz}{dt^2} = e^{-mt}(((m^2-\lambda^2)C - 2\lambda mD)\operatorname{cof.}\lambda t + (m^2-\lambda^2)D + 2\lambda mC)\operatorname{fin.}\lambda t)$$

$$\frac{2mdz}{dt} = e^{-mt}((2m\lambda D - 2m^2C)\operatorname{cof.} \lambda t - (2\lambda mC + 2m^2D)\operatorname{fin.} \lambda t)$$

$$nz = e^{-mt}(nC \operatorname{cof.} \lambda t + nD \operatorname{fin.} \lambda t)$$

quibus ordine collectis aequatio noſtra hanc induet formam:

$$\frac{ddz}{dt^2} + 2m\frac{dz}{dt} + nz = e^{-mt}\left\{\begin{array}{l}(n - mm - \lambda\lambda)C \operatorname{cof.} \lambda t \\ +(n - mm - \lambda\lambda)D \operatorname{fin.} \lambda t\end{array}\right\}$$

cuius pars dextra ob $\lambda\lambda = n - mm$ manifeſto in nihilum abit.

§. 16. Ceterum hic maximi momenti eſt obſeruatio, quod ſi poſito $z = p$ formula illa ſiniſtra prodiiſſet $= P$; tum vero poſito $z = q$ fuerit formula $= Q$ et poſito $z = r$ formula ſit $= R$; tum poſito $z = p + q + r$ ſemper fore formulam ſiniſtro loco poſitam $= P + Q + R$, cuius rei ratio manifeſto in eo eſt ſita, quod in hac formula valor z eiusque differentialia vbique vnicam habeant dimenſionem, ita vt haec regula pro omnibus valeat formulis, in quibus dimenſionum numerus vnitatem non ſuperat.

§. 17. Nunc igitur inuento valore partis integralis Δ, quaeramus alteram partem T, cuius forma, vti aequationis naturam perpendenti facile intelligendum erit, debet eſſe $T = f \operatorname{fin.} ct + g \operatorname{cof.} ct$; tum enim poſito $z = f \operatorname{fin.} ct$

$+ g$ cof. $c t$ fiet differentiando:

$$\frac{dz}{dt} = + c f \text{ cof. } c t - c g \text{ fin. } c t \text{ et}$$

$$\frac{ddz}{dt^2} = - c c f \text{ fin. } c t - c c g \text{ cof. } c t$$

quibus introductis erit

$$\frac{ddz}{dt^2} + 2m\frac{dz}{dt} + nz = - ccf \text{ fin. } ct - ccg \text{ cof. } ct$$
$$- 2mcg \text{ fin. } ct + 2mcf \text{ cof. } ct$$
$$+ nf \text{ fin. } ct + ng \text{ cof. } ct$$

quae forma cum aequari debeat parti dextrae aequationis propofitae: a fin. $c t + b$ cof. $c t$, nafcentur inde hae duae aequationes:

$$\text{I. } (n - cc) f - 2mcg = a$$

$$\text{II. } (n - cc) g + 2mcf = b$$

ex quibus binas incognitas f et g commode affignare licet ope harum combinationum:

$$\text{I. } (n - cc) + \text{II. } 2mc \text{ et II. } (n - cc) - \text{I. } 2mc.$$

Cum enim inde fiat

$$((n - cc)^2 + 4mmcc) f = a(n - cc) + 2mcb \text{ et}$$

$$((n - cc)^2 + 4mmcc) g = b(n - cc) - 2mac, \text{ erit}$$

$$f = \frac{a(n - cc) + 2mcb}{(n - cc)^2 + 4mmcc} \text{ et } g = \frac{b(n - cc) - 2mca}{(n - cc)^2 + 4mmcc}$$

quibus inuentis integrale completum aequationis differentio differentialis propofitae erit

$$z = e^{-mt}(C \text{ cof. } \lambda t + D \text{ fin. } \lambda t) + f \text{ fin. } ct + g \text{ cof. } ct$$

vbi litterae C et D funt conftantes arbitrariae per duplicem integrationem ingreffae.

§. 18. Quoniam autem, fi valores litterarum f et g fubftituti intelligantur, integralis forma minus concinna prodit, ad eam fimplificandam pauca addamus. Ponatur igitur $g = f$ tag. θ: tum enim erit integralis pars altera

$$T = f \text{ fin. } c t + f \text{ tag. } \theta \text{ cof. } c t = \frac{f \text{ fin. } (c t + \theta)}{\text{cof. } \theta}.$$

Cum

Cum autem fit tag. $\theta = \frac{g}{f}$, erit cof. $\theta = \frac{f}{\sqrt{ff+gg}}$, quo fubftituto fit

$$T = \text{fin.}\,(ct+\theta)\sqrt{ff+gg}$$

vbi notetur effe

$$ff+gg = \frac{aa+bb}{(n-cc)^2+4mmcc}.$$

Nunc igitur adhuc fupereft, vt angulum θ inueftigemus, ex eo, quod fit

$$\text{tag.}\,\theta = \frac{b(n-cc)-2mac}{a(n-cc)+2mbc}.$$

Quaerantur hunc in finem duo anguli α et ζ ita comparati, vt fit tag. $\alpha = \frac{b}{a}$ et tag. $\zeta = \frac{2mc}{n-cc}$, et quoniam, valorem tangentis anguli θ fupra et infra per $a(n-cc)$ dividendo, fit

$$\text{tag.}\,\theta = \left(\frac{b}{a} - \frac{2mc}{n-cc}\right) : \left(1 + \frac{b}{a}\cdot\frac{2mc}{n-cc}\right),$$

erit his nouis angulis introductis:

$$\text{tag.}\,\theta = \frac{\text{tag.}\,\alpha - \text{tag}\,\zeta}{1+\text{tag.}\,\alpha\,\text{tag.}\,\zeta} = \text{tag.}\,(\alpha-\zeta)$$

ideoque $\theta = \alpha - \zeta$, vnde poftrema integralis pars fit

$$T = \frac{\text{fin.}\,(ct+\alpha-\zeta)\sqrt{aa+bb}}{\sqrt{((n-cc)^2+4mmcc)}}.$$

§. 19. Quo autem pateat, quanam praerogatiua praefens methodus huiusmodi aequationes differentiales fecundi gradus integrandi, gaudet, praeftabit methodum vulgarem expofuiffe, qua quaeritur multiplicator ad aequationem propofitam integrabilem reddendam idoneus, cuius infignis vfus in integratione aequationum differentialium tam primi quam fecundi gradus ex iis elucet, quae Ill. *Eulerus* in calculo fuo integrali attulit, vbi imprimis de eiusmodi aequationibus agitur, in quibus, vti in noftra propofita, altera variabilis cum fuis differentialibus primis et fecundis vnicam dimenfionem non fuperat, quippe ad quas ifta methodus praefertim accommodata videtur.

§. 20. Si igitur ſumto elemento dt conſtante propoſita fuerit aequatio integranda

$$ddz + 2m\,dz\,dt + nz\,dt^2 = (a\,\text{ſin.}\,ct + b\,\text{coſ.}\,ct)\,dt^2$$

ponatur $dz = r\,dt$, vt habeatur aequatio differentialis primi gradus haec:

$$dr + 2mr\,dt + nz\,dt = (a\,\text{ſin.}\,ct + \text{coſ.}\,ct)\,dt,$$

quae multiplicata per functionem quandam ipſius t, quae ſit T, fiat integrabilis; ſcilicet

$$T\,dr + 2mrT\,dt + nzT\,dt = T\,dt(a\,\text{ſin.}\,ct + b\,\text{coſ.}\,ct)$$

cuius membrum dextrum manifeſto fit integrabile, id quod igitur etiam in parte ſiniſtra euenire debet.

§. 21. Iam vero perſpicuum eſt integralis huius partis ſiniſtrae membrum vnum fore Tr; vnde ſi totius partis integrale ponatur $= Tr + S$, ita vt ſit

$$Tr + S = \int T\,dt\,(a\,\text{ſin.}\,ct + b\,\text{coſ.}\,ct)$$

tum differentiando erit

$$T\,dr + r\,dT + dS = T\,dr + 2mrT\,dt + nzT\,dt$$

vnde fit

$$dS = -r\,dT + 2mrT\,dt + nzT\,dt$$

ſiue ob $r = \frac{dz}{dt}$, erit

$$dS = + dz\left(2mT - \frac{dT}{dt}\right) + nzT\,dt)$$

quae forma euidenter integrabilis redditur ponendo multiplicatorem $T = e^{\lambda t}$, denotante e, vt hactenus, numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$. Tum enim fit

$$dS = e^{\lambda t}(2m - \lambda)\,dz + n\,e^{\lambda t}z\,dt, \text{ hincque}$$

$$S = C + (2m - \lambda)\,e^{\lambda t}z,$$

ſi ſcilicet littera λ ita aſſumatur, vt ſit $2m\lambda - \lambda\lambda = n$, hoc eſt $\lambda = m + \sqrt{mm - n}$; littera C denotante conſtantem per integrationem ingreſſam.

§. 22.

§. 22. Si igitur in aequatione

$$T r + S = \int T\, d t\, (a \sin. c t + b \cos. c t)$$

loco T et S valores modo assignati substituantur, fiet

$$e^{\lambda t} r + C + (2 m - \lambda) e^{\lambda t} z = \int e^{\lambda t}\, d t\, (a \sin. c t + b \cos. c t)$$

seu introducta variabili z, ob $r = \frac{dz}{dt}$, haec aequatio erit

$$d z + C e^{-\lambda t} d t + (2 m - \lambda) z\, d t = e^{-\lambda t} d t \int e^{\lambda t} d t\, (a \sin. c t + b \cos. c t)$$

quae per $e^{(2 m - \lambda) t}$ multiplicata denuo fit integrabilis. Erit enim partis sinistrae

$$e^{(2 m - \lambda) t} d z + C e^{(2 m - 2 \lambda) t} d t + (2 m - \lambda) e^{(2 m - \lambda) t} z\, d t$$

integrale

$$= e^{(2 m - \lambda) t} z + C\, e^{(2 m - 2 \lambda) t}$$

ita vt adiecta noua constante sit

$$e^{(2m-\lambda)t} z + C e^{(2m-2\lambda)t} + D = \int e^{(2m-2\lambda)t} d t \int e^{\lambda t} d t\, (a \sin. c t + b \cos. c t).$$

Cum autem pro littera λ duos inuenissemus valores, quorum alter sit λ, alter vero λ', erit $2 m - \lambda = \lambda'$, et aequatio integralis hinc fiet

$$e^{\lambda' t} z + C e^{(\lambda' - \lambda) t} + D = \int e^{(\lambda' - \lambda) t} d t \int e^{\lambda t} d t\, (a \sin. c t + b \cos. c t)$$

siue per notam reductionem: $\int P\, d Q = P Q - \int Q\, d P$ erit

$$e^{\lambda' t} z + C e^{(\lambda' - \lambda) t} + D = \frac{1}{\lambda' - \lambda} e^{(\lambda' - \lambda) t} \int e^{\lambda t} d t\, (a \sin. c t + b \cos. c t)$$
$$- \frac{1}{\lambda' - \lambda} \int e^{\lambda' t} d t\, (a \sin. c t + b \cos. c t)$$

vnde mutatis constantibus factaque diuisione per $e^{\lambda' t}$ erit denique

$$z = A e^{-\lambda t} + A' e^{-\lambda' t} + \frac{1}{\lambda' - \lambda} e^{-\lambda' t} \int e^{\lambda t} d t\, (a \sin. c t + b \cos. c t)$$
$$- \frac{1}{\lambda' - \lambda} e^{-\lambda' t} \int e^{\lambda' t} d t\, (a \sin. c t + b \cos. c t).$$

§. 23. Iam vero cum ope lemmatis modo memorati habeatur

$$\int e^{\lambda t} d t \sin c t = - \frac{e^{\lambda t} \cos. c t}{c} + \frac{\lambda}{c} \int e^{\lambda t} d t \cos. c t \text{ et}$$

 $\int e^{\lambda t}$

$$\int e^{\lambda t} dt \operatorname{cof.} ct = + \frac{e^{\lambda t} \operatorname{fin.} ct}{c} - \frac{\lambda}{c} \int e^{\lambda t} dt \operatorname{fin.} ct \text{, erit}$$

$$\int e^{\lambda t} dt \operatorname{fin.} ct = - \frac{e^{\lambda t} \operatorname{cof.} ct}{c} + \frac{\lambda e^{\lambda t} \operatorname{fin.} ct}{cc} - \frac{\lambda\lambda}{cc} \int e^{\lambda t} dt \operatorname{fin.} ct$$

vnde colligitur

$$\int e^{\lambda t} dt \operatorname{fin.} ct = \frac{\lambda e^{\lambda t} \operatorname{fin.} ct - c e^{\lambda t} \operatorname{cof.} ct}{\lambda\lambda + cc} \text{ at}$$

$$\int e^{\lambda t} dt \operatorname{cof.} ct = \frac{c e^{\lambda t} \operatorname{fin.} ct + \lambda e^{\lambda t} \operatorname{cof.} ct}{\lambda\lambda + cc}$$

quibus valoribus in aequatione integrali fubftitutis erit

$$z = A e^{-\lambda t} + A' e^{-\lambda' t} + \frac{1}{\lambda' - \lambda} \left(\frac{(\lambda a + bc) \operatorname{fin.} ct + (\lambda b - ac) \operatorname{cof.} ct}{\lambda\lambda + cc} \right)$$
$$- \frac{1}{\lambda' - \lambda} \left(\frac{(\lambda' a + bc) \operatorname{fin.} ct + (\lambda' b - ac) \operatorname{cof.} ct}{\lambda'\lambda' + cc} \right).$$

§. 24. Quo autem de confenfu huius integralis cum ante inuento certiores reddamur, introducamus in calculum quantitates m et n, per quas in priori methodo coefficientes f et g definiuimus; et quo hoc facilius fieri poffit, negligamus ftatim partem conftantes A et A' inuoluentem et fupra per Δ expreffam, quippe quae nulli dubio eft obnoxia; alteram vero partem fecundum fin. ct et cof. ct difponamus, ita vt fit

$$z = \Delta + \frac{1}{\lambda' - \lambda} \left(\frac{\lambda a + bc}{\lambda\lambda + cc} - \frac{\lambda' a + bc}{\lambda'\lambda' + cc} \right) \operatorname{fin.} ct$$
$$+ \frac{1}{\lambda' - \lambda} \left(\frac{\lambda b - ac}{\lambda\lambda + cc} - \frac{\lambda' b - ac}{\lambda'\lambda' + cc} \right) \operatorname{cof.} ct.$$

At vero facta euolutione hoc integrale in fequentem formam transfunditur:

$$z = \Delta + \frac{((\lambda\lambda' - cc) a + (\lambda' + \lambda) bc) \operatorname{fin.} ct}{(\lambda\lambda + cc)(\lambda'\lambda' + cc)}$$
$$+ \frac{((\lambda\lambda' - cc) b - (\lambda' + \lambda) ac) \operatorname{cof.} ct}{(\lambda\lambda + cc)(\lambda'\lambda' + cc)}.$$

§. 25. Cum igitur fit

$$\lambda = m + \sqrt{mm - n} \text{ et } \lambda' = m - \sqrt{mm - n},$$

erit

erit

$$\lambda\lambda' = n \quad \text{et} \quad \lambda' + \lambda = 2m;$$

quo notato numerator coefficientis ipſius ſin. ct ſtatim fit $= (n - cc)a + 2mbc$, coefficientis autem ipſius coſ. ct numerator $= (n - cc)b - 2mac$. At pro denominatore vtrique membro communi $(\lambda\lambda + cc(\lambda'\lambda' + cc)$, quia is euolutus eſt

$$\lambda\lambda.\lambda'\lambda' + (\lambda\lambda + \lambda'\lambda')cc + c^4, \text{ notetur eſſe}$$

$$\lambda\lambda + \lambda'\lambda' = (\lambda + \lambda')^2 - 2\lambda\lambda' = 4mm - 2n,$$

vnde iſte denominator erit

$$nn + (4mm - 2n)cc + c^4 = (n - cc)^2 + 4mmcc.$$

Quibus inuentis erit

$$z = \Delta + \frac{(n-cc)a + 2mbc}{(n-cc)^2 + 4mmcc}\,\text{ſin.}\,ct + \frac{(n-cc)b - 2mac}{(n-cc)^2 + 4mmcc}\,\text{coſ.}\,ct$$

quod integrale igitur, ob coefficientes ipſius ſin. ct et coſ. ct prorſus conuenientes cum iis, quos ſupra per litteras f et g deſignauimus, eſt idem ac illud per praecedentem methodum erutum.

§. 26. Alia adhuc via ſupereſt paullo concinnior ad integrale aequationis propoſitae perueniendi. Cum enim ſtatim pateat, multiplicatorem, quo formula ſiniſtra integrabilis redditur, eſſe debere formae $e^{\alpha t}dt$, multiplicetur aequationis noſtrae pars ſiniſtra per hunc factorem, prodibitque

$$= \frac{e^{\alpha t}ddz}{dt} + 2me^{\alpha t}dz + ne^{\alpha t}zdt,$$

quae ergo debet eſſe integrabilis. Eſt vero per notam reductionem

$$\int e^{\alpha t}\frac{ddz}{dt} = \frac{e^{\alpha t}dz}{dt} - \alpha\int e^{\alpha t}dz \quad \text{et}$$

$$\int e^{\alpha t}zdt = \tfrac{1}{\alpha}e^{\alpha t}z - \tfrac{1}{\alpha}\int e^{\alpha t}dz$$

vnde

vnde ſubſtituendo hos valores fiet pars ſiniſtra

$$\frac{e^{\alpha t} dz}{dt} + \frac{n}{\alpha} e^{\alpha t} z + \left(2m - \alpha - \frac{n}{\alpha}\right) \int e^{\alpha t} dz.$$

§. 27. Quo nunc termini abſoluti ſoli remaneant ſumatur α ita, vt fiat $2m - \alpha - \frac{n}{\alpha} = 0$, quod fit ponendo $\alpha = m + \sqrt{mm - n}$. Sit igitur $\alpha = m + \sqrt{mm - n}$ et aequatio noſtra erit

$$\frac{e^{\alpha t} dz}{dt} + \frac{n}{\alpha} e^{\alpha t} z = a \int e^{\alpha t} dt \,\text{ſin.}\, ct + b \int e^{\alpha t} dt \,\text{coſ.}\, ct.$$

Ex reductione autem iam ſaepius adhibita liquet eſſe

$$\int e^{\alpha t} dt \,\text{ſin.}\, ct = \frac{\alpha e^{\alpha t} \,\text{ſin.}\, ct - c e^{\alpha t} \,\text{coſ.}\, ct}{\alpha\alpha + cc} \quad \text{et}$$

$$\int e^{\alpha t} dt \,\text{coſ.}\, ct = \frac{\alpha e^{\alpha t} \,\text{coſ.}\, ct + c e^{\alpha t} \,\text{ſin.}\, ct}{\alpha\alpha + cc}$$

quibus ſubſtitutis aequatio ſemel integrata erit

$$e^{\alpha t} \frac{dz}{dt} + \frac{n}{\alpha} e^{\alpha t} z = C + \frac{a(\alpha e^{\alpha t} \,\text{ſin.}\, ct - c e^{\alpha t} \,\text{coſ.}\, ct)}{\alpha\alpha + cc}$$

$$+ \frac{b(c e^{\alpha t} \,\text{ſin.}\, ct + \alpha e^{\alpha t} \,\text{coſ.}\, ct)}{\alpha a + cc}$$

ſiue per $e^{\alpha t}$ diuidendo

$$\frac{dz}{dt} + \frac{n}{\alpha} z = C e^{-\alpha t} + \frac{((\alpha a + bc) \,\text{ſin.}\, ct + (\alpha b - ac) \,\text{coſ.}\, ct)}{\alpha\alpha + cc}$$

$$= C e^{-\alpha t} + a' \,\text{ſin.}\, ct + b' \,\text{coſ.}\, ct$$

exiſtente

$$a' = \frac{\alpha a + bc}{\alpha\alpha + cc} \quad \text{et} \quad b' = \frac{\alpha b - ac}{\alpha\alpha + cc}.$$

§. 28. Pro altera integratione ſit multiplicator $= e^{\beta t} dt$, factaque multiplicatione erit pars ſiniſtra $e^{\beta t} dz + \frac{n}{\alpha} e^{\beta t} z\, dt$, cuius integrale per ea quae ſupra diximus manifeſto erit

$$e^{\beta t} z - \beta \int e^{\beta t} z\, dt + \frac{n}{\alpha} \int e^{\beta t} z\, dt$$

vbi

vbi littera β ita accepta eſt intelligenda, vt fiat $\frac{n}{\alpha} - \beta = 0$ ideoque $\beta = \frac{n}{\alpha}$, tum enim aequatio integralis erit

$$e^{\beta t} z = D + C \frac{e^{\beta t - \alpha t}}{\beta - \alpha} + a' \int e^{\beta t} dt \,\text{ſin.}\, c t + b' \int e^{\beta t} dt \,\text{coſ.}\, dt.$$

Cum autem pars dextra eandem patiatur reductionem, qua ante vſi ſumus, erit diuiſione per $e^{\beta t}$ facta mutatisque conſtantibus per duplicem integrationem ingreſſis

$$z = A\, e^{-\alpha t} + A'\, e^{-\beta t} + \frac{(b\alpha + cb)\,\text{ſin.}\, ct + (b\beta - ca)\,\text{coſ.}\, ct}{\beta\beta + cc}.$$

§. 29. Per ea autem quae ſupra §. 25. circa ſimilem formam attulimus, euidens eſt, poſito loco α et β valoribus aſſignatis, ſcil.

$$\alpha = m + \sqrt{mm - n} \text{ et } \beta = \frac{n}{m + \sqrt{mm - n}} = m - \sqrt{mm - n},$$

eandem prodituram eſſe formam, quam prior methodus ſuppeditauerat. Cum enim ſit

$$a' = \frac{\alpha a + cb}{\alpha\alpha + cc} \text{ et } b' = \frac{\alpha b - ac}{\alpha\alpha + cc}, \text{ ob}$$

$$\alpha\beta = n \text{ et } \alpha + \beta = 2m \text{ erit}$$

$$\beta a' + c b' = \frac{(n - cc)a + 2mbc}{\alpha\alpha + cc} \text{ et}$$

$$\beta b' - c a' = \frac{(n - cc)a - 2mac}{\alpha\alpha + cc}$$

ita vt inſuper diuidendo per $\beta\beta + cc$ idem prodeat denominator ideoque et iidem coefficientes argumentorum ſin. ct et coſ. ct, ac ſupra elicuimus.

§. 30. Quantacunque autem ſit concinnitas poſterioris methodi, ea ope ſequentis conſiderationis ad maiorem ſimplicitatis gradum adhuc euehetur. Cum enim prior integratio dediſſet

$$\frac{dz}{dt} + \frac{n}{\alpha} z = C\, e^{-\alpha t} + \frac{(a\alpha + bc)\,\text{ſin.}\, ct + (b\alpha - ac)\,\text{coſ.}\, ct}{\alpha\alpha + cc}$$

tum vero prodierit haec aequatio conditionalis quadratica: $\alpha\alpha = 2m\alpha - n$, ſtatim altera huius aequationis radix adhiberi poteſt, ſumendo $\beta = m - \sqrt{mm - n}$, vnde prodit

ſequens aequatio differentialis primi gradus

$$\frac{dz}{dt} + \frac{n}{\beta} z = D e^{-\beta t} + \frac{(a\beta + bc)\,\text{ſin.}\,ct + (b\beta - ac)\,\text{coſ.}\,ct}{\beta\beta + cc}$$

ita vt iam duas nacti ſimus aequationes ſemel integratas, quarum prior a poſteriore ſubtracta relinquit

$$\frac{n(\alpha - \beta)z}{\alpha\beta} = D e^{-\beta t} - C e^{-\alpha t} + \left(\frac{a\beta + bc}{\beta\beta + cc} - \frac{a\alpha + bc}{\alpha\alpha + cc}\right)\text{ſin.}\,ct$$
$$+ \left(\frac{b\beta - ac}{\beta\beta + cc} - \frac{b\alpha - ac}{\alpha\alpha + cc}\right)\text{coſ.}\,ct$$

quae, ſi euoluatur et loco $\alpha\beta$ et $\alpha + \beta$ ſcribatur n et $2\,m$, in hanc transfunditur:

$$(\alpha - \beta)\,z = D e^{-\beta t} - C e^{-\alpha t} + \frac{(\alpha - \beta)(a(n - cc) + 2mbc)}{(n - cc)^2 + 4mmcc}\,\text{ſin.}\,ct$$
$$+ \frac{(\alpha - \beta)(b(n - cc) - 2mac)}{(n - cc)^2 + 4mmcc}\,\text{coſ.}\,ct$$

ita vt facta diuiſione per $\alpha - \beta$ mutatisque conſtantibus integrale quaeſitum ſit

$$z = A e^{-\alpha t} + A' e^{-\beta t} + \frac{((n - cc)a + 2mbc)}{(n - cc)^2 + 4mmcc)}\,\text{ſin.}\,ct$$
$$+ \frac{((n - cc)b - 2mac)}{(n - cc)^2 + 4mmcc}\,\text{coſ.}\,ct$$

prorſus idem ac ſupra eſt erutum.

PHYSICO-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

SPECIMEN PHILOSOPHICVM
DE
COMPENSATIONIBVS HOROLOGICIS,
ET VERIORI MENSVRA TEMPORIS.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Quamuis ars horologica noſtris temporibus ad ſummum perfectionis gradum euecta videatur, nullus tamen dubito quin in optimis horologiis, ad obſeruationes aſtronomicas accuratiſſime inſtituendas adhiberi ſolitis, multae ſuperſint ineuitabiles mendae, quae aliquando breui tempore obſeruatori errorem plurium minutorum ſecundorum horariorum inferre poſſint. Innumeri ſunt minimarum aberrationum fonticuli, qui omnes homini rudi ad eundem cenſum redigendi videbuntur, quos vero magis experti in duas referent claſſes diuerſas: aliae enim ſunt aberratiunculae, quae vel vitari vel diiudicari atque aeſtimari poſſunt, aliae quae latitant quaeque ſunt et anomalae et anormes. Primam claſſem minus morabitur induſtrius obſeruator, ac alteram occultatam aeque ac incertam. Has poſteriores aberratiunculas neceſſe eſt pro *fortuitis* habere perinde ac iactum aleae; quamuis nulla fiat variatio, quae non ſuam habeat cauſam determinantem. Niſi eſſent longe exiliſſimae hae variationes niſique ſimul ſeſe propemodum exacte compenſarent, actum foret de genuina temporis menſura: plus

 tamen

tamen *compenſationi* quam *exilitati* adſcribendum eſſe puto, etſi aliter ſentire intellexerim Artificem automatarium longe dexterrimum ſimulque artis ſuae quod ad theoriam ſpectat gnariſſimum. Hoc quicquid ſit argumenti paullo accuratius perpendere conſtitui.

§. 2. Incredibilis horologiorum aequabilitas tota fere debetur pendulo oſcillanti: pendulum autem deſcribit arcus circulares, qui ab iſochroniſmo aliquantillum recedunt; huic incommodo vt occurreret magnus Hugenius ſubtiliter modum inuenit vt pendulum arcus cycloidicos oſcillando formaret, iſochroniſmo perfecto donatos: at vero laminae cycloidicae, quas eum in finem adhibendas poſtulat, difficillime in debitam efformantur curuedinem, cum radius oſculi in ſupremo vtriusque laminae loco ſit infinite paruus, praeterquam quod pluribus aliis laborent incommodis. Igitur relictis arcubus cycloidicis ad circulares recurrere; ne tamen errores inde orivndi ſenſibiles fierent procurauerunt vt oſcillationes manerent valde paruae, quo nempe remedio iſochroniſmus perfectus tantum non reſtituitur. Accuratius principia, quae ad veriorem temporis menſuram terra marique conducere poſſint, expoſui ante hos triginta et quod excurrit annos, occaſione quaeſtionis ab Academia Reg. Sc. Pariſ. propoſitae pro annis 1745 et 1747. in diſſertatione, quae curante eadem Academia publici iuris facta fuit (*), nec ſine voluptate intellexi, habuiſſe adhibita a me principia, Automatarios Praeſtantiſſimos maximeque Pariſiis Inclytos, ſuffragantes. In praememorata diſſertatione pag. 26. theorema protuli, quod imprimis huc pertinet, de vero valore oſcillationum circularium.

Fuerit tempus oſcillationis minimae ac veluti infinite paruae $= T$; ſinus totus $= 1000000$; ſinus verſus arcus

(*) *In collectionis diſſertationum praemio condecoratarum Tomo VI.*

cus dimidii a pendulo descripti $= b$; dico fore, absque vllo errore sensibili, tempus huius oscillationis $= T + \frac{b}{350\,000} T$.

§. 3. Vt vsus huius theorematis in subtilissimis institutis obseruationibus elucescat, transcribam ex praefata diatriba, paucis fortasse cognita, bina quae attuli exempla.

Exemplum 1. Sit $T = 1''$. Idem pendulum describat primo arcus $3°. 0'$, deinde arcus $4°. 20'$, quod exemplum D. *de Maupertius* (*) recenset pag. 166. affirmans oscillationes posteriores respectu priorum, tempore vnius diei, retardasse $3\frac{1}{2}''$ vel $4''$. Theorema nostrum indicat pro prioribus $b = 343$ et tempus vnius oscillationis $= 1'' \frac{343}{800\,000}$ et omnes hae particulae exhibent, tempore 24 horarum, 3'',7; posteriores vero oscillationes faciunt $b = 715$; atque tunc pendulum, tempore vnius diei, retardat 7'', 7; differentia retardationem intra diem dat praecise $4''$.

Exemplum 2. Academici in Lapponiam missi ex obseruationibus, summa praecisione institutis, stabiliuerunt quod tempore vnius fixarum reuolutionis horologium a Regia Parisiorum vsque ad Pello accelerauerit 59'', 1 .... Obseruationes in vtroque loco, cum eodem horologio et sub iisdem circumstantiis studiose factae fuerunt, hoc solo titulo diuersae, quod Parisiis pendulum in vtramque partem describeret arcus $2°. 10'$, Pello $2°. 4'$, (vid. opusculam D. *de Maupertius* pag. 170, 171 et 172). Haec arcuum parula inaequalitas pendulum Parisiis respectu Pello quouis die retardauit 0'', 58 vi nostri theorematis, quod vtique tempusculum ab obseruata differentia 59'', 1 subtrahi debet: vera itaque acceleratio, tempore vnius fixarum reuolutionis, a Parisiis ad Pello est 58'', 52.

Apparet itaque inaequalitates arcuum, ab eodem pendulo descriptorum, si modo sedulo obseruentur, verae temporis mensurae minime officere.

§. 4.

(*) *In opusculo: De Figura Terrae. Edit. Paris.*

§. 4. Aliam variationum in horologiis ſcaturiginem efformat inaequalitas frigoris atque caloris; ab aucto frigore decurtatur atque contrahitur pendulum, quod adeoque acceleratur. Variatio frigoris duorum graduum in thermometro *De L'isliano* perdurans variationem in pendulo efficiet propemodum 1'' tempore vnius diei vel 24 horarum, ſi virga penduli ex ferro fuerit conſtructa; poteſt autem conſtrui ex alia materia multo minus contractili; haec altera variatio, maxime moleſta Aſtronomis, tanta eſt vt pendulum intra diem 38'' accellerari poſſit ab intenſiſſimo frigore ad maximum calorem aeſtiuum relato. Attamen ad eandem claſſem has variationes cum prioribus refero, quia a ſtatu thermometri identidem explorato corrigi poſſunt; quin etiam variis modis omnis haec variatio vitari poteſt, ſi pendulo vſitato pendula aliter compoſita ſubſtituere lubeat; in diatriba ſupra allegata pag. 108 et 109 modum huius rei ſimpliciſſimum oſtendi.

§. 5. Ambae praememoratae aberrationum ſcaturigines ſolae ſunt, quas harum rerum intelligentes attentione ſua dignas cenſuerint; ſolent autem plerumque in eundem conſpirare effectum: ab aucto frigore decurtatur atque acceleratur pendulum, ſimulque oleum inſpiſſatur, maior pars ponderis horologium mouentis impenditur in frictiones rotarum ſuperandas, minor in pendulum concitandum, oſcillationes minores fiunt rurſusque accelerantur: nec dum tamen effectum vllo modo ſenſibilem habere poſſent ambae cauſae, niſi praeterea diutius perdurarent; etenim ſi variationes, modo in vnam moxque in alteram partem, reciprocationibus vtcunque irregularibus, fierent, dubito an vllam inaequalitatem ſenſibilem pendulo inicere poſſent. Caeterum praeter manifeſtas aberrationes, quas explicuimus, non poſſunt non innumerae aliae latitare momenta-

neae

neae, incertae, nullique legi adſtrictae, praeſertim ſi pondus penduli exiguum fuerit magnasque efficiat excurſiones: nec enim motus penduli liberi plane idem eſt cum motu eiusdem penduli ad horologium applicati: pondus, quod motum penduli in horologio conſeruat, agit in pinnulas axi penduli appoſitas, nullaque adhibita induſtria impetrari poterit, vt minimi impulſus fiant perfecte inter ſe aequales: inter 86400 oſcillationes minutarias ſecund. quotidianas, nequidem duae eſſe poſſunt perfecte iſochronae: quis omnes enumeret diuerſitatum modos? Vnicum exponam, cuius efficaciam prae caeteris maximi momenti exiſtimo, ni ſollicite praecaueatur.

§. 6. Notum eſt quam mirifice omnes motus iſochroni communicentur cum obiectis circumpoſitis, ſi vllo modo ſynchronismo locus detur. Singularia penitus ſunt, quae hac de re innotuerunt in muſica. Idem vero pariter contingit in vibrationibus ſiue motibus reciprocis lentioribus.

Magnus commemorat *Hugenius* in ſuo horologio oſcillatorio, quod cum duo ex eodem tigillo ſuſpendiſſet horologia minutaria ſecunda, magna cum admiratione viderit vtraque pendula perfectiſſime inter ſe conſpirantia: ambo vibrationes ſuas vnu eodemque temporis puncto incipiebant terminabantque. Vibrationes autem conſtanter erant aduerſae, pendula alternis vicibus ſibi obuiam ibant atque ab inuicem recedebant: imo ſi data opera ad momentum turbabatur harmonia, ita vt veluti ſe decuſſarent pendula, mox ad illam redibant; quod indicat efficaciam pendulorum mutuam aeque ac fibrillarum lignearum ad motum harmonicum propenſionem. Imo legere me memini in alia diſſertatione manuſcripta, idem etiamnum contigiſſe in horologiis haud parum ab inuicem alias diſcordantibus.

 Huc

Huc etiam pertinet, quod ab Infigni Artifice Automatario, D. *Ferdinando Berthoud*, Societatis Londinenfis Soc. mecum communicatum habeo, qui cum prae manibus haberet horologium, quod dicitur, aftronomicum, accuratiffimum, cuius motum optime explorauerat, fed quod minus firmiter erat fufpenfum, confilium cepit machinam vndique ac fortiter firmandi: ab fola ifta mutatione euenit, vt pendulum nunc arcus trium graduum defcriberet, quod antea nonnifi duos defcripfit gradus, ipfum autem horologium, tempore vnius diei, integris 297 minutis fecundis retardaret. Notabilis mihi vifa fuit tanta inter vtrumque ftatum diuerfitas, an vero in tanto difcrimine perpetua vniformitas eademque perfecta, pro eadem fufpenfione, praefumi poterit? mihi certe non videtur. Incertus atque variabilis vtique erit firmitatis gradus nec idem gradus conftanter eodem perfecte aget modo in minimis, quas format, vibratiunculis accefforiis, dum integra horologii theca fimul ac caetera obiecta eidem connexa vacillant. Attamen omnes et fingulae vibratiunculae accefforiae in fingulis locis, vt fint perfecte fynchronae cum vibrationibus fundamentalibus penduli, et ratio dictat et fuadet experientia.

§. 7. Non abs re foro puto modum inquirere, qui praememorato effectui explicando aliquatenus inferuire poffit. Vtcunque pendulum ofcillans ab extremitate fua fuperiori fufpenfum fit, fiet inter ofcillandum vt tota horologii maffa hinc inde alternis vicibus a pondere penduli horizontaliter trahatur retrahaturque; haec quidem actio immediate exercetur in fulcrum, quod pendulum fuftinet, dein ipfum fulcrum agit in partes quibuscum connexum eft, denique in horologii atque thecae, cui includitur, maffam: necdum hic omnis abrumpitur actio, cum vel ipfum

ipſum tignum, a quo ſuſpenditur aut fulcitur theca, aliquantillam in fibris patiatur compreſſionem relaxationemque: haec omnia pendent a modo quo partes inter ſe cohaerent magis minusue firmo, a minimis compreſſionibus, dilatationibus, inflexionibus corporum etc. Sic igitur verus penduli motus a tot pendet circumſtantiis, vt plenam in abſtracto determinationem vix admittat; licebit autem totam rem ſub alia intueri facie, quae omnem reſcindat difficultatem nec male cum re ipſa conueniat.

Concipiamus planum immobile horizontale A B, cui magna ſuperincumbat maſſa concentrata in puncto *a*, ex quo dependeat virga, grauitatis expers *a b*, deſinens in punctum graue *b*; perinde autem eſt ſiue punctum *a* fixum ſit in plano vacillante A B, ſiue hoc planum immobile ſit maſſaque *a* libere moueatur ſuper illo. His ita poſitis, ſi concipiatur pendulum *a b* oſcillare et alternis vicibus peruenire in ſitum $\alpha\beta$ ad vtramque partem, dico haſce oſcillationes regulares atque vniformes aliter non eſſe poſſe, quam vt virga ſeſe conſtanter decuſſet in *c* ambaeque extremitates *a* et *b* in contraria currant: dico etiam punctum interſectionis fore in centro grauitatis quod vtrique corpori *a* et *b* conuenit atque longitudinem penduli ſimplicis iſochroni fore aequalem lineae *c b*.

Tab. I. Fig. 5.

§. 8. Applicatio huius theorematis ad praeſens argumentum ſatis eſt per ſe manifeſta, ſcilicet maſſa *a* tanta eſt, vt motus eius repraeſentare poſſit omnem motum, qui in partibus diuerſis horologii aeque ac in partibus communicantibus vicinis ab oſcillationibus penduli excitatur: Inertia corporis in *a* poſiti modificabitur oſcillationes corporis in *b*. Si partes horologii ipſius corporumque cohaerentium firmitate perfecta gaudeant, ita vt nullibi ne minimi quidem motus reciproci acceſſorii ſuboriri poſſint,

 huic

huic hypothesi satisfiet ponendo massam corporis a infinities maiorem quam sit massa corporis oscillantis b: sic enim punctum c incidit in ipsum locum a pendulumque $c\,b$ totam suam longitudinem $a\,b$ retinet; si, e contrario, om nes systematis partes laxius inter se sint connexae simul que magis dispositae ad motus synchronos cum oscillationibus penduli subeundos ac sponte continuandos, oportebit corpus in a supponere valde diminutum; tunc enim, pro eadem excursione $\beta.\beta$, increscent excursiones $\alpha\,\alpha$, deprimetur punctum c, diminuetur longitudo penduli residui $c\,b$ atque valde accelerabitur horologii motus. Caeterum meminerimus in tota vibrationum isochronarum theoria arcus descriptos valde paruos supponi eosque pro infinite paruis in calculo haberi.

Si nunc de obseruatione D. *Berthoud* §. 6. allegata sermo sit, erit $a\,b = 440$ lin. atque $a\,c = 3$ lin. Hoc enim modo pendulum $a\,b$ intra vnius diei spatium retardat, ratione penduli $c\,b$, propemodum $297''$. Obseruatus etiam fuit angulus $\beta\,c\,b$ vnius gradus; vnde sequitur arcus $\beta\,b = 7,62$ lin; atque spatiolum $a\,\alpha = \frac{11}{19}$ lin. propemodum. Hisce valoribus assumtis phaenomeno descripto ex asse satisfit. Simul autem apparet pondus in a (a quo scilicet efficitur vt vera penduli oscillatio fiat circa punctum a) statuendum esse $= 146$ P, si intelligatur per P pondus in b, atque adeo assurgere ad pondus triginta centenariorum propemodum, si pro P assumantur 20 librae, atque istud enorme pondus responderet horologio relaxato: In altero autem statu multo firmiori pondus etiam multo maius supponendum foret: vnde intelligitur vix sperandum esse vt motus penduli nullos plane motus accessorios cieat.

Denique quod attinet ad alteram phoenomeni partem, nimirum ad id quod pro statu firmiori maiores arcus

eius pendulum descripserit ac fecerat pro statu laxiori, id nunc nullam vberiorem explicationem postulare puto, cum idem pondus si totum impendatur in pendulum motandum, maiores vtique in illo excitabit oscillationes, quam si simul alias oscillationes accessorias sensibiles producere et continuare debeat. Absit vero vt auctae oscillationum magnitudini tribuamus obseruatam horologii firmius suspensi retardationem, vtcunque plausibilis haec prima fronte appareat explicatio. Docet enim theorema §. 2. allegatum, augmentum vnius dimidii gradus in quauis semi oscillatione retardationem intra 24 horas producere non potuisse maiorem quam 2'', quae tamen ab D. *Berthoud* obseruata fuit 297''.

§. 9. Ex praemissis etiam apparet aliquantulam in oscillationes penduli variationem cadere a vacillatione lentis quae virgae annexa est, praesertim si maior fuerit ipsius diameter; sit itaque lens firmissime ad virgam annexa ne vllo modo titubare possit; quo firmior erit coniunctio, tanto magis deprimetur centrum oscillationis tantoque magis retardabitur pendulum; attamen minoris erunt momenti huiusmodi variationes: huc etiam pertinent, quae aliquando cum Academia communicaui *de vera determinatione centri oscillationis in corporibus qualibuscunque filo flexili suspensis eiusque ab regula communi discrepantia*; nam corpora e filo flexili suspensa pariter aliquam patiuntur titubationem, quamuis diuersi generis, quae facit vt aliter oscillentur quam secundum regulas communes, quae perfectam in toto systemate supponunt firmitatem aut rigiditatem.

Quae protuli pertinent ad hypothesin, quod sola materiae inertia suspensionem penduli stabiliat firmioremque reddat. Verum alii vtique dantur suspensionis modi, qui longe alium faciunt effectum; retardatio insignis a D. *Berthoud*

 obser-

obſeruata, poſtquam horologium intenſius ſtabilitum eſſet, viſa quidem fuit haud parum paradoxa; attamen nullus dubito quin, inuariata manente ſuſpenſione, multae ex hoc fonte paruulae inaequalitates in motu horologii ſcaturire poſſint; praeſertim igitur ſuſpenſionis modus ſolidiſſimus adhibeatur quando vera longitudo abſoluta penduli ſimplicis, ad quaeuis minuta ſecunda vibrantis, immediate determinanda erit, quia in hoc negotio rite perficiendo vel centeſimas vnius lineae particulas cordi ac curae habent obſeruatores.

§. 10. Haec paullo prolixius exponere volui vt exinde pateret fieri non poſſe, quin vel optima horologia innumeris paruulis erroribus continue repetitis perturbentur; quid demum erit de horologiis minoribus portatilibus aliisque, quae penduli loco orbiculo libratorio (*Balancier*) inſtructa ſunt; cum huiusmodi orbiculi libratorii multo minus dominentur in motum rotarum (*Rouage*) quam pendula, magis iſochrona ſuoque pondere longe efficaciora. Denique quid erit de horologiis, quae dicuntur, marinis tot aliis perturbationibus inordinatis indeſinenter obnoxiis? Equidem quo magis rem mecum perpendo, eo magis accuratiorem temporis menſuram dubio plenam exiſtimarem, niſi longus horologiorum vſus aliter ſuadere videretur. Viſum tandem fuit, optimos ſucceſſus pro magna parte *compenſationi fortuitae* adſcribendos eſſe. et cum maxime Aſtronomorum interſit aequum ferre iudicium de tempore obſeruato, animum induxi nouum iſtud argumentum paullo accuratius proſequi.

§. 11. Multa admodum apud Aſtronomos reperire eſt de horologiorum vſu accuratiſſimaque menſura temporis inde petita: alia tamen aliis ſunt praeſtantiora. Hoc ipſo tempore, quo haſce conſcribo pagellas, ad manus eſt

Tom. II. Collectionis in vſum Aſtronomorum *Ioh. Bernoulli* Aſtronomi Regii Academiae Berolinenſis, Dilectiſſimi mei ex Fratre Nepotis, vbi pag. 15. et ſeqq. obſeruationes recenſentur a Cel. *Kaeſtnero* inſtitutae, quae indicant omnem variationem diurnam horologii ſubſtitiſſe intra limites duorum minutorum ſecundorum, hancque paruulam variationem maximam fuiſſe intra tempus plus quam quatuor menſium. vid. pag. 21. et 22. Attamen pag. 20, vbi comparatio inſtituitur inter idem horologium Q optimae notae aliudque quod *regulatoris* nomine denotat, duae primae obſeruationes in eodem horologio Q immediate ſe ſubſequentes variationem indicant fere 3'', dum in regulatore nulla plane obſeruata fuit. Sed alia proſtant tentamina de horologiis praeſtantiſſimis ſumta, quae maiorem arguunt variationem: Sic horologium, de quo loquitur Ill. *Bouguerus* in opere ſuo immortali *de figura Terrae* pag. 334 et 335. die 31. Aug. retardabat 5'. 6'' intra 24 horas temporis medii, quod idem die 5. Sept. ſubſequente retardabat 5'. 11''. intra 24 horas; igitur variatio diurna poſt paucos dies ſuborta fuit 5''. hancque variationem ipſe Auctor tribuit ſoli horologii *irregularitati*. Nolo alienae meſſi falcem immittere atque Aſtronomis diiudicandas relinquo paruulas irregularitates ſaepe in optimis horologiis obſeruatas: non dubito autem quin mecum conſentiant, vel optima automata aliquibus etiamnum laborare variationibus irregularibus, quae aliquando ad duo, tria vel fortaſſe plura minuta ſecunda tempore 24 horarum aſſurgere poſſint, absque vt illa variatio vllo modo praeuideri aut per ſe dignoſci queat, niſi aliae obſeruationes ſimul in ſubſidium vocentur melioris notae, vnde variatio quae forte contigit innoteſcat; Hac ratione inductus, huiuscemodi exiguas variationes inordinatas rebus *fortuito contingentibus* annumero; habent vtique ſuas cauſas determinantes, quae vero ſunt plane ir-

re-

regulares, valde variabiles atque obſeruatori omnino latentes. Igitur quamuis non ſint contingentes per ſe, non poſſunt non pro talibus haberi. Haec cum ita ſint exiſtimaui non male actum fore, ſi hae minimae variatiunculae calculo ſubiiciantur atque theoriae, quam expoſui in Commentariis Nouis Academiae Imperialis, Tom. XIV. parte priori, pag. 26 et ſeq. vbi theoriam dedi *de menſura ſortis ad fortuitam ſucceſſionem rerum naturaliter contingentium applicata.* Equidem infinities magis complicatum eſt hoc praeſens noſtrum argumentum quam quod modo allegaui, vbi duo ſaltem caſus examinandi erant, cum in noſtro nouo argumento proprie infiniti caſus eſſent conſiderandi, quandoquidem ſingulas vibrationes penduli aliquantillum ab inuicem differre negari non poteſt.

§. 12. Vt modo dictae complicationi, quae inextricabilis foret, remedium afferatur, ſufficiet vtique omnes et ſingulas penduli oſcillationes ad duas referre claſſes, retardatas ſcilicet et acceleratas, atque in quauis claſſe ſimpliciter accipere mediam, ita vt, pro vera temporis menſura, ſint oſcillationes in vtraque claſſe numero perfecte aequales ſimulque alterae alteras perfecte compenſent.

Sit horologium, cuius pendulum ad minuta ſecunda vibrare debeat atque adeo tempore medio 24 hor. 86400 oſcillationes perficere, ſi ſingulae oſcillationes inter ſe perfecte iſochronae ponantur ipſumque horologium perfecte ad tempus medium fuerit ordinatum: tum vero ab iſochroniſmo oſcillationum perfecto paululum recedamus, ita tamen vt omnes ad duas claſſes, alteram acceleratam alteram retardatam, referantur, atque ponamus oſcillationes eiusdem claſſis perfecte iſochronas, diuerſas autem aequaliter a vero valore vnius minuti ſecundi, in vtramque partem differre; denique ſtatuamus vnicuique oſcillationi aequam ineſſe propen-

ſpenſionem ad vtramque claſſem, plane ac ſi euentus ad ſortem reuocaretur. Hae poſitiones non male cum inſtituto noſtro conueniunt, quando animus eſt discutere, quid probabiliter de motu horologii praeſumi debeat, quod paruulis inaequalitatibus fortuitis obnoxium ſit.

§. 13. Igitur, ad ductum praecedentis paragraphi, ponam tempus vniuscuiusque oſcillationis retardatae $= 1'' + \alpha''$ et tempus acceleratae $= 1'' - \alpha''$, vbi α'' denotat exiguam vnius minuti ſecundi portiunculam. Hoc poſito apparet, ſi intra 24. h. temporis medii pendulum 43200 oſcillationes tardiores totidemque celeriores perfeciſſe ponatur, compenſationem perfectam fuiſſe, nullumque plane errorem in menſuram temporis irrepſiſſe: indicium autem huius aequabilis bipartitionis nullum habebimus; datur tamen probabilitatis gradus et menſura pro hoc euentu; poſito enim numero oſcillationum $= 2N$ erit (vi paragraphi ſeptimi pag. 33. Comment. Nou. Tom. XIV. Part. I.) haec probabilitas $= \frac{1,1286}{\sqrt{(4N+1)}}$, aut (neglecta vnitate denominatoris ob magnitudinem numeri N) $= \frac{0,56413}{\sqrt{N}}$; hinc poſito $N = 43200$ fit iſta probabilitas proxime $= \frac{1}{369}$, quantam ſcilicet habet luſor, cui cum 368 Colluſoribus res fuerit. Attamen ſi vel exacta fuerit, ſorte ita fauente, temporis 24 horarum menſura, probabiliſſimum erit, idem horologium durante toto decurſu a vero tempore paululum aberraſſe ſolaque fortuita compenſatione exactam integri diei menſuram prodiiſſe. Praefata autem probabilitas $\frac{1}{369}$ menſura eſt, ad quam omnes caſus, qui euenire poſſunt, erunt referendi: ſinguli caſus tanto minus fient probabiles, quanto maior aſſumitur inaequalitas inter oſcillationes ad vnam et ad alteram claſſem pertinentes.

§. 14. Perſpicuum iam eſt, praeſens argumentum noſtrum ſub hac facie conſideratum perfectiſſime conuenire

cum theoria *de mensura sortis etc.* superius citata: hic enim sunt oscillationes retardatae et acceleratae, quod ibi fuerant puelli et puellae: ergo mutato nomine hic rursus valebunt omnia, quae in Commentariis Tom. XIV. P. I. demonstrata fuere, quaeque ad innumeras alias quaestiones sorti subiectas non sine successu applicari poterunt. Erunt fortasse Philosophastri qui tanquam absurdum habebunt, quod merae oscillationes retardatae aut merae acceleratae forte fortuna per integrum diem sibi succedere possent: ego quidem possibilitatem absolutam huius euentus non nego, haud secus ac non nego fieri posse vt intra proximos quatuor vel quinque annos Parisiis ne vnica quidem puella nascatur. Simul autem affirmo non minus ridiculum esse huiuscemodi possibilitatum rationem habere, ac ridiculum foret in determinatione distantiae centri Saturni a centro Solis millionesimam partem capilli latitudinis negligere nolle: vera enim probabilitas huius casus exprimitur fractione $\frac{1}{2^{86405}}$, cuius paruitatem nemo mortalium capiet. Quoniam autem singuli casus alia atque alia probabilitate gaudent, ab extremis versus medium continue increscente, vt omnem a me auertam morositatem, vnicum imprimis commentabor pro nostris hypothesibus statum, scilicet *statum medium*: voco autem statum medium, qui aequa circumscribitur probabilitate vt contingat vel non contingat.

§. 15. Ponamus numerum oscillationum retardatarum qui tempore medio 24 horarum contigerit $= N + \mu$ atque adeo numerum oscillationum acceleratarum $= N - \mu$, fiet tempus omnium oscillationum:

$$= (N+\mu)(1'' + \alpha'') + (N - \mu)(1'' - \alpha'') = 2N'' + 2\mu\alpha'',$$

quod cum esse deberet $= 2N''$, haec portio faciet errorem horologii pro illo die $= 2\mu\alpha''$ in excessu. Quod si iam velimus ponere $\mu = N$, qui vltimus casus est possibi-

[illegible] lita-

litatis metaphyficae, proueniret error $= 2 N \alpha''$ fiue $= 86400 \alpha''$, qui pofito verbi gratia $\alpha'' = \frac{1'''}{100}$ afcenderet ad $864''$ fiue propemodum ad horae quadrantem; fi vero velimus ponere $\mu = 100$, ita vt numerus ofcillationum tardiorum nunc fit $= 43300$ fimulque numerus ofcillationum citiorum $= 43100$, prodibit error in horologio commiffus tempore 24 hor. $= 2''$. Atque fic a fola compenfatione error ab $864''$ reductus foret ad $2''$. Si numero praeualuiffe ponantur ofcillationes acceleratae fiet numerus μ negatiuus. At vero nihil eft, quod numerum μ determinet praeter probabilitatis gradum affumptum vel praefcriptum; fufficiat igitur, fi hunc numerum indicauero pro ftatu medio in fine praecedentis paragraphi definito, pro quo aequa militet probabilitas, vt vel exceffu vel defectu a vero aberret.

§. 16. Demonftraui in cit. Comment. Tom. XIV. Part. I. pag. 37. quod pofito $N = 10000$ fit numerus μ, de quo nunc fermo eft proxime $= \pm 47\frac{1}{4}$ atque $2\mu = 94\frac{1}{2}$ fimulque indicaui pag. 38, quod numerus μ fequatur propemodum rationem fubduplicatam numeri N; eritque ita pro praefenti argumento $\mu = \pm 47\frac{1}{4} \times \sqrt{\frac{43200}{10000}} = 98, 21$: huic valori fubftituam numerum rotundum proximum, nempe $\mu = \pm 100$. Sic paullo probabilius fit, vt numerus ofcillationum fiue tardiorum fiue citiorum fubfiftat intra limites 43300 et 43100 quam vt illos transgrediatur; atque hi limites horologio variationem incertam tempore 24 horarum iniiciunt quae exprimitur per $200 \alpha''$ fiue per $2''$, fi α'' ponitur $\frac{1}{100}''$ atque per $1''$ pofito $\alpha = \frac{1''}{200}$; tanta fcilicet eft efficacia compenfationis, quae fperari aut praefumi debeat.

§. 17. Notabilis eft lex euagationum, fi alius atque alius affumatur numerus N, nec enim fortuitae euagatio-

 gatio-

gationes in eodem horologio sequuntur rationem temporum elapsorum sed horum temporum rationem subduplicatam: data itaque aberratione media praesumenda pro interuallo temporis medii vnius diei, quam vocabo δ, aestimanda erit aberratio in eodem horologio nullam mutationem aliunde passo, pro tempore vnius anni, $= \delta \sqrt{365}$ siue $19,1\,\delta$ et pro tempore vnius horae $= \frac{\delta}{\sqrt{24}}$ siue $0,204\,\delta$, id est, si pro δ sumantur duo minuta secunda, praesumenda erit variatio post integrum annum tantummodo $38''$ praeter propter, dum eadem variatio post vnicam horam eadem probabilitate ascendere poterit ad $\frac{2''}{5}$. Nulla tamen erit ratio statuendi in quamnam partem hae variationes ponendae sint, cum aeque facile contingere possit, vt oscillationes retardatae aut acceleratae praeualeant. Caeterum praefatos valores non quidem pro veris offero sed tantum pro verosimilioribus aut probabilioribus quam vllos alios, donec aliunde de re ipsa certiores facti fuerimus.

§. 18. Magnam adhibent curam Astronomi in dignoscendo motu horologii, quotiescunque de vero temporis puncto aliquo definiendo agitur, vt in antecessum sciant, quantam horologium patiatur siue accelerationem siue retardationem: nescio autem annon aliquando hasce suas explorationes praeuias paullo nimis liberaliter habeant, cum certissimum sit, motum horologii perfecte vniformem praesumi non posse, etiamsi pendulum suam longitudinem perfecte conseruare atque arculos plane aequales inter oscillandum describere ponatur; sic vidimus §. 11. Magnum *Bougerum* pro irregularitate horologii habuisse, quod d. 5. Sept. $5''$ plus retardauerit, quam retardauerat d. 31. Aug. Licebit, ni fallor, hanc irregularitatem merae adscribere sorti, qua potuit contingere vt d. 5. Sept. oscil-

oſcillationes retardantes magis praeualuerint quam d. 31. Aug. imo probabile eſt, d. 5. Sept. praeualuiſſe retardantes d. 31. Aug. vero praeualuiſſe accelerantes: haec enim diſtributio maiori gaudet probabilitate quam vlla alia, ſemperque ſeligi debet, quod probabiliſſimum eſt, quamdiu nulla habetur ratio cur ab hac regula recedatur.

§. 19. Quid vero tandem in valore litterae α'', quae ſemidifferentiam indicat inter oſcillationes medias retardatas et medias acceleratas, ſtatuendum erit? Equidem crediderim exiguum admodum fore hunc valorem in optimis horologiis, quae dicuntur aſtronomicis, iisque ſumma cum attentione firmiſſime ſuſpenſis. Suppoſuimus paragrapho decimo ſexto $\alpha'' = \frac{1''}{125}$ atque tunc pro ſtatu medio inuenimus aberrationem intra 24 horas duorum minutorum ſecundorum; quod ſi vero velimus ſupponere $\alpha'' = \frac{1''}{1000}$, inueniemus aberrationem decies minorem, id eſt, $\frac{1}{5}$ minuti ſecundi pro integro die, quae quidem facile negligi poterit; attamen et tunc ad duo vel tria minuta ſecunda error emergere poterit, ſi forte fortuna diſtributio ex ambabus oſcillationum claſſibus, quamuis aequae facilibus, admodum infeliciter ſucceſſerit: Verum tamen etiamnum in his rariſſimis caſibus inſignem naturalis compenſationis efficaciam perſpicimus. Docet nos haec obſeruatio, omnem ab artifice automatario adhibendam eſſe induſtriam, vt aberratiuncula elementaris α'', quae in ſingulas vibrationes cadere poteſt, vitetur aut imminuatur; horologium et pendulum in horologio ita ſtabiliantur, vt omnis communicatio vibrationum cum partibus circumſtantibus reſecetur: ambae pinnulae axi penduli appoſitae ſint perfecte aequales et aequaliter in partes oppoſitas inclinatae; rotula coronaria dentes habeat in toto ambitu perfecte aequididiſtantes atquae ſimillime conformatos; pendulum circa

 ſuſpen-

ſuſpenſionis punctum ſit mobiliſſimum, lens ponderoſa, ſuſpenſionis modus caueatur ne vllo modo variari poſſit etc. Nec confundantur hae variatiunculae momentaneae atque fortuitae cum illis quae diutius perdurant, quales ſunt quae a variatione caloris et frigoris, ac magnitudinis oſcillationum etc, oriuntur, quas vel calculo ſeorſim definire licet, ſi modo ſtatus thermometri penduliqne oſcillationum frequentius inſpiciantur: ingenere opera danda eſt, vt omnes et ſingulae partes quouis momento aequabiliter ſua functione defungi cogantur; etenim quacunque lege pendulum oſcillationem quamuis perficiat, ſi modo eaedem recurrant oſcillationes, neceſſe eſt vtique vt ſint iſochronae. Sic ingeminatur iſochronismi principium.

§. 20. In horologiis vilioribus maiores erunt aberratiunculae mediae elementares α'', at vero lex compenſationis eadem erit; in ſtatu ſuo medio aberratio intra 24 horas adhucdum poterit cenſeri $= 200\,\alpha''$, ad normam §. 16., at vero quantitas α'', pro imperfectionis gradu horologiorum, multo maior eſſe poteſt ipſaque aberratio media pro 24 horis eadem proportione increſcere nec tamen ſex aut ſeptem minuta ſecunda excedere. Si loco penduli adhibeatur orbiculus libratorius (*Balancier*) maioris vtique momenti eſſe poterunt aberratiunculae mediae elementares; ſi vero caetera omnia ſumma cura fuerint elaborata, reſarcietur defectus: quo minora ſunt huiusmodi automata, eo magis erunt vibrationes ſorti obnoxiae; efficacia autem compenſationis notabilis in horologiis portatilibus plerumque obſeruabitur, eaque tanto maior, quanto plures vibrationes intra 24 horas perficiuntur; ſolent autem ad minimum quater vibrare intra minutum ſecundum ſiue 345600 vicibus tempore vnius diei, hocque reſpectu dimidiatur aberratio diurna caeteris paribus; hinc poſita aberratiuncula media elementari decies maiore quam in pendulis, quintuplicabitur

tur

tur tantum aberratio diurna media et probaliter ſubſiſtet intra decem minuta ſecunda, quamuis valde aduerſa fortuna aliquando multo maiores pati poſſint inaequalitates huiusſcemodi automata.

§. 21. Suppetunt animaduerſiones ad mentem huiuſce theoriae inſtituendae de horologiis mari adhibendis, quibus conficiendis ſummi artifices in Anglia aeque ac Gallia ab aliquo tempore operam dederunt: idem ſuo tempore iam olim tentauerat ipſe *Hugenius*; ſuis tamen auſis excidit, quoniam nimiae plerumque ſunt nauium agitationes quam vt vſum pendulorum, quibus vnice pro vera temporis menſura confidebat, permittant; ea propter in diſſertatione Pariſina §. 2. allegata, auctor fui vt horologia marina, ad inſtar paruulorum automatum protatilium, orbiculo libratorio inſtruerentur, magnitudine autem ſua haec automata multum ſuperarent, vt omnes in horologio marino partes ſumma accuratione tanto melius elaborari poſſent, quo conſilio omnes artifices ab eo tempore vſi ſunt: nullus autem dubito, quin haec automata, naui vecta vtcunque agitata, eadem propemodum gaudeant in motu ſuo vniformitate ac ſi terra adhiberentur, praeſertim ſi cautelae, quas in diſſertatione mea expoſui, pro optima eorum ſuſpenſione ſimul in vſum vocentur. Quod ſi tamen nauis iactationes aliquas automato paruulas inaequalitates imprimere poſſint, hae non poſſunt non eſſe mere contingentes atque fortuitae, nec puto difficile effectu fore vt pro ſtatu medio omnes inaequalitates nunquam errorem decem minutis ſecundis maiorem intra 24 horas inducant, qui error tempore centum dierum probabiliter non vltra centum minuta ſecunda increſcet, quandoquidem errores praeſumendi radicibus temporum ſunt proportionales: talem autem errorem, qui 25′ reſpondet in aequatore haud grauatim condonabunt nautae. Velim autem vt conferantur

tur

tur, quae de meliori perfectione horologiorum orbiculo versatili, loco penduli, instructorum marique adhibendorum, in dissertatione Parisina vberius exposui.

§. 22. Summa pertracti argumenti nostri in hoc consistit, vt intelligatur duas inesse horologiis aberrationum species, *chronicarum* quae diutius subsistere possunt; et *momentanearum*, quae continue hinc et illinc euagantur: priores saepenumero recte statui poterunt temporibus ellapsis propemodum proportionales, posteriores vero sequentur potius horum temporum radices quadratas, haeque aliquando post breue temporis interuallum, si recte coniecto, sensibiles aliquantillum esse poterunt, praesertim in horologiis non vltima accuratione elaboratis. An recte coniiciam, id puto melius diiudicari posse ex obseruatis eadem nocte interuallis temporum pro plurium fixarum culminationibus, si haec interualla aliquot noctibus successiuis, quantum fieri potest, accurate obseruentur ab experientissimis Astronomis; hic enim agitur de aberratiunculis, post breue tempus in apricum proferendis, nec tamen, post longiora temporis interualla, aequa proportione manifestis. Si nihil tale obseruetur in horologiis perfectissimis, indicium habebimus, aberratiunculas elementares littera α'' designatas plane in his horologiis negligi posse. Nec tamen habebimus, quod dubitemus methodum nostram rebus aliis, quae passibus incertis maioribus diuagentur, applicare, nominatimque horologiis pinguiore Minerua constructis aut indole sua mensurae verae temporis minus adaequatis.

SUR

SUR L'EFFET DE LA REFRACTION DANS LES OBSERVATIONS TERRESTRES

Par

Mr. L. EULER.

Comme à cauſe de la réfraction les étoiles nous paroiſſent plus élevées au deſſus de l'horiſon, qu'elles ne le ſont effectivement, le même phénomène ſe rencontre auſſi dans les obſervations terreſtres, où les objets nous paroiſſent toujours plus hauts, que s'il n'y avoit point de réfraction. La raiſon en eſt, que les rayons de lumière ne viennent jamais par des lignes droites jusqu'à nos yeux, comme on le ſuppoſe ordinairement, mais qu'ils ſe trouvent tant ſoit peu courbés, en tournant leur concavité vers le bas. Ainſi ſuppoſant un objet en O, d'où un rayon parvient en A ſuivant la ligne courbe OA, la direction de ce rayon en A eſt la droite AZ, qui touche la courbe en A, & l'oeil, qui reçoit ce rayon, jugera que l'objet ſe trouve quelque part dans cette tangente AZ & par conſequent plus élevé, que ſi le rayon étoit parti de O en ligne droite OA. Je me propoſe donc, de developper ici cet effet de la réfraction & de déterminer tous les phénomenès, qui en réſultent.

Tab. II. Fig. 1.

Pour mettre cette queſtion dans tout ſon jour, il faut auſſi avoir égard à la courbure de la Terre. Soit donc C le centre de la Terre & que le cercle AET en repréſente la ſurface, dont tous les points ſoyent ſitués au même niveau, & en ſuppoſant le rayon $CA = a$, qu'on a trou-

Fig. 2.

trouvé être de 3269297 Toifes, foit A le lieu de l'obfervateur & Z un objet quelconque, d'où un rayon de lumière parvienne par la ligne ZA dans l'oeil du fpectateur en A, où la tangente de cette courbe ZA fait avec la direction verticale AB l'angle $BAT = \zeta$, qui marquera donc la diftance apparente de l'objet au zénith B. Qu'on tire du centre de la Terre C à l'objet Z la droite CZ, & qu'on nomme l'angle $ACZ = \Phi$, de forte que l'arc AX fera exprimé par $a\Phi$, qui fera la diftance horizontale entre le lieu de l'obfervateur en A & celui de l'objet en Z. Cela pofé, & conoiffant les deux angles ζ & Φ, on demande quelle fera la veritable élévation de l'objet Z au deffus de la furface de la Terre, ou bien on cherche la ligne droite XZ, que je nommerai dans la fuite $= x$, & la ligne $CZ = z$, de forte $= z = a + x$; & la ligne XZ fera l'élévation de l'objet au deffus du niveau au point A.

Tab. II. Fig. 3.

Puisque la courbure de ce rayon ZA eft caufée par la différente denfité de l'Atmofphère entre l'objet en Z & l'oeil en A, il faut commencer par déterminer la loix, fuivant la quelle la denfité de l'air diminüe en montant en haut; puisqu'il eft certain, qu'à égales hauteurs au deffus de la furface de la Terre la denfité de l'air eft partout la même; attendu que fans cette condition l'atmofphère ne fçauroit être en équilibre. Pofant donc pour le lieu de l'obfervateur en A la denfité de l'air $= c$, & fi à une hauteur AQ quelconque $= x$ il y a la denfité $= q$, il s'agit de déterminer le rapport entre c & q pour chaque hauteur $AQ = x$. Pour cet effet on peut ici hardiment fuppofer, que les denfités de l'air font proportionelles à fon élafticité, ou à la hauteur du baromètre; donc pofant la hauteur du baromètre en $A = k$ & celle

qui

qui ſe trouve en $Q = p$, on aura $\frac{q}{c} = \frac{p}{k}$. Montons à préſent au deſſus de Q à une hauteur infiniment proche q, deſorte que $Qq = dx$, & on aura la denſité en $q = q + dq$ & la hauteur du baromètre $= p + dp$; où il eſt clair, que les différentielles dq & dp auront des valeurs négatives. Cela poſé, puisque le Baromètre a baiſſé de la quantité dp, pendant qu'on eſt monté dans l'air par l'eſpace dx, il faut qu'une colonne de Mercure de la hauteur $= dp$ ait le même poids qu'une colonne d'air de la hauteur $= dx$.

Poſons donc la gravité ſpécifique du Mercure à celle de l'air en A, dont la denſité eſt $= c$, comme m à 1, où l'on ſçait, qu'il y a à peu près $m = 10000$ & partant, ſi la denſité de l'air en Q étoit encore $= c$, une colonne de Mercure de la hauteur $= dp$ auroit le même poids qu'une colonne d'air de la hauteur $m\,dp$. Mais puisque la denſité en Q qui eſt $= q$ eſt moindre que c, cette hauteur trouvée $m\,dp$ doit être augmentée dans la raiſon de q à c, d'où elle ſera $= \frac{mc\,dp}{q}$, qu'il faut par conſequent égaler à la hauteur dx; d'où nous tirons cette équation: $dx = -\frac{mc\,dp}{q}$, ou bien $dx = -\frac{mk\,dp}{p}$, dont l'intégrale nous donne $x = -mk\,lp +$ conſt. & cette conſtante doit être determinée en ſorte, que faiſant $x = 0$ il devienne $p = k$; d'où l'on tire $x = mk\,l\frac{k}{p}$, ou bien $x = mk\,l\frac{c}{q}$. Or ſur la ſurface de la Terre on peut ſuppoſer $k = 28$ pouces, ou bien $k = 2\frac{1}{3}$ pieds de Paris, de ſorte que mk exprimera une hauteur de 23333 pieds, ou bien en toiſes de ſix pieds on aura à peu près $mk = 4000$ Toiſes.

Ayant donc trouvé l'équation $\frac{x}{mk} = l\frac{k}{p} = l\frac{c}{q}$ on en peut aiſément déterminer pour chaque hauteur x la denſité de l'air q, qui répond à cette hauteur; car prennant e pour le nombre, dont le logaritme hiperbolique $= 1$, on aura $\frac{c}{q} = e^{\frac{x}{mk}}$, ou bien $\frac{q}{c} = e^{-\frac{x}{mk}}$. Donc puisque dans les obſervations terreſtres la hauteur x eſt toujours très petite par rapport à mk, on aura à peu près $\frac{q}{c} = 1 - \frac{x}{mk} + \frac{xx}{2mmkk} - \frac{x^3}{6m^3k^3}$; où l'on pourra ſe contenter pour la plupart de pareilles obſervations des deux premiers termes $1 - \frac{x}{mk}$, à moins qu'on n'ait à meſurer des montagnes de hauteur conſidérable.

Après avoir déterminé la denſité de l'air pour toutes les hauteurs du niveau de l'obſervateur en A, il faut développer la réfraction, que ſoufre un rayon de lumiere, en paſſant d'un air quelconque dans une autre couche de denſité différente. Pour cet effet conſidérons un rayon, qui paſſe du vuide dans un air ordinaire, dont la denſité $= c$, & ſuppoſons la raiſon du ſinus d'incidence à celui de réfraction comme 1 à $1 - \delta$, où l'on ſçait, que δ eſt une fraction très petite, dont la valeur peut être eſtimée à $\frac{3}{10000}$. De là il s'enſuit, que ſi l'air étoit plus ou moins denſe que c, la réfraction ſeroit auſſi plus ou moins forte ſelon le même rapport. Ainſi lorsqu'un rayon paſſe du vuide dans un air de la denſité $= q$, on peut ſuppoſer la raiſon de réfraction comme 1 à $1 - \frac{\delta q}{c}$. Donc réciproquement, quand un rayon paſſe de cet air dans le vuide, la raiſon de réfraction ſera comme $1 - \frac{\delta q}{c}$ à 1. Que ce même rayon paſſe à préſent du vuide dans un air de la denſité $= r$, & la raiſon

raiſon de réfraction ſera comme 1 à $1 - \frac{\delta r}{c}$; par conſéquent, en faiſant évanouir le vuide entre ces deux airs, de ſorte que le rayon paſſe d'un air de la denſité q dans un autre de la denſité r immediatement, la raiſon de réfraction ſera comme $1 - \frac{\delta q}{c}$ à $1 - \frac{\delta r}{c}$, ou bien, puisque δ eſt une fraction extrèmement petite, comme $1 : 1 + \frac{\delta (q - r)}{c}$.

Suppoſons maintenant que ces deux denſités q & r différent infiniment peu l'une de l'autre, ou bien poſons $r = q + dq$, & pour le cas, où un rayon paſſe de l'air q dans l'air $q + dq$, la raiſon de réfraction ſera comme 1. à $1 - \frac{\delta . dq}{c}$ & partant réciproquement, lorsque le rayon paſſe de l'air de la denſité $q + dq$ dans un air de la denſité q, la raiſon de réfraction ſera comme $1 - \frac{\delta dq}{c}$ à 1, ou bien comme 1 à $1 + \frac{\delta dq}{c}$. Ayant donc trouvé ci-deſſus $l \frac{c}{q} = \frac{x}{mk}$, en différentiant on aura $\frac{dq}{q} = - \frac{dx}{mk}$, ou bien $dq = - \frac{q dx}{mk}$, & partant la raiſon de réfraction pour le dernier cas ſera comme 1 à $1 - \frac{\delta q dx}{cmk}$.

Ayant déterminé ces deux articles, nous n'avons qu'à enviſager toute l'Atmosphère comme compoſée d'une infinité de couches d'air infiniment minces & toutes concentriques entre elles, enſorte que le centre de la Terre ſoit leur centre commun, & il nous eſt permis ici de faire abſtraction de la véritable figure de la Terre, de la même manière que nous n'avons pas beſoin de tenir compte des différens degrés de chaleur, qui pourroient troubler l'eſtime de la denſité différente, attendu que nous nous bornons uniquement à des objets terreſtres qui ne ſçauroient jamais s'étendre à des diſtances ſi grandes que l'effet des differentes modifications de la chaleur pourroient devenir ſenſibles.

Tab. II. Fig. 4.

Après ces préparations soit O l'objet que le spectateur en A observe & qu'il voit par le rayon courbé O Z A, qui fasse avec la verticale A B l'angle $BAZ = \zeta$, le rayon de la Terre étant comme ci-dessus $AC = a$. Maintenant considerons un élément quelconque Zz de la courbe $AZzO$ & ayant tiré au centre les droites ZC & zC, qui coupent la surface de la Terre en X & x, nommons l'angle $ACZ = \Phi$ & la distance $CZ = z$, de sorte que, posant la hauteur du point Z au dessus du niveau de A, ou bien la ligne $XZ = x$, il y ait $Z = a + x$; donc pour le point z nous aurons l'angle $ACz = \Phi + d\Phi$ & partant l'angle $ZCz = d\Phi$ & la distance $Cz = z + dz$. Outre cela tirons aussi au point Z la tangente ZT & en baissant du point C la perpendiculaire $CT = t$ & nommant l'angle $CZT = \omega$ on aura $\sin. \omega = \frac{t}{z}$.

Maintenant qu'on décrive du centre C par le point Z l'arc de cercle NZu, qui nous représentera la couche de l'Atmosphère, qui passe par le point Z & qui sépare l'air superieur de celui qui est plus près de la surface, & alors l'élément zZ nous représente la direction du rayon, qui entre dans la couche NZu; & puisque la droite CZ continuée jusqu'en s est perpendiculaire à cette couche, l'angle zZs sera l'angle d'incidence. Puis donc que nous venons de nommer l'angle $CZT = \omega$, nous aurons l'angle $CzZ = \omega + d\omega$; or l'angle zZs, étant externe par rapport au triangle CZz, sera égal à la somme des angles CzZ & ZCz, & partant on aura l'angle d'incidence $zZs = \omega + d\omega + d\Phi$; & il est évident qu'à cet angle d'incidence répond l'angle de réfraction $CZT = \omega$, d'où le sinus d'incidence sera $\sin. (\omega + d\omega + d\Phi) = \sin. \omega$

$+ (d\omega$

$+ (d\omega + d\Phi)$ cof. ω, le finus de réfraction étant $=$ fin. ω, ce qui donne cette analogie :

fin. d'incidence à fin. de réfraction $= \text{fin.}\,\omega + (d\omega + d\Phi)\,\text{cof.}\,\omega : \text{fin.}\,\omega$
$= 1 : 1 - \frac{(d\omega + d\Phi)\,\text{cof.}\,\omega}{\text{fin.}\,\omega}$.

Suppofant à préfent la denfité de l'air en $Z = q$, comme ci-deffus, celle en z fera $= q + dq$. deforte que nous avons ici le cas, où le rayon paffe d'un air de la denfité $q + dq$ dans un air de la denfité q, pour lequel nous avons vu ci deffus, que la raifon de réfraction eft $= 1 : 1 + \frac{\delta dq}{c}$ & partant nous en tirons cette égalité : $\frac{\delta dq}{c} = -(d\omega + d\Phi)\,\text{cot.}\,\omega$. Or nous avons vu auffi que pour la hauteur $XZ = x$ on aura $l\frac{c}{q} = \frac{x}{mk}$, d'où il s'enfuit $dq = -\frac{q\,dx}{mk} = -\frac{q\,dz}{mk}$ & cette valeur fubftituée nous fournit l'équation $\frac{\delta q\,dz}{mck} = (d\omega + d\Phi)\,\text{cot.}\,\omega$, ou bien à caufe de $\frac{q}{c} = e^{-\frac{x}{mk}}$ il y aura

$$\frac{\delta e^{-\frac{x}{mk}}\,dz}{mk} = (d\omega + d\Phi)\,\text{cot.}\,\omega;$$

d'où il faut déterminer la nature de la courbure du rayon A Z O, pour en déduire enfuite tous les phénomènes de la réfraction.

Cette équation pourra être fimplifiée en réduifant toutes les quantités, qui y entrent, aux deux variables $CZ = z$ & $CT = t$; car d'abord nous aurons fin. $\omega = \frac{t}{z}$ & partant cof. $\omega = \frac{\sqrt{zz - tt}}{z}$ & de là en prennant la différentielle $d\omega = \frac{z\,dt - t\,dz}{z\sqrt{zz - tt}}$. Enfuite en vertu de la fimilitude des triangles CZT & Zzu & à caufe de $Zu = z\,d\Phi$ & $uz = dz$, nous aurons $CT : ZT = Zu : zu$ c'eft à dire $t : \sqrt{zz - tt} = z\,d\Phi : dz$

d'où

d'où l'on tire $d\Phi = \frac{t\,dz}{z\sqrt{zz-tt}}$; par conſequent nous aurons $d\omega + d\Phi = \frac{dt}{\sqrt{zz-tt}}$, & puisque cot. $\omega = \frac{\sqrt{(zz-tt)}}{t}$, l'équation trouvée ſe réduit à cette forme : $\frac{\delta e^{-\frac{x}{mk}} dz}{mk} = \frac{dt}{t}$ qui à cauſe de $x = z - a$, ne renferme que deux variables z & t, & dont l'intégration n'a aucune difficulté.

Mais avant que de prendre l'integrale de cette équation, elle nous fournit une manière fort aiſée de déterminer le rayon de courbure au point Z, dont l'expreſſion, comme on ſcait, eſt $\frac{z\,dz}{dt}$: Puis donc que l'équation trouvée nous donne d'abord $\frac{dz}{dt} = \frac{mk\,e^{-\frac{x}{mk}}}{\delta\,t}$ le rayon de courbure eu Z ſera $\frac{mkz\,e^{\frac{x}{mk}}}{\delta\,t} = \frac{mk\,e^{\frac{x}{mk}}}{\delta\,\text{ſin.}\,\omega}$. Tranſportons à préſent le point Z en A, lieu du ſpectateur, en ſuppoſant $z = a$, $x = 0$ & $\omega = \zeta$, d'où le rayon de courbure au point A divient $= \frac{mk}{\delta\,\text{ſin.}\,\zeta}$. Or il eſt évident que puisque l'intevalle A O ne ſçauroit jamais devenir conſiderable par rapport au rayon de la Terre, la même courbure doit ſenſiblement regner par toute l'étendue du rayon A Z O, de ſorte, qu'on peut regarder cette courbe comme un arc de cercle décrit du rayon $= \frac{mk}{\delta\,\text{ſin.}\,\zeta}$, & cela nous fournit une manière très facile de reſoudre toutes les queſtions, qu'on pourroit propoſer ſur les obſervations de cette nature. Començons de profiter de cet avantage dans les obſervations ordinaires du nivellement, où l'angle ζ eſt de 90 degrés.

Applica-

Application de cette Théorie à la correction du nivellement.

Les instrumens, dont on se sert pour niveller, nous découvrent la veritable direction horizontale à l'endroit de l'observateur en A; par consequent la direction du rayon, qui entre dans l'oeil du spectateur, est horizontale & partant l'angle $\zeta = 90°$. Supposons donc, qu'on veuille pousser le nivellement jusqu'à l'endroit D de la surface de la Terre, où l'on érige verticalement une pique, sur la quelle on marque le point O, qu'on decouvre en visant par le Niveau, de sorte, que le rayon de lumière, qui passe du point O dans l'oeil du spectateur placé en A, décrit la ligne courbe O A, que nous venons de déterminer. Pour cet effet ayant tiré du centre de la Terre la ligne C D O, nommons l'angle A C O $= \phi$ & la distance horizontale, ou l'arc A D $= s$, de sorte que $s = a\phi$; cela posé on demande la hauteur D O, à la quelle la marque O sera élevée au dessus du vray horison A D; où il faut remarquer que le point D est en niveau avec le point A.

Tab. II. Fig. 5.

Puisque le rayon, qui va de O en A, est un arc de cercle, dont le rayon est $= \frac{mk}{\delta}$, & dont la quantité (à cause de $mk = 4000$ toises & $\delta = \frac{3}{10000}$) exprimée en toises se trouve $= 13333333$, pendant que le rayon de la Terre n'est que de 3269297 Toises, il est clair que le centre de cet arc de cercle A O tombera quelque part dans le rayon A C prolongé, qui soit en G, & nommant pour abreger ce second rayon A G $= g$, il y aura $g = 13333333$. Maintenant pour trouver la hauteur D O baissons du point G sur la droite prolongée O C la perpendiculaire G K & tirons aussi la droite G O $= g$; ce

 qui

ce qui étant fait, puisque l'angle GCK est connu égal à $\Phi = \frac{s}{a}$, à cause de $CG = g - a$ nous aurons $GK = (g-a)\sin.\Phi$ & $CK = (g-a)\cos.\Phi$. Ainsi le triangle rectangle OGK nous fournit :

$$OK^2 = GO^2 - GK^2 = gg - (g-a)^2 \sin.\Phi^2 = gg\cos.\Phi^2 + 2ag\sin.\Phi^2 - aa\sin.\Phi^2$$

& partant

$$OK = \sqrt{(gg\cos.\Phi^2 + 2ag\sin.\Phi^2 - aa\sin.\Phi^2)}.$$

Retranchons de là l'intervalle $DK = a + (g-a)\cos.\Phi$ & il nous restera la hauteur cherchée DO, qui sera

$$DO = \sqrt{(gg\cos.\Phi^2 + 2ag\sin.\Phi^2 - aa\sin.\Phi^2)} - a - (g-a)\cos.\Phi$$

où il est à remarquer, que puisque l'angle Φ ne sçauroit presque jamais surpasser un degré, de sorte qu'il y aura toujours $\sin.\Phi < \frac{1}{57}$ & $\sin.\Phi^2 < \frac{1}{3249}$, on aura à fort peu près

$$\sqrt{gg - (g-a)^2 \sin.\Phi^2} = g - \frac{(g-a)^2 \sin.\Phi^2}{2g}$$

d'où l'on tire la hauteur

$$DO = g - a - (g-a)\cos.\Phi - \frac{(g-a)^2 \sin.\Phi^2}{2g}.$$

Or puisque l'angle Φ est si petit, on peut supposer $\sin.\Phi = \Phi$ & $\cos.\Phi = 1 - \frac{1}{2}\Phi\Phi$, ce qui nous conduit à cette formule

$$DO = \frac{(g-a)\Phi^2}{2g}(g - (g-a)) = \frac{a(g-a)\Phi^2}{2g}.$$

Puis donc que $\Phi = \frac{s}{a}$, cette hauteur sera $\frac{(g-a)ss}{2ag} = \frac{ss}{2a}.\frac{g-a}{g}$, d'où l'on voit, que, si la réfraction évanouissoit entièrement, de sorte qu'il fut $g = \infty$ & partant $\frac{g-a}{g} = 1$, cette hauteur seroit $\frac{ss}{2a}$, comme on la suppose dans les nivellemens ordinaires.

On voit donc facilement, que les tables ordinaires, dont on se sert dans les nivellemens, & qui marquent pour

pour chaque diſtance horizontale s les valeurs de la formule $\frac{ss}{2a}$, peuvent aiſément être corrigées en ſorte, qu'on pourra s'en ſervir pour trouver dans chaque cas la veritable hauteur D O; vu qu'on n'a qu'à multiplier les hauteurs marquées dans les tables ordinaires par la fraction $\frac{g-a}{g}$, dont la valeur eſt $= \frac{3}{4}$ à fort peu près, enſorte que la hauteur cherchée ſera $DO = \frac{3}{4} \cdot \frac{ss}{2a}$; ou bien, on n'a qu'à multiplier les hauteurs marquées dans les tables ordinaires par $\frac{3}{4}$. De cette manière la table, que Mr. *Picard* a donné autrefois dans ſon Traité du nivellement pour l'élévation de la ligne horizontale apparente au deſſus du vray horiſon nous ſervira de baſe, & en inſtituant l'operation indiquée ci deſſus, nous en tirerons une autre, qui marquera la correction entière à apporter au nivellement, c'eſt à dire qui renferme tant la différence des horiſons vray & apparent que l'effet de la réfraction, depuis 100 jusqu'à 4000 Toiſes francoiſes de diſtance. Voici la table: pour toutes ces diſtances:

Distance		Correction	
Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
100 - - -	0	0	0
150 - - -	0	0	$2\frac{1}{4}$
200 - - -	0	0	4
250 - - -	0	0	$6\frac{1}{4}$
300 - - -	0	0	9
350 - - -	0	1	[illegible]
400 - - -	0	1	4
450 - - -	0	1	$8\frac{1}{4}$
500 - - -	0	2	$\frac{1}{4}$
550 - - -	0	2	$7\frac{1}{2}$
600 - - -	0	3	0
650 - - -	0	3	6
700 - - -	0	4	0
750 - - -	0	4	$8\frac{1}{4}$
800 - - -	0	5	$3\frac{1}{4}$
850 - - -	0	5	$11\frac{1}{8}$
900 - - -	0	6	$8\frac{1}{4}$
950 - - -	0	7	6
1000 - - -	0	8	3
1250 - - -	1	0	$10\frac{1}{4}$
1500 - - -	1	6	$6\frac{3}{4}$
1750 - - -	2	1	$3\frac{1}{2}$
2000 - - -	2	9	0
2250 - - -	3	5	10
2500 - - -	4	3	$6\frac{1}{4}$
3750 - - -	5	2	$5\frac{1}{2}$
3000 - - -	6	2	3
3250 - - -	7	3	$2\frac{1}{2}$
3500 - - -	8	5	0
3750 - - -	9	8	$1\frac{1}{2}$
4000 - - -	11	0	0

Par

Par le moyen de cette Table il ſera fort aiſé de connoître la pente d'une rivière, qui coule de *a* en *v*, ou bien, après avoir tirée la ligne horizontale *a d*, qui eſt un arc de cercle décrit du centre de la Terre, on pourra failement déterminer l'intervalle *d v*, dont la ſurface de l'eau en *v* ſe trouve au deſſous du point *d*; vû que cet intervalle *d v* méſure la pente de la rivière depuis *a* jusqu'à *v*. Pour cet effet ſoit A le lieu de l'oeil élevé au deſſus de l'eau en *a* de l'intervalle A*a*, & qu'on conçoive tirée de A la véritable ligne horizontale AD qui eſt pareillement un arc de cercle décrit du centre de la Terre, & aprés avoir érigé auprès de *v* verticalement une pique, qu'on y viſe par un bon inſtrument de niveau fixé en A, par le quel on y découvre le point O, dont le rayon de lumière paſſe par les dioptres de l'inſtrument. Ce point étant bien marqué ſur la pique on n'a qu'à méſurer ſon élévation O *v* au deſſus de la ſurface de l'eau en *v*; de cette hauteur O *v* on retranche prémiérement l'intervalle O D marqué dans la table, qui repond à la diſtance A D $= s$ & qui eſt $= \frac{3}{4} \cdot \frac{ss}{2a}$; outre cela on en rétranche auſſi l'intervalle D $d =$ A a, & il reſtera la pente cherchée, ou bien l'intervalle *d v*. Ainſi ſi la diſtance A D étoit de 1500 Toiſes, la table marque pour cette diſtance l'intervalle O D $= 1'. 6''. 6\frac{3}{4}'''$. Suppoſant donc l'élévation de l'oeil au deſſus de *a*, ou bien A $a = 4$ pieds, à la quelle eſt égale l'intervalle D *d*, & qu'on ait trouvé la hauteur entière *v* O de $7'. 3''$. la pente de la rivière de *a* en *v*, en retranchant de $7'. 3''$. la hauteur O $d = 5'. 6''. 7\frac{3}{4}'''$, ſera $v\,d = 1'. 8''. 5\frac{1}{4}'''$, ou bien à peu près $20\frac{1}{2}$ pouces.

Tab. II. Fig. 5.

Tab. II. Fig. 7.

Application de la Théorie à la mésure de la hauteur des objets terrestres.

Supposons, qu'on demande la hauteur de l'objet O au dessus de la vraye ligne horizontale A D tirée par l'oeil du spectateur en A, qu'on nomme la distance A D $= s$, qu'on vise par le moyen d'un bon quart de cercle fixé en A vers l'objet O, dont on trouve la hauteur au dessus de l'horison, ou bien l'angle O A D $= \theta$, de sorte, qu'ayant tiré la verticale A B, l'angle O A B soit $= 90^\circ - \theta$, qui ayant été nommé $= \zeta$, on aura $\zeta = 90^\circ - \theta$. Il s'agit donc, qu'en connoissant ces deux élémens, c'est à dire la distance A D $= s$ & l'angle D A O $= \theta$, on détermine la véritable hauteur D O.

Fig. 8. Pour résoudre cette question soit C le centre de la Terre, d'où l'on décrive par le lieu du spectateur A l'arc de cercle A D, qui nous représentera le vray horison, au dessus duquel il faut chercher la hauteur D O. Ayant tiré de l'objet O au centre de la Terre C la droite O C l'on aura l'arc A D $= s$ & partant l'angle A C D $= \frac{s}{a} = \Phi$. Maintenant puisqu'on peut regarder le rayon de lumière O A comme un arc de cercle, dont le rayon est $\frac{m\,k}{\delta\, cos.\theta}$, que nous nomerons $= g$, de sorte que $g = \frac{m\,k}{\delta\, co.\theta} = \frac{13333333}{cos.\theta}$ toises, & puisque l'arc A O fait avec la horizontale A D un angle $= \theta$, on n'a qu'à prendre l'angle C A G $= \theta$ & le centre de cet arc A O se trouvera en G à la distance A G $= g$. Soit F l'interfection de cette ligne A G avec la droite C O, & on aura l'angle A F O $= \theta + \Phi$, que nous nommerons pour abreger $= \eta$, de sorte que $\eta = \theta + \Phi$, & le triangle C A F nous donnera $CF = \frac{a\, sin.\theta}{sin.\eta}$ & $AF = \frac{a\, sin.\Phi}{sin.\eta}$, d'où

d'où l'on aura $FG = g - \frac{a \sin.\Phi}{\sin.\eta} = f$, pour abréger, de ſorte que $FG = f = g - a\frac{\sin.\Phi}{\sin.\eta}$.

Qu'on tire enſuite ſur la droite O C prolongée du point G la perpendiculaire G K, & puiſque dans le triangle G F K on a le côté $FG = f$ & l'angle $GFK = AFO = \eta$, on aura la perpendiculaire $GK = f \sin.\eta$ & l'intervalle $FK = f \operatorname{cof}.\eta$. Enfin qu'on tire auſſi la ligne G O, & puiſque $GO = AG = g$, le triangle rectangle G K O nous fournit le côté $OK = \sqrt{gg - ff \sin.\eta^2}$, d'où, rétranchant l'intervalle $DK = DF + FK = a - \frac{a \sin.\theta}{\sin.\eta} + f \operatorname{cof}.\eta$, il reſtera la hauteur cherchée $DO = \sqrt{gg - ff \sin.\eta^2} - a + \frac{a \sin.\theta}{\sin.\eta} - f \operatorname{cof}.\eta$.

Avant que de developper cette formule, appliquons nôtre calcul à un cas déterminé, où la diſtance $AD = s$ ſoit $= 24000$ Toiſes & O le ſommet d'une montagne, qui paroiſſe élevée en A au deſſus de l'horiſon ſous un angle $\theta = 3°.\ 20'$. Dans ce cas là pour trouver O G on n'a qu'à diviſer 13333333 par cof. 3°. 20', ce qui donne $OG = g = 13355930$; enſuite à cauſe de $\Phi = \frac{s}{a}$ on trouve $\Phi = 25'.\ 14''$, par conſéquent $\eta = 3°.\ 45'.\ 14''$ & partant on trouvera $CF = AF$, de la manière ſuivante;

$l\,a = 6,5144543$	$l\,a = 6,5144543$
$l \sin.\theta = 8,7645111$	$l \sin.\Phi = 7,8656968$
$5,2789654$	$4,3801511$
$l \sin.\eta = 8,8160480$	$l \sin.\eta = 8,8160480$
$l\,CF = 6,4629174$	$l\,AF = 5,5641031$
CF = 2903470 toiſes	AF = 366523 toiſes

d'où

d'où l'on tire l'intervalle D F = 365827 toiſes; enſuite pour le triangle G F K on aura F G = f = 12989407 & de la G K = 850427. & F K = 12961540 toiſes & partant D K = 13327367. Maintenant pour calculer l'intervalle O D cherchons d'abord l'angle G O R = ψ, dont on connoît le ſinus, ſçavoir $\text{ſin.}\,\psi = \frac{GK}{GO} = \frac{f\,\text{ſin.}\,\eta}{g}$, d'où l'on tire cet angle $\psi = 3^\circ.\,39'$, & il eſt clair, qu'il y aura $OK = g\,\text{coſ.}\,\psi = 13328840$; delà retranchons l'intervalle trouvé D K = 13327367, & nous aurons la hauteur cherchée D O = 1473 toiſes.

De cet exemple il eſt évident, que les angles Φ, θ & η ſont ordinairement très petits, de ſorte que pour leur ſinus on peut ſubſtituer les angles mêmes. Introduiſons en général l'angle G O K = ψ, pour que $g\,\text{ſin.}\,\psi = f\,\text{ſin.}\,\eta$, ou bien $g\psi = f\eta$ & partant $\psi = \frac{f\eta}{g}$. Delà on aura l'intervalle $DO = g\,\text{coſ.}\,\psi - a + \frac{a\theta}{\eta} - f\,\text{coſ.}\,\eta$. Mettons donc $\text{coſ.}\,\psi = 1 - \frac{1}{2}\psi\psi = 1 - \frac{ff\eta\eta}{2gg}$, pour avoir

$$DO = g - \frac{ff\eta\eta}{2g} - a + \frac{a\theta}{\eta} - f\,\text{coſ.}\,\eta$$

& en mettant au lieu de f la valeur $g - \frac{a\Phi}{\eta}$ & partant

$g - f = \frac{a\Phi}{\eta}$ on aura $DO = \frac{1}{2}f\eta\eta\left(1 - \frac{f}{g}\right) = \frac{af\Phi\eta}{2g}$.

Voici donc une formule aſſés ſimple, qui nous exprime la hauteur cherchée D O, qui eſt ouvertement proportionelle à l'angle Φ, ou bien à l'eſpace s & à l'angle $\eta = \theta + \Phi$. Mettant donc au lieu de $a\Phi$ ſa valeur s, nous aurons $DO = \frac{fs\eta}{2g}$: enſuite puiſque $f = g - \frac{a\Phi}{\eta} = g - \frac{s}{\eta}$, nous aurons $\frac{f}{g} = 1 - \frac{s}{g\eta}$; & puiſque $g = \frac{mk}{\delta\,\text{co.}\,\theta}$, nous aurons $\frac{f}{g} = 1 - \frac{\delta s\,\text{coſ.}\,\theta}{mk\eta}$. Cette valeur ſubſtituée donne l'intervalle $DO = \frac{s\eta}{2} - \frac{\delta ss\,\text{coſ.}\,\theta}{2mk}$.

Or

Mais la formule, que nous venons de trouver pour la hauteur $DO = \frac{fs\eta}{2g}$, est ouvertement fausse. Pour s'en assurer on n'a qu'à considérer le cas, où la distance AO est extrèment petite & où par conséquent l'observation ne sçauroit être troublée ni par la courbure de la Terre ni par celle du rayon de lumière; de sorte que dans ce cas on doit trouver $DO = s \,\text{tang.}\, \theta$, ou bien, si l'angle θ est très petit, $DO = s\theta = s\eta$, à cause de $\Phi = 0$. Or pour le même cas (à cause de

$$f = g - \frac{a\,\text{sin.}\,\Phi}{\text{sin.}\,\eta} = - \frac{s}{\text{sin.}\,\eta} + g,$$

d'où il s'ensuit $\frac{f}{g} = 1 - \frac{s}{g\,\text{sin.}\,\eta}$, infiniment petit) la formule trouvée nous donneroit $DO = \frac{1}{2} s\eta$, qui n'est que la moitié de la valeur véritable. Cependant on ne trouve presque aucune faute dans le raisonnement, qui nous a conduit à cette formule: mais puisque nous avons employees plusieurs approximations, il n'y a aucun doute, qu'elle manque d'exactitude. Il faut donc développer plus soigneusement ce calcul extrèmement délicat, & rien negliger de ce qui pourroit contribuer la moindre chose à la détermination de la hauteur cherchee DO, & c'est ce qui sera l'objet des recherches suivantes.

D'abord je remarque, que puisque nous avons trouvé $g = \frac{mk}{\delta\,\text{cos.}\,\theta}$, il y aura à fort peu près $g = \frac{4a}{\text{cos.}\,\theta}$; car ayant trouvée dans le calcul du cas rapporté ci-dessus, où $\theta = 0$, la valeur de $g = 13333333$, qui est à peu près le quadruple du rayon de la Terre, nous aurons assés exactement le rayon de courbure $g = \frac{4a}{\text{cos.}\,\theta}$ & partant toujours plus grand que $4a$. En second lieu j'observe qu'on ne sçauroit tirer les approximations que de l'extrème petitesse de l'angle Φ, puisque les angles θ & η pourroit bien devenir assés considérables en certains cas; desorte

 qu'il

qu'il ne feroit plus permis de fuppofer $\sin.\eta = \eta$ & $\cos.\eta = 1 - \frac{1}{2}\eta^2$, comme nous faifions tantôt. Cela remarqué, puisqu'il s'agit de trouver l'intervalle $DO = OK - DK$, développons féparément tant la valeur de OK que celle de DK. Or nous avons vu que $OK = \sqrt{gg - ff\sin.\eta^2}$, & puisque $f = g - \frac{s}{\sin.\eta}$, nous aurons $f\sin.\eta = g\sin.\eta - s$, ce qui étant fubftitué nous donne

$$OK = \sqrt{gg\cos.\eta^2 + 2gs\sin.\eta - ss}.$$

Ici on voit que le premier terme furpaffe très confiderablement les deux autres; d'où en extrayant la racine par approximation nous aurons

$$OK = g\cos.\eta + s\,\mathrm{tang}.\eta - \frac{ss}{2g\cos.\eta},$$

où il fera même permis de rejetter le dernier terme.

De la même manière ayant trouvé l'intervalle

$$DK = a - \frac{a\sin.\theta}{\sin.\eta} + f\cos.\eta.$$

fi nous fubftituons au lieu de f fa valeur $g - \frac{s}{\sin.\eta}$, cet intervalle deviendra

$$DK = a - \frac{a\sin.\theta}{\sin.\eta} + g\cos.\eta - s\cot.\eta;$$ & puisque $\theta = \eta - \Phi$ & partant $\sin.\theta = \sin.\eta - \Phi\cos.\eta$, à caufe de Φ quafi infiniment petit, nous aurons

$$DK = g\cos.\eta + \frac{a\Phi\cos.\eta}{\sin.\eta} - s\cot.\eta = g\cos.\eta.$$

Retranchons donc cette valeur de la précédente & il reftera la hauteur cherchée $DO = s\,\mathrm{tang}.\eta - \frac{ss}{2g\cos.\eta}$, ou bien à fort peu près $DO = s\,\mathrm{tang}.\eta$, expreffion qui eft parfaitement bien d'accord avec le cas marqué ci-deffus, puisque les angles θ & η ne différent que de l'angle extremement petit Φ. Ayant trouvée cette formule fi fimple faifons en l'application au cas rapporté ci-deffus, où nous avons fuppofé $s = 24000$ Toifes, l'Angle $\theta = 3^\circ\,20'$ &

$\eta = 3^\circ$.

$\eta = 3^\circ. 45'. 14''$, & ces deux valeurs nous donnent la hauteur D O = 1574,7, qui eſt plus grande que celle que nous avons trouvée auparavant; mais dans cet exemple l'obſervation s'etend auſſi à une ſi grande diſtance que nous n'aurions pas dû négliger le dernier terme $\frac{ss}{2\,g\,coſ.\,\eta}$ dans l'expreſſion D O, qui, à cauſe de $g = \frac{4\,a}{coſ.\,\theta}$, devient $\frac{ss\,coſ.\,\theta}{8\,a\,coſ.\,\eta}$, ou fort à peu près $\frac{ss}{8\,a}$, dont la valeur ſe trouve de 22 Toiſes, qui étant otées de la premiere partie laiſſent la hauteur D O = 1552 Toiſes. Cependant la difference eſt encore très conſidérable; mais il faut ici bien remarquer, que la moindre faute commiſe dans le premier calcul logarithmique a neceſſairement du produire une erreur très conſidérable dans la hauteur D O.

Nous pourrons donc employer avec meilleur ſuccès la dernière formule pour la hauteur: $DO = s\,\text{tang.}\,\eta - \frac{ss\,coſ.\,\theta}{8\,a\,coſ.\,\eta}$ dont l'application dans chaque cas eſt ſi aiſée, qu'il ſeroit ſuperflû de conſtruire des tables, pour en faciliter les opérations. Car l'obſervation donne d'abord dans chaque cas tant la diſtance horizontale A D = s que l'angle d'élévation D A O = θ; enſuite par le moyen du rayon de la Terre C A = a on n'a qu'à chercher l'angle $ACO = \Phi = \frac{s}{a}$, qui étant ajouté à l'angle θ nous donne l'angle η, d'où l'on calculera aiſément la valeur de la formule trouvée, par rapport à la quelle il faut remarquer, que le dernier terme de nôtre formule $\frac{ss\,coſ.\,\theta}{8\,a\,coſ.\,\eta}$ renferme l'effet de la réfraction, puisque il évanouiroit ouvertement, ſi le rayon venoit en ligne droite; car alors on auroit $g = \infty$ & partant le dernier terme $\frac{ss}{2\,g\,coſ.\,\eta} = 0$.

Evolution de l'équation differentielle trouvée ci-dessus: $\frac{dt}{t} = \frac{\delta e^{-\frac{x}{mk}} dz}{mk}$.

L'intégration de cette équation nous fournit d'abord $l\,t =$ const. $- \delta\, e^{-\frac{x}{mk}}$, où pour déterminer la constante on n'a qu'à considérer le cas, où le point indéterminé Z tombe en A & partant $x = 0$. Puis donc que t exprime la perpendiculaire tirée du centre de la Terre sur la tangente de la courbe en Z, en prennant Z en A, cette perpendiculaire deviendra a sin. ζ, à cause de l'angle BAO $= \zeta$. Or posons cette perpendiculaire a sin. $\zeta = b$, & il est clair, que faisant $x = 0$ il doit devenir $t = b$, d'où l'on tire cette équation: $l\,b =$ Const. $- \delta$ & partant $C = \delta + l\,b$, d'où nôtre équation intégrée sera $l\frac{t}{b} = \delta\,(1 - e^{-\frac{x}{mk}})$; où il faut remarquer, que plus la hauteur x augmente, plus la valeur de $e^{-\frac{x}{mk}}$ sera diminuée.

Tab. II. Fig. 4.

Posons pour abréger $1 - e^{-\frac{x}{mk}} = v$, de sorte que tant que la hauteur x est peu considérable par rapport à $m\,k = 4000$ Toises, on aura à fort peu près $v = \frac{x}{mk} - \frac{xx}{2\,m^2\,k^2}$, ou pour les observations ordinaires, où la distance AO n'est par fort considerable, on peut toujours supposer $v = \frac{x}{mk}$; de là nous aurons cette équation: $l\frac{t}{b} = \delta\, v$ & partant $t = b\, e^{\delta v}$.

Maintenant puisque δ est une fraction extrèmement petite, nous aurons asses exactement $t = b\,(1 + \delta\, v)$ ou bien $t = b\,(1 + \frac{\delta x}{mk} - \frac{\delta xx}{2\,m^2\,k^2})$. Or nous avons vu ci-dessus,

ſus, que $d\Phi = \frac{t\,dz}{2\sqrt{zz-tt}}$, où $z = a + x$ & $dz = dx$, de ſorte que $d\Phi = \frac{t\,dx}{(a+x)\sqrt{(a+x)^2 - tt}}$. Il s'agit donc de trouver l'intégrale de cette formule, qu'il faut déterminer enſorte, que faiſant $x = 0$ & partant $t = b$, il devienne $\Phi = 0$; & ayant trouvé cette intégrale on n'a qu'à ſuppoſer l'angle Φ égal à l'angle A C O, dont la méſure eſt l'arc A D diviſé par le rayon de la Terre A C $= a$, & alors on en doit tirer la valeur de x. Après donc avoir fait les ſubſtitutions de t, en negligeant le terme $\frac{\delta x^2}{2m^2k^2}$, on aura à intégrer cette équation :

$$d\Phi = \frac{b\left(1 + \frac{\delta x}{mk}\right)dx}{(a+x)\sqrt{(a+x)^2 - bb\left(1 + \frac{\delta x}{mk}\right)^2}}.$$

Pour trouver cette intégrale conſidérons d'abord le cas $\delta = 0$, pour avoir l'équation $d\Phi = \frac{b\,dx}{(a+x)\sqrt{(a+x)^2 - bb}}$, où en mettant au lieu de $a + x$ ſa valeur z, nous aurons $d\Phi = \frac{t\,dz}{z\sqrt{zz - tt}}$. Soit à préſent $a + x = \frac{b}{u}$, de ſorte que $dx = -\frac{b\,du}{uu}$ & on aura $d\Phi = -\frac{du}{\sqrt{1 - uu}}$, dont l'intégrale eſt

$$-\text{A ſin. } u = -\text{A ſin. } \frac{b}{a+x} + C = \Phi,$$

où pour déterminer la conſtante C on n'a qu'à faire $x = 0$ & $\Phi = 0$, ce qui donne $C = \text{A ſin. } \frac{b}{a} = \zeta$, de ſorte que nous aurons $\Phi = \zeta - \text{A ſin. } \frac{b}{a+x}$; de là il s'enſuit $\text{A ſin. } \frac{b}{a+x} = \zeta - \Phi$ & par conſéquent $\frac{b}{a+x} = \text{ſin. } (\zeta - \Phi)$ & enfin la hauteur $x = \frac{b - a\,\text{ſin. }(\zeta - \Phi)}{\text{ſin. }(\zeta - \Phi)}$. Cette formule exprimeroit la véritable valeur de x, s'il n'y avoit point de réfraction : d'ailleurs à cauſe de $b = a\,\text{ſin. }\zeta$ elle ſe change en celle-ci $x = \frac{a\,\text{ſin. }\zeta}{\text{ſin. }(\zeta - \Phi)} - a$. Donc puiſque l'angle Φ eſt toujours très petit, on aura

 ſin.

fin. $(\zeta - \Phi) = $ fin. $\zeta - \Phi$ cof. ζ & réciproquement
$$\frac{1}{fin.(\zeta - \Phi)} = \frac{1}{fin.\zeta} + \frac{\Phi\, cof.\zeta}{fin.\zeta^2}$$
ce qui donne $x = \frac{a\Phi\, cof.\zeta}{fin.\zeta}$, ou bien en mettant l'arc A D $= s$, à caufe de $a\Phi = s$, nous aurons $x = s$ cot. ζ; où la courbure de la Terre n'entre pas en confidération; mais pour en tenir compte on peut fuppofer l'angle $\zeta - \Phi = \psi$, pour avoir $\zeta = \Phi + \psi$ & partant
$$\text{fin.}\,\zeta = \text{fin.}\,\psi + \Phi\,\text{cof.}\,\psi$$
& on aura
$$x = \frac{a\Phi\, cof.\psi}{fin.\psi} = s\ \text{cot.}\,\psi;$$
ou bien fans recourir aux approximations on aura plus exactement
$$x = \frac{2\,a\ \text{fin.}\,\frac{1}{2}\Phi\ \text{cof.}\,(\zeta - \frac{1}{2}\Phi)}{\text{fin.}\,(\zeta - \Phi)} \quad \text{ou bien}$$
$$x = \frac{s\ \text{cof.}\,(\zeta - \frac{1}{2}\Phi)}{\text{fin.}\,(\zeta - \Phi)}.$$

En pourfuivant le calcul de la même manière pour le cas, où δ n'eft pas évanouiffant, mettons d'abord z au lieu de $a + x$, pour avoir
$$d\Phi = \frac{b\,dz\,(1 + \frac{\delta x}{mk})}{z\sqrt{zz - bb\,(1 + \frac{\delta x}{mk})^2}}.$$
Développons le dénominateur de cette formule, ou le radical $(zz - bb - \frac{2\delta bbx}{mk})^{-\frac{1}{2}}$, qui fera par l'évolution $(zz - bb)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\delta bbx}{(zz - bb)^{\frac{3}{2}}}$; cette valeur étant fubftituée, en mettant à part les termes affectés par δ^2, nous fournit
$$d\Phi = \frac{b\,dz}{z\sqrt{zz - bb}} + \frac{\delta bx}{mk} \cdot \frac{dz}{z\sqrt{zz - bb}} + \frac{\delta x b^3 dz}{mk(zz - bb)^{\frac{3}{2}}}$$
&

& ce-ci ſe reduit à cette forme :

$$d\Phi = \frac{b\,dz}{z\sqrt{zz-bb}} + \frac{b\delta x}{mkz} \cdot \frac{zz\,dz}{(zz-bb)^{\frac{3}{2}}}$$

ou bien à

$$d\Phi = \frac{b\,dz}{z\sqrt{zz-bb}} + \frac{\delta b x}{mk} \cdot \frac{z\,dz}{(zz-bb)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous voyons donc que la valeur de $d\Phi$ eſt compoſée de deux parties, dont la premiere a donnée par intégration $\zeta - A\,\text{ſin.}\frac{b}{z}$. Pour l'autre partie mettons $x = z - a$ & elle ſe décompoſe en ces deux membres :

$$-\frac{\delta ab}{mk} \cdot \frac{z\,dz}{(zz-bb)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta b}{mk} \cdot \frac{zz\,dz}{(zz-bb)^{\frac{3}{2}}}$$

dont le premier eſt abſolument integrable, donnant

$$+\frac{\delta ab}{mk} \cdot \frac{1}{\sqrt{zz-bb}}$$

de ſorte que tout revient maintenant à intégrer la formule

$$\int \frac{zz\,dz}{(zz-bb)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dz}{\sqrt{zz-bb}} + bb\int \frac{dz}{(zz-bb)^{\frac{3}{2}}}$$

dont le premier membre depend des logarithmes & donne

$$\int \frac{dz}{\sqrt{zz-bb}} = l(z + \sqrt{zz-bb})$$

& l'autre donne abſolument

$$\int \frac{bb\,dz}{(zz-bb)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{z}{\sqrt{zz-bb}}.$$

Ramaſſons ces parties enſemble & nous aurons

$$\Phi = C + \zeta - A\,\text{ſin.}\frac{b}{z} - \frac{\delta bz}{mk\sqrt{zz-bb}} + \frac{\delta b}{mk}l(z + \sqrt{zz-bb}) + \frac{\delta ab}{mk} \cdot \frac{1}{\sqrt{zz-bb}}$$

ou bien

$$\Phi = C - \frac{\delta bx}{mk\sqrt{zz-bb}} + \zeta - A\,\text{ſin.}\frac{b}{z} + \frac{\delta b}{mk}l(z + \sqrt{zz-bb})$$

Pour

Pour trouver la conſtante faiſons $x = 0$, $z = a$ & $\Phi = 0$ & puisque A ſin. $\frac{b}{a} = \zeta$, nous aurons

$$C = -\frac{\delta b}{mk} l a + \sqrt{aa - bb},$$

qui, à cauſe de $b = a$ ſin. ζ & $\sqrt{aa - bb} = a$ coſ. ζ, ſe reduit à $C = -\frac{\delta b}{mk} l a (1 + \text{coſ.}\, \zeta)$; par conſequent nous aurons l'équation ſuivante:

$$\Phi = \zeta - \frac{\delta b x}{mk\sqrt{zz - bb}} - \text{A ſin.}\, \frac{b}{z} + \frac{\delta b}{mk} l \frac{z + \sqrt{zz - bb}}{a(1 + \text{coſ.}\, \zeta)}.$$

Or il eſt évident, que, quoique on faſſe $\Phi = \frac{s}{a}$, on ne ſçauroit jamais tirer de cette équation la juſte valeur de x ou de z: cette circonſtance nous oblige, de nous arreter à la ſimple ſolution que nous avons donnée ci-deſſus.

Mais puisque nous avons trouvée pour le cas $\delta = 0$, où la réfraction évanouit, cette équation: $x = \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,(\zeta - \Phi)} - a$ & partant $z = \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,(\zeta - \Phi)}$, nous mettrons pour abreger $\zeta - \Phi = \psi$, pour avoir $z = \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi}$. Soit enſuite (en tenant compte de la réfraction) $z = \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi} + \omega$, de ſorte que ω renferme l'effet de la réfraction, qui etant extremement petit, on pourra regarder ω comme la différentielle de z, & il ſera bon de remarquer, que l'expreſſion $z = \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi}$ eſt rigoureuſement vraye dans le cas $\delta = 0$ & ne renferme aucune approximation.

Subſtituons donc maintenant dans la dernière équation que nous venons de trouvér cette valeur $\frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi} + \omega$ au lieu de z, & puisque ω eſt ſuppoſé quaſi infiniment petit, il ſuffira de mettre $z = \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi}$ dans les termes affectés par δ. Cela remarqué faiſons d'abord cette ſubſtitution dans les termes de nôtre équation, qui ne renferment

ment point δ, qui ſont $\Phi = \zeta - A\,\text{ſin.}\,\frac{b}{z}$, où $b = a\,\text{ſin.}\,\zeta$, & puisque en général $A\,\text{ſin.}\,(v + dv) = A\,\text{ſin.}\,v + \frac{dv}{\sqrt{1 - vv}}$, nous avons ici $v = \frac{b}{z}$ & partant

$$dv = -\frac{b\,dz}{zz} = -\frac{b\,\omega}{zz} \;\&\; \sqrt{1 - vv} = \frac{\sqrt{zz - bb}}{z}.$$

Poſant donc $z = \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi}$, nous aurons $v = \text{ſin.}\,\psi$ & partant $A\,\text{ſin.}\,v = \psi = \zeta - \Phi$; enſuite nous aurons

$$dv = -\frac{\omega\,\text{ſin.}\,\psi^2}{a\,\text{ſin.}\,\zeta} \;\&\; \sqrt{1 - vv} = \text{coſ.}\,\psi;$$

de ſorte que $\frac{dv}{\sqrt{1 - vv}} = -\frac{\omega\,\text{ſin.}\,\psi^2}{a\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\psi}$. Ces valeurs étant ſubſtituées nous fourniſſent

$$\Phi = \zeta - \zeta + \Phi + \frac{\omega\,\text{ſin.}\,\psi^2}{a\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\psi} \text{ ou bien } 0 = \frac{\omega\,\text{ſin.}\,\psi^2}{a\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\psi},$$

où il faut encore ajouter les termes qui ſont affectés par δ.

Puisque dans ces termes il ſuffit de mettre $z = \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi}$, à cauſe de $b = a\,\text{ſin.}\,\zeta$ nous aurons $\sqrt{zz - bb} = a\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{cot.}\,\psi$; par conſéquent le terme

$$-\frac{\delta\,b\,x}{mk\sqrt{zz - bb}} \text{ nous donnera } -\frac{\delta}{mk} \cdot \frac{a\,(\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\psi)}{\text{coſ.}\,\psi}$$

Mais pour le dernier terme qui eſt

$$+\frac{\delta\,b}{mk}\,l\,\frac{z + \sqrt{zz - bb}}{a\,(1 + \text{coſ.}\,\zeta)} \text{ nous aurons d'abord}$$

$$z + \sqrt{zz - bb} = \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi}\,(1 + \text{coſ.}\,\psi) \text{ \& partant}$$

$$\frac{z + \sqrt{zz - bb}}{a\,(1 + \text{coſ.}\,\zeta)} = \frac{\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi} \cdot \frac{1 + \text{coſ.}\,\psi}{1 + \text{coſ.}\,\zeta}.$$

Or cette formule ſe reduit à celle-ci:

$$1 + \frac{\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\psi + \text{ſin}\,(\zeta - \psi)}{\text{ſin.}\,\psi\,(1 + \text{coſ.}\,\zeta)}$$

mais puisqu'il y a $\text{ſin.}\,(\zeta - \psi) = \text{ſin.}\,\Phi$ & Φ extremement petit, il y aura $\text{ſin.}\,\psi = \text{ſin.}\,\zeta - \Phi\,\text{coſ.}\,\zeta$, d'où l'expreſſion prendra la forme ſuivante:

$$1 + \frac{\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\zeta + \Phi\,\text{coſ.}\,\zeta + \Phi}{\text{ſin.}\,\psi\,(1 + \text{coſ.}\,\zeta)} = 1 + \frac{\Phi}{\text{ſin.}\,\psi}.$$

 donc

dont le logarithme, à cauſe de Φ extrèmement petit ſera aſſés exactement $\frac{\Phi}{\sin.\psi}$, deſorte que le dernier terme ſe réduit à $\frac{\delta a \sin.\zeta}{m k}\cdot\frac{\Phi}{\sin.\psi}$. Ajoutons ces valeurs à l'équation précédente & nous aurons cette équation:

$$0 = \frac{\omega \sin.\psi^2}{a \sin.\zeta \cos.\psi} - \frac{\delta}{m k}\cdot\frac{a(\sin.\zeta - \sin.\psi)}{\cos.\psi} + \frac{\delta a \sin.\zeta}{m k}\cdot\frac{\Phi}{\sin.\psi}$$

qui à cauſe de $\sin.\zeta - \sin.\psi = \Phi \cos.\zeta$ ſe réduit à celle-ci:

$$0 = \frac{\omega \sin.\psi^2}{a \sin.\zeta \cos.\psi} + \frac{\delta a}{m k}\cdot\frac{\Phi \sin.\Phi}{\sin.\psi \cos.\psi};$$

d'où l'on tire la valeur $\omega = -\frac{\delta a a}{m k}\cdot\frac{\Phi^2 \sin.\zeta}{\sin.\psi^3}$; & puisque nous avons miſe la diſtance horiſontale $AD = a\Phi = s$, nous aurons la valeur $\omega = -\frac{\delta}{m k}\cdot\frac{s s \sin.\zeta}{\sin.\psi^3}$.

A cauſe de la réfraction nous aurons donc

$$z = \frac{a \sin.\zeta}{\sin.\psi} - \frac{\delta}{m k}\cdot\frac{s s \sin.\zeta}{\sin.\psi^3},$$

d'où nous concluons la hauteur de l'objet au deſſus du vray horiſon, c'eſt à dire

$$DO = x = \frac{a(\sin.\zeta - \sin.\psi)}{\sin.\psi} - \frac{\delta}{m k}\cdot\frac{s s \sin.\zeta}{\sin.\psi^3}.$$

Or nous avions trouvé ci-deſſus $\frac{m k}{\delta} = 4a$, d'où, en faiſant uſage de la réduction aſſignée, ſçavoir:

$$\frac{a(\sin.\zeta - \sin.\psi)}{\sin.\psi} = \frac{s \cos.(\zeta - \frac{1}{2}\Phi)}{\sin.(\zeta - \Phi)},$$

nous aurons la hauteur cherchée

$$DO = x = \frac{s \cos.(\zeta - \frac{1}{2}\Phi)}{\sin.(\zeta - \Phi)} - \frac{s s \sin.\zeta}{4 a \sin.(\zeta - \Phi)^3},$$

où le derniere membre $\frac{s s \sin.\zeta}{4 a \sin.(\zeta - \Phi)^3}$ eſt l'effet de la réfraction. Or ayant ſuppoſé ci-deſſus, que le rayon de lumière OA ait partout la même courbure, nous avons trouvé cet effet $= \frac{s s \cos.\theta}{8 a \cos.\eta}$ où

$$\theta = 90° - \zeta \ \& \ \eta = \theta + \Phi = 90° - \psi = 90° - (\zeta - \Phi)$$

en

en introduirant dans cette formule $\frac{s s \operatorname{cof.} \theta}{s a \operatorname{cof.} \eta}$ au lieu des angles η & θ les élémens préfens ζ & Φ nous obtiendrons celle-ci: $\frac{s s \operatorname{fin.} \zeta}{s a \operatorname{fin.} (\zeta - \Phi)}$.

Nous voyons que cette formule différe trop de la précédente, pour qu'on en puiffe attribüer la caufe à quelque défaut de la première hypothèfe de courbure uniforme, qui ne fçauroit jamais manquer pour des petites diftances; d'où il faut conclure, que nous n'avons pas pouffée affés loin l'approximation dans la dernière recherche.

En effet, puisque nous voyons, que la valeur de ω eft déterminée par le quarré du petit angle Φ, il eft évident, que nous aurions dû pouffer les approximations jusqu'à la feconde puiffance de Φ. Ainfi puisque $\psi = \zeta - \Phi$ & partant exactement $\operatorname{fin.} \psi = \operatorname{fin.} \zeta \operatorname{cof.} \Phi - \operatorname{cof.} \zeta \operatorname{fin.} \Phi$, nous pouvons bien mettre comme auparavant $\operatorname{fin.} \Phi = \Phi$, mais au lieu de $\operatorname{cof.} \Phi$ nous devons écrire $1 - \frac{1}{2} \Phi^2$, de forte qu'il y ait $\operatorname{fin.} \psi = \operatorname{fin.} \zeta - \Phi \operatorname{cof.} \zeta - \frac{1}{2} \Phi \Phi \operatorname{fin.} \zeta$. Or cela ne produit aucune différence dans la réduction de la première partie de nôtre équation; mais dans les parties affectées par δ, la première ayant été reduite à cette forme: $-\frac{\delta a}{m k} \cdot \frac{\operatorname{fin.} \zeta - \operatorname{fin.} \psi}{\operatorname{cof.} \psi}$, l'approximation expofée nous donnera $-\frac{\delta a}{m k} \cdot \left(\frac{\Phi \operatorname{cof.} \zeta}{\operatorname{cof.} \psi} + \frac{\Phi \Phi \operatorname{fin.} \zeta}{2 \operatorname{cof.} \psi} \right)$; enfuite l'autre partie logarithmique à été reduite à

$$\frac{\delta b}{m k} l \left(1 + \frac{\operatorname{fin.} \zeta - \operatorname{fin.} \psi + \operatorname{fin.} (\zeta - \psi)}{\operatorname{fin.} \psi (1 + \operatorname{cof.} \zeta)} \right),$$

qui à caufe de $\operatorname{fin.} \zeta - \operatorname{fin.} \psi = \Phi \operatorname{cof.} \zeta + \frac{1}{2} \Phi \Phi \operatorname{fin.} \zeta$ & $\operatorname{fin.} (\zeta - \psi) = \Phi$ fe reduit à la forme fuivante:

$$\frac{\delta a \operatorname{fin.} \zeta}{m k} l \left(1 + \frac{\Phi + \Phi \operatorname{cof.} \zeta + \frac{1}{2} \Phi^2 \operatorname{fin.} \zeta}{\operatorname{fin.} \psi (1 + \operatorname{cof.} \zeta)} \right)$$

 d'où

d'où l'on voit que cette dernière fraction est extremement petite, & partant, si nous écrivons au lieu de cette fraction la lettre α, pour avoir $l(1+\alpha)$ en montant jusqu'à la seconde puissance de Φ nous aurons $l(1+\alpha) = \alpha - \frac{1}{2}\alpha\alpha$; par conséquent, puisque

$$\alpha = \frac{\Phi}{\sin.\psi} + \frac{\Phi\Phi\sin.\zeta}{2\sin.\psi(1+\cos.\zeta)} \quad \& \quad -\frac{1}{2}\alpha\alpha = -\frac{\Phi\Phi}{2\sin.\psi^2}$$

cette dernière partie nous donnera

$$\frac{\delta a\sin.\zeta}{mk}\left(\frac{\Phi}{\sin.\psi} + \frac{\Phi\Phi\sin.\zeta}{2\sin.\psi(1+\cos.\zeta)} - \frac{\Phi\Phi}{2\sin.\psi^2}\right).$$

Mettant donc ces valeurs au lieu de ces formules, nôtre équation pour déterminer la quantité ω sera

$$0 = \frac{\omega\sin.\psi^2}{a\sin.\zeta\cos.\psi} - \frac{\delta a}{mk}\left(\frac{\Phi\cos.\zeta}{\cos.\psi} + \frac{\Phi\Phi\sin.\zeta}{2\cos.\psi}\right) + \frac{\delta a}{mk}\left(\frac{\Phi\sin.\zeta}{\sin.\psi} + \frac{\Phi\Phi\sin.\zeta^2}{2\sin.\psi(1+\cos.\zeta)} - \frac{\Phi\Phi\sin.\zeta}{2\sin.\psi^2}\right).$$

Joignons ensemble les deux membres qui ne contiennent que les Φ, qui donneront $\frac{\Phi\Phi}{\sin.\psi\cos.\psi}$, de sorte que notre équation sera:

$$0 = \frac{\omega\sin.\psi^2}{a\sin.\zeta\cos.\psi} + \frac{\delta a\Phi\Phi}{mk}\left\{\frac{1}{\sin.\psi\cos.\psi} + \frac{\sin.\zeta^2}{2\sin.\psi(1+\cos.\zeta)} - \frac{\sin.\zeta}{2\cos.\psi} - \frac{\sin.\zeta}{2\sin.\psi^2}\right\}.$$

Maintenant on peut hardiment supposer $\psi = \zeta$, étant dejà parvenu au quarré $\Phi\Phi$, puisque la différence monteroit à une puissance encore plus haute de Φ; & on peut faire la même chose dans la première partie qui contient ω, d'où nous parvenons à cette équation:

$$0 = \frac{\omega\sin.\zeta}{a\cos.\zeta} + \frac{\delta a\Phi\Phi}{mk}\left(\frac{1}{\sin.\zeta\cos.\zeta} + \frac{\sin.\zeta}{2(1+\cos.\zeta)} - \frac{\sin.\zeta}{2\cos.\zeta} - \frac{1}{2\sin.\zeta}\right).$$

Ici il est bon de remarquer que le terme $\frac{\sin.\zeta}{2(1+\cos.\zeta)}$ se reduit à $\frac{\sin.\zeta^2}{2\sin.\zeta(1+\cos.\zeta)} = \frac{1-\cos.\zeta}{2\sin.\zeta}$, d'où notre équation devient:

$$0 = \frac{\omega\sin.\zeta}{\cos.\zeta} + \frac{\delta a\Phi\Phi}{2mk}\left(\frac{2}{\sin.\zeta\cos.\zeta} - \frac{\cos.\zeta}{\sin.\zeta} - \frac{\sin.\zeta}{\cos.\zeta}\right)$$

qui

qui ſe reduit à celle-ci:

$$o = \frac{\omega \sin. \zeta}{a \cos. \zeta} + \frac{\delta a \Phi \Phi}{2 m k \sin. \zeta \cos. \zeta}$$ d'où l'on tire enfin $\omega = - \frac{\delta a a \Phi \Phi}{a m k \sin. \zeta^2}$.

Or nous avons trouvé ci-deſſus $\frac{m k}{\delta} = 4 a$, & puisque $a \Phi = s$, nous aurons

$$\omega = - \frac{s s}{8 a \sin. \zeta^2} \text{ \& partant } z = \frac{a \sin. \zeta}{\sin. \psi} - \frac{s s}{8 a \sin. \zeta^2};$$

d'où, retranchant le rayon de la Terre a, nous aurons par la réduction employée ci-deſſus

$$x = \frac{s \cos. (\zeta - \frac{1}{2} \Phi)}{\sin. (\zeta - \Phi)} - \frac{s s}{8 a \sin. \zeta^2}.$$

Cette valeur convient aſſés bien avec celle que la première hypothèſe a fournie, qui étoit

$$x = \frac{s \cos. (\zeta - \frac{1}{2} \Phi)}{\sin. (\zeta - \Phi)} - \frac{s s \sin. \zeta}{8 a \sin. (\zeta - \Phi)},$$

qui dans le cas où ζ eſt près de $90°$ & $\Phi = o$ ne différe abſolument rien de l'autre.

Appliquons à cette dernière formule le cas où $s = 24000$ Tois. $\Phi = 25'. 14''$ $\zeta = 86°. 40'$ & partant $\zeta - \Phi = 86°. 14'. 46'$ & $\zeta - \frac{1}{2}\Phi = 86°. 27'. 23''$ & le calcul ſe fera comme il ſuit:

$l s$ =	4, 3802112	$l \frac{s s}{8 a}$ =	1, 3428781
$l \cos. (\zeta - \frac{1}{2}\Phi)$ =	8, 7910465	$l \sin. \zeta$ =	9, 9992646
	3, 1712577		1, 3421427
$l \sin. (\zeta - \Phi)$ =	9, 9990672	$l \sin. (\zeta - \Phi)$ =	9, 9990672
	3, 1721905		1, 3430755
	1487 Toiſes.		22 Toiſes.

hauteur D O = 1465 Toiſes.

Tab. II. Fig. 8.

Mettons maintenant devant les yeux la dernière formule, que nous venons de trouver comme la plus exacte pour determiner la hauteur d'un objet terreftre. Soit donc O l'objet dont ou veut trouver l'élévation au-deffus de l'horifon A D, ou bien la perpendiculaire D O, & en fuppofant l'obfervateur en A foit la diftance horizontale $AD = s$, & que l'objet lui paroiffe élevé au-deffus de l'horifon de l'angle $DAO = \theta$, enforte que $\zeta = 90° - \theta$. Qu'on cherche alors l'angle $\Phi = \frac{s}{a}$, où a marque le demi diamètre de la Terre $= 3269297$ & la hauteur cherchée de l'objet fera:

$$DO = \frac{s \,\text{fin.}\, (\theta + \frac{1}{2}\Phi)}{\text{cof.}\, (\theta + \Phi)} - \frac{s\, s \,\text{cof.}\, \theta}{8\, a \,\text{cof.}\, (\theta + \Phi)}.$$

Dont l'application à chaque cas n'aura aucune difficulté.

DE

DE MOTV OSCILLATORIO PENDVLI CVIVSCVNQVE, DVM ARCVS DATAE AMPLITVDINIS ABSOLVIT.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Quando vulgo doctrina de motu pendulorum in elementis Mechanicae tractatur, potiſſimum ſpectari ſolent pendula ſimplicia, quae, dum oſcillantur, excurſiones infinite paruas peragunt; vnde longitudo penduli ſimplicis ſingulis minutis oſcillantis ſollicite determinari ſolet. Cum autem pendula, quibus experimenta inſtitui ſolent, neque ſint ſimplicia, neque oſcillationes, quantumuis fuerint exiguae, tanquam infinite paruae ſpectari queant, illa theoria duplici correctione indiget, quarum altera per centrum oſcillationis remedium affertur, dum ſcilicet, propoſito pendulo quocunque, longitudo penduli ſimplicis quaeritur, quod paribus temporibus oſcillationes ſuas infinite paruas abſolvat: altera vero correctio, quam oſcillationes per arcus maiores factae exigunt, etſi a Geometris iam omni ſtudio eſt definita, tamen non ita in vulgus eſt cognita, vt ad quosuis caſus facile accommodari queat. Praeterea vero etiam iſta poſterior correctio tantum ad pendula ſimplicia reſtringi ſolet; vnde non inutile videtur iſtud argumentum ita in genere pertractare, vt inde ſine vllo labore correctiones pro pendulis vtcunque compoſitis et pro quauis

arcuum

arcuum descriptorum amplitudine peti queant; in quo quidem negotio animum a resistentia aëris aliisque impedimentis abstrahemus, quandoquidem oscillationes inde oriundae iam satis accurate a Geometris sunt inuestigatae.

Tab. III. Fig. 1.

§. 2. Denotet igitur in figura punctum A axem horizontalem, circa quem pendulum quodcunque AG oscillationes peragat, vbi quidem planum tabulae verticale est concipiendum, ad quod axis A sit normalis, ita vt pendulum in hoc plano verticali oscillationes suas absoluat, in quo porro concipiatur recta verticalis AB, quae situm naturalem penduli, in quo acquiescere possit, referat; id quod continget, quando centrum grauitatis totius penduli in ista recta verticali AB extiterit. Tum vero angulus $BAG = \zeta$ repraesentet excursionem maximam, ad quam pendulum in motu suo oscillatorio a recta verticali AB vtrinque alternatim digrediatur; ita vt iam nobis incumbat tempus definire, quo pendulum ex situ obliquo AG ad rectam verticalem AB sit peruenturum, quippe quod bis sumptum indicabit tempus vnius oscillationis. Per se autem manifestum est, rectam AG, vnde angulus excursionis $BAG = \zeta$ aestimatur, per centrum grauitatis totius penduli ab axe A duci debere.

§. 3. Sit igitur punctum G centrum grauitatis totius penduli, vtcunque fuerit compositum, ac ponatur eius distantia ab axe $AG = a$; tota vero penduli massa indicetur littera M, qua simul eius pondus designetur; vnde vis grauitatis in hoc pendulum ita aget, ac si ipsi in ipso centro grauitatis G applicata esset vis $= M$, in directione verticali GH sollicitans. Praeterea vero principia motus postulant, vt innotescat momentum inertiae totius penduli respectu axis per centrum grauitatis G ducti et axi gyrationis

nis A paralleli, quod reperitur, si singula penduli elementa per quadrata distantiarum suarum ab isto axe per G ducto multiplicentur atque omnia ista producta in vnam summam colligantur. Statuatur igitur istud momentum inertiae $= M k k$, quandoquidem semper assignare licebit eiusmodi longitudinem k, vt productum $M k k$ aequetur summae omnium memoratorum productorum elementarium. Cognito autem isto momento inertiae respectu puncti G ex Mechanica constat, eius momentum inertiae respectu axis gyrationis A fore $= M(a a + k k)$.

§. 4. Consideremus nunc situm penduli quemcunque, quem inter oscillandum teneat, vbi recta $AG = a$, cum recta verticali AB constituat angulum $BAG = \Phi$, qui igitur est variabilis, dum a situ verticali, vbi $\Phi = 0$, alternatim vtrinque vsque ad $\Phi = \zeta$ excrescere potest, siquidem ζ amplitudinem excursionis maximae denotat. Cum igitur pendulum a sola vi grauitatis vrgeri statuatur, vim sustinebit centro grauitatis G in directione verticali GH applicatam $= M$, cuius ergo momentum respectu axis gyrationis A erit $= M a \sin. \Phi$, cuius actio tendit ad angulum $BAG = \Phi$ diminuendum. Vnde, si pendulum ad situm verticalem AB accedat, eius motus ab ista vi accelerabitur; contra vero, si pendulum a situ naturali recedat, eius motus ab hac vi tantundem retardabitur; ex quo intelligitur, tam accessiones quam recessiones aequalibus temporibus absolui debere.

§. 5. Concipiamus igitur pendulum a situ naturali AB recedere, et elapso tempore t peruenisse in situm AG, confecto angulo $BAG = \Phi$. Sumamus porro tempus t in minutis secundis exprimi, et quoniam pendulum elemento

Tab. III. Fig. 2.

temporis dt conficiet angulum G A $g = d\Phi$, eius celeritas angularis erit $\frac{d\Phi}{dt}$, ideoque eius differentiale per dt diuisum dabit accelerationem $= \frac{dd\Phi}{dt^2}$, sumpto scilicet elemento dt constante, quae acceleratio secundum principia motus proportionalis est momento vis sollicitantis diuiso per momentum inertiae totius corporis respectu axis gyrationis, qui est in A. Vidimus autem momentum vis sollicitantis esse $= Ma \sin. \Phi$, quod, quia tendit ad motum retardandum, negatiue accipi debet; tum vero ostendimus momentum inertiae esse $= M(aa + kk)$. Quod si iam littera g denotet altitudinem, ex qua grauia vno minuto secundo delabuntur, praecepta Mechanicae nobis suppeditant istam aequationem differentialem secundi gradus:

$$\frac{dd\Phi}{dt^2} = -\frac{2gMa \sin. \Phi}{M(aa+kk)} = -\frac{2ga \sin. \Phi}{aa+kk}$$

ex qua totum penduli motum deriuare oportet.

§. 6. Multiplicemus hanc aequationem vtrinque per $2d\Phi$, et quia $\int d\Phi \sin. \Phi = -\cos. \Phi$, hinc integrando consequimur hanc aequationem: $\frac{d\Phi^2}{dt^2} = \frac{4ga \cos. \Phi}{aa+kk} + C$, vbi ad constantem rite determinandam notetur, formulam $\frac{d\Phi^2}{dt^2}$ exprimere quadratum celeritatis angularis, quae cum euanescere debeat, quando pendulum ad maximam excursionem pertigerit, hoc est, casu, quo fit $\Phi = \zeta$, haec constans ita definietur, vt sit $C = -\frac{4a \cos. \zeta}{aa+kk}$ ita vt iam aequatio motum penduli definiens fit $\frac{d\Phi^2}{dt^2} = \frac{4ga(\cos. \Phi - \cos. \zeta)}{aa+kk}$. Ponamus breuitatis gratia $\frac{aa+kk}{a} = b$ et habebimus

$$\frac{d\Phi^2}{dt^2} = \frac{4g}{b}(\cos. \Phi - \cos. \zeta)$$

vbt notetur, longitudinem $b = a + \frac{kk}{a}$ exprimere distantiam centri oscillationis ab axe suspensionis, siue, quod eodem redit, longitudinem penduli simplicis isochroni, quod scilicet eundem motum oscillatorium esset recepturum, siquidem arcus eiusdem amplitudinis absolueret. Hinc igitur

tur patet, ipſo initio, quo pendulum ex ſitu verticali AB receſſit, quadratum eius celeritatis fuiſſe $= \frac{4g}{b}(1 - \cos.\zeta)$ quae formula ſimul exprimit altitudinem huic celeritati debitam.

§. 7. Quaeramus nunc ex hac aequatione valorem elementi temporis dt, qui erit $dt = \frac{d\Phi\sqrt{b}}{2\sqrt{g(\cos.\Phi - \cos.\zeta)}}$ cuius ergo formulae integrale erit inueſtigandum. Hunc in finem ponamus $\sin.\frac{1}{2}\zeta = c$ et $\sin.\frac{1}{2}\Phi = z$, fietque

$$\cos.\zeta = 1 - 2cc \text{ et } \cos.\Phi = 1 - 2zz;$$

deinde vero, cum ſit $\cos.\frac{1}{2}\Phi = \sqrt{1-zz}$, ſumptis differentialibus erit $\frac{1}{2}d\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi = dz$, vnde concluditur $d\Phi = \frac{2dz}{\sqrt{1-zz}}$; quibus valoribus ſubſtitutis erit noſtrum elementum temporis $dt = \frac{dz\sqrt{b}}{\sqrt{2g(cc-zz)(1-zz)}}$ ſiue $\frac{dt\sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = \frac{dz}{\sqrt{(cc-zz)(1-zz)}}$ cuius integrale, vt totum tempus aſcenſus a $\Phi = 0$ vsque ad $\Phi = \zeta$ exprimat, extendi debet a $z = 0$ vsque ad $z = c$, hocque modo obtinebitur tempus vnius dimidiae oſcillationis; vbi notetur, quantitatem c vnitatem nunquam ſuperare poſſe atque adeo in exiguis oſcillationibus fore fractionem valde paruam.

§. 8. Vt ambo termini integrationis ad terminos 0 et 1 reuocentur, ſtatuatur $z = cy$ et aequatio noſtra induet hanc formam: $\frac{dt\sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)(1-ccyy)}}$. Quo nunc hinc integrale per ſeriem infinitam expreſſum elicere queamus, poſtremum factorem $\frac{1}{\sqrt{(1-ccyy)}} = (1 - ccyy)^{-\frac{1}{2}}$ in ſeriem euoluamus, quae erit

$$1 + \tfrac{1}{2}ccyy + \tfrac{1.3}{2.4}c^4y^4 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}c^6y^6 + \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}c^8y^8 + \text{etc.}$$

ita vt nunc habeamus

$$\frac{dt\sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = \frac{dy}{\sqrt{1-yy}}\left(1 + \tfrac{1}{2}ccyy + \tfrac{1.3}{2.4}c^4y^4 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}c^6y^6 + \text{etc.}\right)$$

vbi ſingularum partium integralia ab $y = 0$ vsque ad $y = 1$

 ſunt

sunt extendenda. Nunc primo statim patet esse $\frac{dy}{\sqrt{1-yy}}=\frac{\pi}{2}$, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $=1$; pro reliquis vero, cum in genere pro iisdem terminis integrationis sit:

$$\int\frac{y^{n+1}\,dy}{\sqrt{(1-yy)}}=\frac{n}{n+1}\int\frac{y^{n-1}\,dy}{\sqrt{(1-yy)}} \text{ erit}$$

$$\int\frac{yy\,dy}{\sqrt{(1-yy)}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int\frac{y^4\,dy}{\sqrt{(1-yy)}}=\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int\frac{y^6\,dy}{\sqrt{(1-yy)}}=\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int\frac{y^8\,dy}{\sqrt{(1-yy)}}=\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\pi}{2}$$

etc. etc.

His igitur valoribus substitutis integratio singularum partium nos perducit ad sequentem seriem:

$$\frac{t\sqrt{2g}}{\sqrt{b}}=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}cc+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}c^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}c^6+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}c^8+\text{etc.}\right)$$

§. 9. Hinc igitur innotescit tempus t pro dimimidia oscillatione, quod duplicatum praebebit tempus vnius oscillationis integrae, quod si indicetur littera T, erit

$$T=\frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2g}}\left(+\frac{1^2}{2^2}cc+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}c^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}c^6+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}c^8+\text{etc.}\right)$$

quod tempus adeo exprimitur in minutis secundis, siquidem g denotet altitudinem, per quam grauia vno minuto secundo libere delabuntur. Atque hinc statim patet, si oscillationes fuerint infinite paruae, quo casu fit $\zeta=0$ ideoque $c=0$, tempus cuiusque oscillationis futurum esse $T=\frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2g}}$, vbi b designat longitudinem penduli simplicis isochroni, siue distantiam centri oscillationis ab axe gyrationis A. Vnde si velimus, vt pendulum singulas oscillationes vno minuto secundo absoluat, fieri debet $\frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2g}}=1$, vnde colligitur longitudo talis penduli simplicis $b=\frac{2g}{\pi\pi}$.

Quare

Quare cum in pedibus Rhenanis ſit $g = 15\frac{5}{8}$ ped. ideoque $2g = 31\frac{1}{4}$ ped. erit longitudo talis penduli $b = 3,16621$. Sin autem longitudo penduli fuerit maior vel minor, tum tempora oſcillationum, vti in vulgus eſt notum, ſequentur rationem ſubduplicatam longitudinis penduli b; vbi autem probe notandum, oſcillationes hic conſiderari infinite paruas.

§. 10. Quod autem ad oſcillationes per arcus maiores attinet, in genere quidem patet ex noſtra formula, quo maiores fuerint hi arcus, quoniam quantitas $c = \text{ſin.}\,\frac{1}{2}\zeta$ etiam augetur, tempora oſcillationum fieri aliquanto minora; quod quo clarius ob oculos ponamus, ſumamus quantitatem cc tam eſſe paruam, vt eius altiores poteſtates c^4, c^6 etc. negligere liceat, ac tum tempus vnius oſcillationis erit $T = \frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2g}}(1 + \frac{1}{4}cc)$, vnde, ſi Θ denotet tempus vnius oſcillationis infinite peruae eiusdem penduli, ob $\Theta = \frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2g}}$ erit nunc $T = \Theta(1 + \frac{1}{4}cc)$, ſiue erit $\Theta : T = 1 : 1 + \frac{1}{4}cc$, id quod valet pro oſcillationibus ſatis exiguis: ſi enim arcus maiores abſoluantur, etiam plures terminos ſeriei inuentae aſſumi oportebit. Vt nunc hanc formulam ad vſum practicum accommodemus, conſideremus noſtrum pendulum A G O in excurſione maxima, ita vt cum recta verticali A B faciat angulum $BAO = \zeta$ ſitque G, vt hactenus, centrum grauitatis penduli, punctum O vero centrum oſcillationis, ita vt ſit $AO = b = \frac{aa+kk}{a}$. Iam ducta ex O horizontali O D erit $OD = b\,\text{ſin.}\,\zeta$ et $AD = b\,\text{coſ.}\,\zeta$, vnde fiet ſagitta $BD = b(1 - \text{coſ.}\,\zeta) = 2b\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\zeta^2$; erit ergo hoc interuallum $BD = 2bcc$. Quoniam igitur, data amplitudine ſiue angulo ζ, hoc interuallum BD facile metiri licet, vocemus id $BD = d$, eritque $cc = \frac{d}{2b}$; quam ob rem pro

Tab. III. Fig. 3.

 oſcil-

oscillationibus satis exiguis erit $\Theta : T = 1 : 1 + \frac{d}{8b}$ siue $\Theta : T = 8b : 8b + d$, hoc est vt $8\,AB : 8\,AB + BD$ qua regula iam passim in experimentando vti solent.

§. 11. Sin. autem oscillationes per maiores arcus peragantur, atque Θ vt ante denotet tempus vnius oscillationis infinite paruae penduli propositi, ob

$$\Theta = \frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2g}} \text{ et } cc = \frac{d}{2b}$$

tempus vnius oscillationis pro angulo $BAO = \zeta$ ita exprimetur vt sit

$$T = \Theta\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{d}{2b} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{dd}{4bb} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{d^3}{8b^3} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}\cdot\frac{d^4}{16b^4} + \text{etc.}\right)$$

vnde si pendulum inter oscillandum totum semicirculum percurrat, ita vt angulus ζ euadat $= 90°$ erit $b = d$ ideoque hoc casu tempus vnius oscillationis erit

$$T = \Theta\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}\cdot\frac{1}{16} + \text{etc.}\right)$$

cuius valor in fractionibus decimalibus computatus colligitur proxime $T = 1,1805\,\Theta$, quae ratio proxime est vt $5 : 6$. Si arcus percursi adeo maiores euadant quam semicirculus, tempora oscillationum continuo magis increscent, atque adeo si pendulum totam peripheriam percurrere debeat, tempus vsque in infinitum augetur; postquam enim pendulum in locum supremum fuerit perductum, situm tenebit verticalem et nunquam ex eo delabetur; vnde mirum non est calculum tempus infinite magnum ostendere. Caeterum, quia hoc casu fit $d = 2b$, series supra inuenta abibit in hanc:

$$1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2} + \text{etc.}$$

cuius summam infinitam esse ex prima formula integrali manifesto liquet, quae, ob $c = 1$, erit $\int \frac{dz}{1-zz}$ a $z = 0$ ad $z = 1$ extendenda; eius vero integrale est $\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+z}{1-z}$, qui valor, posito $z = 1$, manifesto fit infinitus.

Addita-

Additamentum ad dissertationem de motu pendulorum.

§. 12. Cum circa finem superioris dissertationis ostendissem tempus oscillationis in infinitum augeri, si angulus ζ vsque ad 180 grad. excrescat, quaestio hic se offert non parum curiosa, quantum futurum sit tempus oscillationis, quando angulus ζ propemodum ad 180 grad. augetur, ita vt quantitas $c = \text{fin.} \frac{1}{2}\zeta$ tantum non vnitati fiat aequalis, siue quam minime ab ea deficiat; tum enim series inuenta

$$T = \frac{\pi \sqrt{b}}{\sqrt{2g}} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} cc + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} c^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} c^6 + \text{etc.} \right)$$

etsi summam habet finitam, tamen eius termini nimis lente conuergunt, quam vt eius verum valorem saltem proxime inde determinare liceat; neque etiam vlla via patere videtur, istam seriem ita transformandi, vt eius summa satis exacte inde definiri queat.

§. 13. Constituto igitur axe gyrationis in A, circa eum radio $AB = Ab = b$ describatur circulus, in quo diameter Bb situm teneat verticalem. Iam sursum ducatur radius Ag parum a situ verticali discrepans, vnde pendulum per peripheriam circuli descendere incipiat, ita vt angulus bAg sit valde exiguus, quem vocemus $bAg = \eta$. Quare cum in calculo praecedenti littera ζ designasset angulum BAg, erit nunc $\zeta = 180 - \eta$, hincque $c = \text{fin.}(90 - \frac{1}{2}\eta) = \text{cof.} \frac{1}{2}\eta$ propemodum vnitati aequabitur. Ponamus nunc elapso tempore $= t$ pendulum ex g descendisse in Z et vocemus angulum $bAZ = \psi$ ita vt sit angulus $BAZ = \Phi = 180 - \psi$, ideoque, cum posuissemus $z = \text{fin.} \frac{1}{2}\Phi$ erit nunc $z = \text{cof.} \frac{1}{2}\psi$; quam ob rem aequatio pro motu penduli supra inuenta

Tab. III. Fig. 4.

$$\frac{dt\sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)(cc-zz)}}$$

per istos nouos valores euolui debebit.

§. 14. Cum igitur ſit $cc = \cos.\frac{1}{2}\eta^2 = 1 - \sin.\frac{1}{2}\eta^2$ et $zz = \cos.\frac{1}{2}\psi^2 = 1 - \sin.\frac{1}{2}\psi^2$ fiet, $\frac{dz}{\sqrt{1-zz}} = \frac{1}{2}d\psi$ cui ſignum + tribuimus, quia hic corpus deſcendere aſſumimus, dum ante aſcenſus fuiſſet conſideratus. His igitur valoribus ſubſtitutis noſtra aequatio differentialis erit

$$\frac{dt\sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = \frac{d\psi}{2\sqrt{(\sin.\frac{1}{2}\psi^2 - \sin.\frac{1}{2}\eta^2)}}$$

vbi probe notetur terminum $\sin.\frac{1}{2}\eta^2$ eſſe quam minimum.

§. 15. Quoniam deſcenſus ex puncto g incipere aſſumitur, exiſtente angulo $bAg = \eta$, euidens eſt, integrale euaneſcere poſito $\psi = \eta$; quo obſeruato valor litterae t dabit tempus in minutis ſecundis expreſſum, quo pendulum ex ſitu initiali Ag peruenerit in ſitum quemcunque alium Az. Quoniam igitur hic quantitas $\sin.\frac{1}{2}\eta^2$ mox prae termino $\sin.\frac{1}{2}\psi^2$ euadet quam minima, formula differentialis $\frac{d\psi}{2\sqrt{(\sin.\frac{1}{2}\psi^2 - \sin.\frac{1}{2}\eta^2)}}$ commode in hanc ſeriem euoluetur

$$\tfrac{1}{2}d\psi\left(\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}\psi} + \frac{1.\sin.\frac{1}{2}\eta^2}{2.\sin.\frac{1}{2}\psi^3} + \frac{1.3\sin.\frac{1}{2}\eta^4}{2.4\sin.\frac{1}{2}\psi^5} + \frac{1.3.5\sin.\frac{1}{2}\eta^6}{2.4.6\sin.\frac{1}{2}\psi^7} + \text{etc.}\right)$$

vbi integrale primi termini ſtatim per logarithmos ita exprimi poteſt, vt ſit

$$\int\frac{d\psi}{2\sin.\frac{1}{2}\psi} = l\frac{\text{tg.}\frac{1}{4}\psi}{\text{tg.}\frac{1}{4}\eta}$$

vnde intelligitur, ſi angulus η plane euaneſceret, valorem huius integralis fore infinitum; vnde ſtatim patet, quo minor accipiatur angulus η, eo minus prodire debere tempus; quam ob rem, ſi praeter primum terminum ſequentes negligere liceret, iam haberemus

$$\frac{t\sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = l\frac{\text{tg.}\frac{1}{4}\psi}{\text{tg.}\frac{1}{4}\eta} \text{ ideoque } t = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2g}}\,l\frac{\text{tg.}\frac{1}{4}\psi}{\text{tg.}\frac{1}{4}\eta}.$$

§. 16.

§. 16. Manifeſtum autem eſt, ex hac formula tempus totius deſcenſus, quo pendulum ex ſitu initiali $A g$ vsque ad ſitum infimum AB perueniet, definiri poſſe, quandoquidem poſito $\psi = 180°$ tempus iſtud fiet

$$t = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2g}}\, l \frac{1}{tg \frac{1}{4}\eta} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2g}}\, l \operatorname{cot.} \tfrac{1}{4}\eta.$$

Quanquam autem haec expreſſio primam tantum partem totius valoris continet, tamen ex ea iam ſatis exacte tempus totius deſcenſus definiri poterit; quem in finem operae pretium erit inueſtigare, quantam correctionem ſequentes termini ſeriei ſupra inuentae producere valeant.

§. 17. Quod quo commodius fieri poſſit, ſtatuamus $\frac{1}{2}\psi = \omega$ et $\frac{1}{2}\eta = \alpha$, vnde integrale primi termini prodit $= l \frac{tg \frac{1}{2}\omega}{tg \frac{1}{2}\alpha}$; Pro ſecundo autem termino habebimus differentiale $\frac{d\omega \operatorname{fin.} \alpha^2}{\operatorname{fin.} \omega^3}$, ad cuius integrale inueniendum fingamus $\int \frac{d\omega}{\operatorname{fin.} \omega^3} = \frac{A \operatorname{cof.} \omega}{\operatorname{fin.} \omega^2} + B \int \frac{d\omega}{\operatorname{fin.} \omega}$: vnde ſumptis differentialibus erit $\frac{1}{\operatorname{fin.} \omega^3} = -\frac{A}{\operatorname{fin.} \omega} - \frac{2A \operatorname{cof.} \omega^2}{\operatorname{fin.} \omega^3} + \frac{B}{\operatorname{fin.} \omega}$, quae aequatio, loco $\operatorname{cof.} \omega^2$ ſubſtituto valore $1 - \operatorname{fin.} \omega^2$, tranſit in hanc:

$$\frac{1}{\operatorname{fin.} \omega^3} = \frac{A}{\operatorname{fin.} \omega} - \frac{2A}{\operatorname{fin.} \omega^3} + \frac{B}{\operatorname{fin.} \omega}$$

ex qua patet, ſumi debere $2A = -1$ et $B + A = 0$, ita vt ſit $A = -\frac{1}{2}$ et $B = \frac{1}{2}$, vnde ergo colligitur

$$\int \frac{d\omega}{\operatorname{fin.} \omega^3} = -\frac{\operatorname{cof.} \omega}{2 \operatorname{fin.} \omega^2} + \tfrac{1}{2}\, l\, tg \tfrac{1}{2}\omega + C$$

vbi ad conſtantem inueniendam ſtatuatur $\omega = \alpha$, fierique debet $0 = -\frac{\operatorname{cof.} \alpha}{2 \operatorname{fin.} \alpha^2} + \frac{1}{2} l\, tg \frac{1}{2}\alpha + C$, ideoque $C = \frac{\operatorname{cof.} \alpha}{2 \operatorname{fin.} \alpha^2} - \frac{1}{2} l\, tg \frac{1}{2}\alpha$ quo ſubſtituto erit

$$\int \frac{d\omega}{\operatorname{fin.} \omega^3} = \frac{\operatorname{cof.} \alpha}{2 \operatorname{fin.} \alpha^2} - \frac{\operatorname{cof.} \omega}{2 \operatorname{fin.} \omega^2} + \tfrac{1}{2}\, l \frac{tg \frac{1}{2}\omega}{tg \frac{1}{2}\alpha}$$

quo circa, binis partibus prioribus coniungendis, consequemur hunc valorem:

$$\frac{t\sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = (1 + \tfrac{1}{4}\,\text{sin.}\,\alpha^2)\, l\, \frac{\text{tg.}\,\frac{1}{2}\omega}{\text{tg.}\,\frac{1}{2}\alpha} + \tfrac{1}{4}\,\text{cos.}\,\alpha - \frac{\text{cos.}\,\omega\,\text{sin.}\,\alpha^2}{4\,\text{sin.}\,\omega^2}.$$

Hinc pro toto descensu, ponendo $\omega = 90°$, fiet

$$\frac{t\sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = (1 + \tfrac{1}{4}\,\text{sin.}\,\alpha^2)\, l\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{4}\,\text{cos.}\,\alpha,$$

vnde patet ob secundum terminum imprimis accessisse quantitatem satis notabilem $\frac{1}{4}\,\text{cos.}\,\alpha$, cuius valor propemodum est $\frac{1}{4}$; quam ob rem eo magis necesse est etiam sequentes terminos exsequi.

§. 18. Haec autem operatio vt in genere institui queat, lemma generale praemittamus pro integratione formulae $\int \frac{d\omega}{\text{sin.}\,\omega^{n+1}}$, quem in finem ponamus

$$\int \frac{d\omega}{\text{sin.}\,\omega^{n+1}} = \frac{A\,\text{cos.}\,\omega}{\text{sin.}\,\omega^n} + B \int \frac{d\omega}{\text{sin.}\,\omega^{n-1}}$$

quae forma differentiata praebet

$$\frac{1}{\text{sin.}\,\omega^{n+1}} = -\frac{A}{\text{sin.}\,\omega^{n-1}} - \frac{n\,A\,\text{cos.}\,\omega^2}{\text{sin.}\,\omega^{n+1}} + \frac{B}{\text{sin.}\,\omega^{n-1}}$$

quae ob $\text{cos.}\,\omega^2 = 1 - \text{sin.}\,\omega^2$ abit in hanc:

$$\frac{1}{\text{sin.}\,\omega^{n+1}} = \frac{(n-1)\,A}{\text{sin.}\,\omega^{n-1}} - \frac{n\,A}{\text{sin.}\,\omega^{n+1}} + \frac{B}{\text{sin.}\,\omega^{n-1}}$$

vnde patet esse debere $A = -\frac{1}{n}$ & $B = \frac{n-1}{n}$, ita vt, introducta constante debita, qua integrale euanescat posito $\omega = \alpha$, habeamus in genere hanc reductionem:

$$\int \frac{d\omega}{\text{sin.}\,\omega^{n+1}} = \frac{\text{cos.}\,\alpha}{n\,\text{sin.}\,\alpha^n} - \frac{\text{cos.}\,\omega}{n\,\text{sin.}\,\omega^n} + \frac{n-1}{n} \int \frac{d\omega}{\text{sin.}\,\omega^{n-1}},$$

quod postremum integrale tanquam cognitum spectare licet.

§. 19.

§. 19. Hoc lemmate constituto sumamus primo $n = 2$ eritque

$$\int \frac{d\omega}{\text{sin.}\, \omega^3} = \frac{\text{cos.}\, \alpha}{2\, \text{sin.}\, \alpha^2} - \frac{\text{cos.}\, \omega}{2\, \text{sin.}\, \omega^2} + \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{\text{tag.}\, \frac{1}{2}\omega}{\text{tag.}\, \frac{1}{2}\alpha}$$

quemadmodum iam ante inuenimus. Nunc igitur ponamus porro $n = 4$ eritque pro tertio termino

$$\int \frac{d\omega}{\text{sin.}\, \omega^5} = \frac{\text{cos.}\, \alpha}{4\, \text{sin.}\, \alpha^2} - \frac{\text{cos.}\, \omega}{4\, \text{sin.}\, \omega^2} + \tfrac{3}{4} \int \frac{d\omega}{\text{sin.}\, \omega^3}.$$

Fiat porro $n = 6$ ac pro termino quarto habebimus

$$\int \frac{d\omega}{\text{sin.}\, \omega^7} = \frac{\text{cos.}\, \alpha}{6\, \text{sin.}\, \alpha^2} - \frac{\text{cos.}\, \omega}{6\, \text{sin.}\, \omega^2} + \tfrac{5}{6} \int \frac{d\omega}{\text{sin.}\, \omega^5}.$$

Simili modo, posito $n = 8$, pro termino quinto habebimus

$$\int \frac{d\omega}{\text{sin.}\, \omega^9} = \frac{\text{cos.}\, \alpha}{8\, \text{sin.}\, \alpha^2} - \frac{\text{cos.}\, \omega}{8\, \text{sin.}\, \omega^2} + \tfrac{7}{8} \int \frac{d\omega}{\text{sin.}\, \omega^7}.$$

Vlterius vero, ponendo $n = 10$, reperietur

$$\int \frac{d\omega}{\text{sin.}\, \omega^{11}} = \frac{\text{cos.}\, \alpha}{10\, \text{sin.}\, \alpha^2} - \frac{\text{cos.}\, \omega}{10\, \text{sin.}\, \omega^2} + \tfrac{9}{10} \int \frac{d\omega}{\text{sin.}\, \omega^{11}}.$$

etc. etc.

§. 20. Quoniam autem nobis imprimis propositum est in tempus totius descensus, quo fit $\omega = 90°$, inquirere, inuenta integralia ad hunc casum accommodata ita se habebunt:

$$\int \frac{d\omega}{\text{sin.}\, \omega} = l\, \text{cot.}\, \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\int \frac{d\omega}{\text{sin.}\, \omega^3} = \frac{\text{cos.}\, \alpha}{2\, \text{sin.}\, \alpha^2} + \tfrac{1}{2}\, l\, \text{cot.}\, \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\int \frac{d\omega}{\text{sin.}\, \omega^5} = \frac{\text{cos.}\, \alpha}{4\, \text{sin.}\, \alpha^4} + \frac{3\, \text{cos.}\, \alpha}{2.4.\, \text{sin.}\, \alpha^2} + \frac{1.3}{2.4}\, l\, \text{cot.}\, \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\int \frac{d\omega}{\text{sin.}\, \omega^7} = \frac{\text{cos.}\, \alpha}{6\, \text{sin.}\, \alpha^6} + \frac{5\, \text{cos.}\, \alpha}{4.6\, \text{sin.}\, \alpha^4} + \frac{3.5\, \text{cos.}\, \alpha}{2.4.6\, \text{sin.}\, \alpha^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\, l\, \text{cot.}\, \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\int \frac{d\omega}{\text{sin.}\, \omega^9} = \frac{\text{cos.}\, \alpha}{8\, \text{sin.}\, \alpha^8} + \frac{7\, \text{cos.}\, \alpha}{6.8\, \text{sin.}\, \alpha^6} + \frac{5.7.\, \text{cos.}\, \alpha}{4.6.8\, \text{sin.}\, \alpha^4} + \frac{3.5.7\, \text{cos.}\, \alpha}{2.4.6.8\, \text{sin.}\, \alpha^4} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\, l\, \text{cot.}\, \tfrac{1}{2}\alpha$$

etc. etc.

§. 21. Substituamus nunc singulos istos valores integrales in aequatione differentiali, quae erat

$$\frac{dt\sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = d\,\omega\left(\frac{1}{\sin.\,\omega} + \frac{1.\sin.\,\alpha^2}{2.\sin.\,\omega^3} + \frac{1.3\sin.\,\alpha^4}{2.4\sin.\,\omega^5} + \text{etc.}\right)$$

atque integrale quaesitum per totum arcum descensus $g z B$ extensum erit:

$$\frac{t\sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = \left\{\begin{array}{l}
l\cot.\tfrac{1}{2}\alpha \\
+\frac{1^2}{2^2}\sin.\,\alpha^2\, l\cot.\tfrac{1}{2}\alpha + \frac{1^2}{2^2}\cos.\,\alpha \\
+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\sin.\,\alpha^4\, l\cot.\tfrac{1}{2}\alpha + \frac{1.3}{2.4^2}\cos.\,\alpha + \frac{1.3^2}{2^2.4^2}\cos.\,\alpha\sin.\,\alpha^2 \\
+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\sin.\,\alpha^6\, l\cot.\tfrac{1}{2}\alpha + \frac{1.3.5}{2.4.6^2}\cos.\,\alpha + \frac{1.3.5^2}{2.4^2.6^2}\cos.\,\alpha\sin.\,\alpha^2 \\
\qquad\qquad + \frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cos.\,\alpha\sin.\,\alpha^4 \\
+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}\sin.\,\alpha^8\, l\cot.\tfrac{1}{2}\alpha + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8^2}\cos.\,\alpha + \frac{1.3.5.7^2}{2.4.6^2.8^2}\cos.\,\alpha\sin.\,\alpha^2 \\
\qquad\qquad + \frac{1.3.5^2.7^2}{2.4^2.6^2.8^2}\cos.\,\alpha\sin.\,\alpha^4 + \frac{1.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}\cos.\,\alpha\sin.\,\alpha^6 \\
\qquad\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}\right.$$

vbi cum α denotet angulum valde paruum, ita vt propemodum sit $\cos.\,\alpha = 1$, secunda columna, cuius omnes termini simpliciter continent $\cos.\,\alpha$, prae reliquis valores notabiles exhibet, dum reliqui, qui continent vel $\sin.\,\alpha^2$, vel $\sin.\,\alpha^4$ vel $\sin.\,\alpha^6$ etc. sine sensibili errore negligi possunt.

§. 22. At vero terminus $\cos.\,\alpha$ multiplicatus reperitur per hanc seriem infinitam:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1.3}{2.4^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8^2} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10^2} + \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12^2} + \text{etc.}$$

ad cuius summam inuestigandam contemplemur in genere hanc seriem:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-vv)}} = 1 + \frac{1}{2}vv + \frac{1.3}{2.4}v^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}v^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}v^8 + \text{etc.}$$

quae diuisa per v praebet

$$\frac{1}{v\sqrt{(1-vv)}} = \frac{1}{v} + \frac{1}{2}v + \frac{1.3}{2.4}v^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}v^5 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}v^7 + \text{etc.}$$

ex

ex hac vero ducta in dv et integrata, prodit

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{(1-vv)}} = lv + \frac{1}{2^2} vv + \frac{1.3}{2.4^2} v^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6^2} v^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8^2} v^8 + \text{etc.}$$

vnde patet, ſummam noſtrae ſeriei reſultare ex formula $\int \frac{dv}{v\sqrt{(1-vv)}} - lv$, ſi poſt integrationem ſtatuatur $v = 1$. Ponamus nunc $\sqrt{1-vv} = u$ eritque $vv = 1 - uu$, hinc $2lv = l\overline{1-uu}$ et $\frac{dv}{v} = -\frac{udu}{1-uu}$ vnde colligitur

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{1-vv}} = -\int \frac{du}{1-uu} = -\frac{1}{2} l \frac{1+u}{1-u} = -l(1+u) + \frac{1}{2} l(1-uu) + C.$$

Iam loco u reſtituatur valor $\sqrt{1-vv}$ eritque

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{1-vv}} = C - l(1 + \sqrt{1-vv}) + lv$$

conſequenter expreſſio propoſita erit

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{1-vv}} - lv = C - l(1 + \sqrt{1-vv})$$

quod integrale quia ita ſumi debet, vt euaneſcat poſito $v = 0$, dabit conſtantem $C = l2$; qua inuenta faciamus $v = 1$ atque ſeriei noſtrae

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1.3}{2.4^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.5.8^2} + \text{etc.}$$

ſumma nunc nobis eſt cognita, ſcilicet $= l2$.

§. 23. Quodſi etiam termini tertiae columnae, qui ſinguli continent $\cos.\alpha \sin.\alpha^2$ aliqua attentione digni videantur, id quod euenit, quando initium deſcenſus A g aliquanto longius a ſitu ſummo A b accipiatur: haud difficulter quoque ſumma ſeriei, quae eſt

$$\frac{1.3^2}{2^2.4^2} + \frac{1.3.5^2}{2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5.7^2}{2.4.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7.9^2}{2.4.6.8^2.10^2} + \text{etc.}$$

inueſtigari poterit. Cum enim iam inuenerimus

$$l2 - l(1 + \sqrt{1-vv}) = \frac{1}{2^2} vv + \frac{1.3}{2.4^2} v^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6^2} v^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8^2} v^8 + \text{etc.}$$

diuidamus vtrinque per v, vt habeamus

$$\frac{l2}{v} - \frac{l(1+\sqrt{1-vv})}{v} = \frac{1}{2^2} v + \frac{1.3}{2.4^2} v^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6^2} v^5 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8^2} v^7 + \text{etc.}$$

 quae

quae aequatio differentiata, pro parte finiftra, omiffo dv, praebet

$$-\frac{l2}{vv}+\frac{1}{vv}l(1+\sqrt{1-vv})+\frac{1}{(1+\sqrt{1-vv})\sqrt{1-vv}}$$

cuius poftremum membrum facile mutatur in hanc formam: $\frac{1}{vv\sqrt{1-vv}}-\frac{1}{vv}$; ita vt iam membrum finiftrum fit

$$-\frac{1-l2}{vv}+\frac{1}{vv\sqrt{1-vv}}+\frac{1}{vv}l(1+\sqrt{1-vv}).$$

Pro dextra autem parte habebimus

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1.3^2}{2.4^2}vv+\frac{1.3.5^2}{2.4.6^2}v^4+\frac{1.3.5.7^2}{2.4.6.8^2}v^6+\text{etc.}$$

§. 24. Pro parte finiftra fcribamus fimpliciter V, vt fit

$$V=\frac{1}{2^2}+\frac{1.3^2}{2.4^2}vv+\frac{1.3.5^2}{2.4.6^2}v^4+\frac{1.3.5.7^2}{2.4.6.8^2}v^6+\text{etc.}$$

Hic valor ductus in $\frac{dv}{v}$ et integratus praebet

$$\int\frac{Vdv}{v}=\frac{1}{2^2}lv+\frac{1.3^2}{2^2.4^2}vv+\frac{2.3.5^2}{2.4^2.6^2}v^4+\frac{1.3.5.7^2}{2.4.6^2.8^2}v^6+\text{etc.}$$

vnde patet fummam noftrae feriei fore $=\int\frac{Vdv}{v}-\frac{1}{4}lv$, fiquidem ftatuatur $v=1$. Iam quia V conftat tribus partibus, quarum prima eft $-\frac{1-l2}{vv}$; fecunda: $\frac{1}{vv\sqrt{1-vv}}$ et tertia: $\frac{1}{vv}l(1+\sqrt{1-vv})$; ex prima parte eruitur

$$\int-\frac{dv}{v^3}(1+l2)=\frac{1+l2}{2vv}.$$

Ex fecunda parte fit

$$\int\frac{dv}{v^3\sqrt{1-vv}}=-\frac{\sqrt{1-vv}}{2vv}-\frac{1}{2}l(1+\sqrt{1-vv})+\frac{1}{2}lv.$$

Pro parte tertia habemus $\int\frac{dv}{v^3}l(1+\sqrt{1-vv})$, quae reducta per formulam integralem notiffimam praebet

$$\int\frac{dv}{v^3}l(1+\sqrt{1-vv})=-\frac{1}{2vv}l(1+\sqrt{1-vv})-\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v^3}\frac{(1-\sqrt{1-vv})}{\sqrt{1-vv}}.$$

Quia autem eft

$$\int\frac{dv}{v^3\sqrt{1-vv}}=-\frac{\sqrt{1-vv}}{2vv}-\frac{1}{2}l(1+\sqrt{1-vv})+\frac{1}{2}lv$$

ex

ex hac tertia parte nascitur ista quantitas:

$$-\frac{1}{2vv}l(1+\sqrt{1-vv})+\frac{\sqrt{1-vv}}{4vv}+\frac{1}{4}l(1+\sqrt{1-vv})-\frac{1}{4}lv-\frac{1}{4vv}.$$

His igitur partibus omnibus collectis totum membrum sinistrum erit

$$\frac{1+2l2}{4vv}+\frac{1}{4}lv-\frac{\sqrt{1-vv}}{4vv}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2vv}\right)l(1+\sqrt{1-vv})+C.$$

§. 25. His inuentis et adiecta constante, qua tota expressio ad nihilum redigatur posito $v=0$, habebimus

$$\int\frac{\mathrm{V}dv}{v}-\frac{1}{4}lv=C+\frac{1+2l2}{4vv}-\frac{\sqrt{1-vv}}{4vv}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2vv}\right)l(1+\sqrt{1-vv})$$

vnde, si statuamus $v=1$, prodit valor seriei quaesitae. Quoniam vero constans C ita debet esse comparata, vt tota expressio euanescat posito $v=0$, insigne incommodum hic se offert, quod posito $v=0$ omnes partes in infinitum excrescant. Nullum autem est dubium, quin singula haec infinita se mutuo destruant, quandoquidem pro C valor determinatus prodire debet. Ad hoc incommodum euitandum recurrendum est ad remedium in omnibus huiusmodi casibus vsitatum, quo quantitas v non ipsi nihilo aequalis, sed infinite parua concipitur; tum enim vtique eueniet, vt omnes termini per vv diuisi se sponte tollant, vti hic clarius ostendemus.

§. 26. Tribuamus igitur litterae v valorem infinite paruum, ac primo habebimus $\sqrt{1-vv}=1-\frac{1}{2}vv$, vnde membrum $-\frac{\sqrt{1-vv}}{4vv}$ dabit $-\frac{1}{4vv}+\frac{1}{8}$; deinde vero erit

$$l(1+\sqrt{1-vv})=l(2-\frac{1}{2}vv)=l2+l(1-\frac{1}{4}vv).$$

Est vero

$$l1-\frac{1}{4}vv=-\frac{1}{4}vv$$

sicque habebimus

$$l(1+\sqrt{1-vv})=l2-\frac{1}{4}vv$$

quibus

quibus valoribus substitutis expressio nostra hanc induet formam:

$$C + \frac{1+2l2}{4vv} - \frac{1}{4vv} + \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2vv}\right)\left(l\,2 - \frac{1}{4}vv\right)$$

ex qua, postremo membro euoluto, expressio nostra fiet $C + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}l\,2$, ad nihilum redigenda; vnde prodit $C = \frac{1}{4}l\,2 - \frac{1}{4}$.

§. 27. Definita igitur nostra constante C debitus valor nostrae expressionis $\int\frac{V\,dv}{v} - \frac{1}{4}l\,v$ erit

$$= \frac{1}{4}l\,2 - \frac{1}{4} + \frac{1+2l2}{4vv} - \frac{\sqrt{1-vv}}{4vv} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2vv}\right)l\left(1+\sqrt{1-vv}\right)$$

quam ob rem, si hic statuamus $v = 1$, prodibit valor ipsius seriei infinitae, cuius summam quaerimus, qui ergo erit $= \frac{3}{4}l\,2$; ita vt tertia columna, cuius singuli termini continent productum $\cos.\alpha\,\sin.\alpha^2$ abeat in hanc simplicem expressionem $\frac{3}{4}\cos.\alpha\,\sin.\alpha^2\,l\,2$.

§. 28. Simili modo inuestigare liceret summam seriei in quarta columna occurrentis; verum calculus requireretur adhuc multo magis operosus ac taediosus quam pro columna tertia, quo autem facile supersedere poterimus, cum ista columna contineat productum $\cos.\alpha\,\sin.\alpha^4$, quod, quia $\alpha = \frac{1}{2}\eta$, angulus vero η pro satis exiguo assumitur, ob potestatem quartam $\sin.\alpha^4$ tam paruum erit, vt tuto negligi queat. Caeterum satis probabile videtur, coefficientem huius termini pariter proditurum esse huius formae $\beta\,l\,2$, vbi β erit fractio minor quam $\frac{3}{4}$. Quibus obseruatis sequens problema alioquin difficillimum resoluere poterimus.

Problema.

Si pendulum, dum circa axem A oscillatur, tam ascendendo quam descendendo percurrat arcus parum a 180 gradibus deficientes, inuenire tempus cuiusque oscillationis.

Solutio.

Elev. Aequat.	Radius Paralleli		Quant. gradus.	Elev. Aequat.	Radius Paralleli		Quant. gradus.
	in Sphaer.	in proi.			in Sphaer.	in proi.	
1°	0,0175	0,0175	0,0174	46°	0,7193	0,8489	0,0207
2	0,0349	0,0349	0,0174	47	0,7313	0,8696	0,0208
3	0,0523	0,0523	0,0175	48	0,7431	0,8904	0,0210
4	0,0698	0,0698	0,0175	49	0,7547	0,9114	0,0212
5	0,0872	0,0873	0,0175	50	0,7660	0,9326	0,0213
6	0,1045	0,1048	0,0175	51	0,7771	0,9539	0,0216
7	0,1219	0,1223	0,0175	52	0,7880	0,9755	0,0217
8	0,1392	0,1398	0,0176	53	0,7986	0,9972	0,0218
9	0,1564	0,1574	0,0176	54	0,8090	1,0190	0,0221
10	0,1736	0,1750	0,0176	55	0,8191	1,0411	0,0223
11	0,1908	0,1926	0,0176	56	0,8290	1,0634	0,0225
12	0,2079	0,2102	0,0177	57	0,8386	1,0859	0,0227
13	0,2249	0,2279	0,0177	58	0,8480	1,1086	0,0229
14	0,2419	0,2456	0,0177	59	0,8572	1,1315	0,0232
15	0,2588	0,2633	0,0178	60	0,8660	1,1547	0,0234
16	0,2756	0,2811	0,0178	61	0,8746	1,1781	0,0236
17	0,2924	0,2989	0,0179	62	0,8829	1,2017	0,0239
18	0,3090	0,3168	0,0179	63	0,8910	1,2256	0,0241
19	0,3256	0,3347	0,0180	64	0,8988	1,2497	0,0244
20	0,3420	0,3527	0,0180	65	0,9063	1,2741	0,0247
21	0,3584	0,3707	0,0180	66	0,9135	1,2988	0,0250
22	0,3746	0,3887	0,0182	67	0,9205	1,3238	0,0252
23	0,3907	0,4069	0,0182	68	0,9271	1,3490	0,0256
24	0,4067	0,4251	0,0183	69	0,9336	1,3746	0,0258
25	0,4226	0,4434	0,0183	70	0,9397	1,4004	0,0262
26	0,4384	0,4617	0,0184	71	0,9455	1,4266	0,0265
27	0,4540	0,4801	0,0185	72	0,9511	1,4531	0,0268
28	0,4695	0,4986	0,0186	73	0,9563	1,4799	0,0272
29	0,4848	0,5172	0,0187	74	0,9613	1,5071	0,0275
30	0,5000	0,5359	0,0187	75	0,9659	1,5346	0,0279
31	0,5150	0,5546	0,0189	76	0,9703	1,5625	0,0284
32	0,5299	0,5735	0,0189	77	0,9744	1,5909	0,0286
33	0,5446	0,5924	0,0191	78	0,9781	1,6195	0,0292
34	0,5591	0,6115	0,0191	79	0,9816	1,6487	0,0295
35	0,5735	0,6306	0,0192	80	0,9848	1,6782	0,0300
36	0,5878	0,6498	0,0194	81	0,9877	1,7082	0,0304
37	0,6018	0,6692	0,0194	82	0,9902	1,7386	0,0308
38	0,6157	0,6886	0,0196	83	0,9925	1,7694	0,0314
39	0,6293	0,7082	0,0197	84	0,9945	1,8008	0,0319
40	0,6428	0,7279	0,0199	85	0,9962	1,8327	0,0323
41	0,6561	0,7478	0,0199	86	0,9976	1,8650	0,0329
42	0,6691	0,7677	0,0201	87	0,9986	1,8979	0,0335
43	0,6820	0,7878	0,0202	88	0,9993	1,9314	0,0340
44	0,6947	0,8080	0,0204	89	0,9998	1,9654	0,0346
45	0,7071	0,8284	0,0205	90	1,0000	2,0000	

Elev. Aequat.	Radius Paralleli.	Diſtant. Centri.	Radius Merid.	Elev. Aequat.	Radius Paralleli.	Diſtant. Centri.	Radius Merid.
1°	0,0349	2,0003	114,5974	46°	2,0711	2,8791	2,7803
2	0,0698	2,0012	57,3074	47	2,1447	2,9325	2,7346
3	0,1048	2,0027	38,2146	48	2,2212	2,9889	2,6913
4	0,1398	2,0049	28,6710	49	2,3007	3,0485	2,6500
5	0,1750	2,0076	22,9474	50	2,3835	3,1114	2,6108
6	0,2102	2,0110	19,1335	51	2,4698	3,1780	2,5735
7	0,2456	2,0150	16,4110	52	2,5599	3,2485	2,5380
8	0,2811	2,0196	14,3706	53	2,6541	3,3233	2,5043
9	0,3168	2,0249	12,7849	54	2,7528	3,4026	2,4721
10	0,3527	2,0308	11,5175	55	2,8563	3,4869	2,4415
11	0,3887	2,0374	10,4817	56	2,9651	3,5766	2,4124
12	0,4251	2,0447	9,6195	57	3,0797	3,6721	2,3847
13	0,4617	2,0526	8,8908	58	3,2005	3,7741	2,3583
14	0,4986	2,0612	8,2671	59	3,3285	3,8832	2,3333
15	0,5359	2,0705	7,7274	60	3,4641	4,0000	2,3094
16	0,5735	2,0806	7,2559	61	3,6081	4,1253	2,2867
17	0,6115	2,0914	6,8406	62	3,7614	4,2601	2,2651
18	0,6498	2,1029	6,4721	63	3,9252	4,4054	2,2446
19	0,6886	2,1152	6,1431	64	4,1006	4,5623	2,2252
20	0,7279	2,1283	5,8476	65	4,2890	4,7324	2,2067
11	0,7677	2,1423	5,5808	66	4,4921	4,9172	2,1893
22	0,8080	2,1571	5,3389	67	4,7117	5,1186	2,1727
23	0,8489	2,1727	5,1186	68	4,9502	5,3389	2,1571
24	0,8904	2,1893	4,9172	69	5,2102	5,5808	2,1423
25	0,9326	2,2067	4,7324	70	5,4949	5,8467	2,1283
26	0,9755	2,2252	4,5623	71	5,8084	6,1431	2,1152
27	1,0190	2,2446	4,4054	72	6,1554	6,4721	2,1029
28	1,0634	2,2651	4,2601	73	6,5417	6,8406	2,0914
29	1,1086	2,2867	4,1253	74	6,9748	7,2559	2,0806
30	1,1547	2,3094	4,0000	75	7,4641	7,7274	2,0705
31	1,2017	2,3333	3,8832	76	8,0216	8,2671	2,0612
32	1,2497	2,3583	3,7741	77	8,6629	8,8908	2,0526
33	1,2988	2,3847	3,6721	78	9,4093	9,6192	2,0447
34	1,3490	2,4124	3,5766	79	10,2891	10,4817	2,0374
35	1,4004	2,4415	3,4869	80	11,3426	11,5175	2,0308
36	1,4531	2,4721	3,4026	81	12,6275	12,7849	2,0249
37	1,5071	2,5043	3,3233	82	14,2307	14,3706	2,0196
38	1,5625	2,5380	3,2485	83	16,2887	16,4110	2,0150
39	1,6195	2,5735	3,1780	84	19,0287	19,1335	2,0110
40	1,6782	2,6108	3,1114	85	22,8600	22,9474	2,0076
41	1,7386	2,6500	3,0485	86	28,6013	28,6710	2,0049
42	1,8008	2,6913	2,9889	87	38,1623	38,2146	2,0027
43	1,8650	2,7346	2,9325	88	57,2725	57,3074	2,0012
44	1,9314	2,7803	2,8791	89	114,5799	114,5974	2,0003
45	2,0000	2,8284	2,8284	90	∞	∞	2,0000

Solutio.

§. 29. Denotet Θ tempus cuiusque oſcillationis, ſi idem pendulum arcus tantum infinite paruos percurreret; nunc autem ſit g punctum, a quo noſtrum pendulum deſcendere incipit. Huius declinationem a ſito verticali Ab poſuimus b A $g = \eta$; tum vero fecimus $\alpha = \frac{1}{2}\eta$. Hinc primo quaeratur valor ſeriei

$$1 + \frac{1^2}{2^2} \text{ſin.} \alpha^2 + \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2} \text{ſin.} \alpha^4 + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2} \text{ſin.} \alpha^6 + \text{etc.}$$

quae ob angulum α minimum vehementer conuergit, ita vt plerumque ſufficiat ternos quaternosue eius terminos ſumſiſſe. Tum vero tempus vnius oſcillationis quaeſitae, quod littera T indicauimus, erit

$$T = \Theta\, l \text{ cot.} \tfrac{1}{2}\alpha \left(1 + \tfrac{1}{4} \text{ſin.} \alpha^2 + \tfrac{1 . 9}{4 . 16} \text{ſin.} \alpha^4 + \tfrac{1 . 9 . 25}{4 . 16 . 36} \text{ſin.} \alpha^6 \right.$$
$$\left. + \text{coſ.} \alpha\, l\, 2 + \tfrac{3}{4} \text{coſ.} \alpha^2\, l\, 2 \right)$$

vbi meminiſſe oportet eſſe $\Theta = \frac{\pi \surd b}{\surd 2 g}$. Manifeſtum autem eſt ſemiſſem huius temporis praebere tempus cuiusque aſcenſus vel deſcenſus noſtri penduli.

Exemplum.

§. 30. Si pendulum ab angulo bA$g = 5^\circ$ deſcendere incipiat, ideoque in ſequente aſcenſu ad eandem altitudinem aſſurgat, erit $\eta = 5^\circ$ ideoque $\alpha = 2^\circ, 30'$, vnde habebimus l coſ. $\alpha = 9,9995865$, l ſin. $\alpha = 8.6396796$ et

l ſin. $\alpha^2 = 7, 2793592$
l ſin. $\alpha^4 = 4, 5587184$
l ſin. $\alpha^6 = 1, 8380776$.

Ex his igitur computemus primam feriem, qua $l\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\alpha$ afficitur, et quae erit $= 1,0004801$.

§. 31. Quoniam iftam fummam in logarithmum hyperbolicum ipfius $l\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\alpha$ duci oportet, quaeramus primo logarithmum vulgarem iftius cotangentis $1^\circ, 15'$ qui reperitur $= 1,6611437$ et in logarithmum hyperbolicum conuertitur, fi multiplicetur per $2,30258509$, hicque totum primum membrum noftrae expreffionis conftabit his tribus factoribus:

$$1,0004801 . 2,3025851 . 1.6611437$$

qui per logarithmos euoluti primum membrum $l\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\alpha$ involuens praebent $= 3,82675$.

§. 32. Porro pro fecundo membro notetur logarithmum hyperbolicum binarii effe $= 0,69314718$ qui ducatur in $\text{cof.}\,\alpha = \text{cof.}\,2^\circ, 30'$ hoc modo

$$l\,0,6931472 = 9,8408253$$
$$\text{et } l\,\text{cof.}\,\alpha = 9,9995865$$

$$\text{fumma} = 9,8404118 = l\,\text{membr. II.}$$

ficque erit ipfum membrum fecundum $= 0,69249$. Hoc deinde fecundum membrum, fi ducatur in $\frac{3}{4}\,\text{fin.}\,\alpha^2$, dabit membrum tertium, quod ergo ita reperitur:

l membr.

Tab. III. ad pag. 178.

60	65	70	75	80	85	90
°, 53′	3°, 11′	3°, 30′	3°, 50′	4°, 12′	4°, 35′	5°, 0
, 48	6, 23	7, 1	7, 41	8, 24	9, 10	10, 0
, 41	9, 35	10, 32	11, 32	12, 36	13, 46	15, 0
, 38	12, 49	14, 4	15, 25	16, 50	18, 22	20, 0
, 35	16, 4	17, 39	19, 18	21, 4	22, 58	25, 0
, 36	19, 22	21, 16	23, 14	25, 20	27, 35	30, 0
, 38	22, 43	24, 54	27, 0	29, 38	32, 14	35, 0
, 44	26, 6	28, 36	31, 12	33, 58	36, 54	40, 0
, 54	29, 34	32, 21	35, 16	38, 20	41, 34	45, 0
, 10	33, 6	36, 10	39, 22	42, 44	46, 16	50, 0
, 28	36, 42	40, 4	43, 33	47, 12	51, 0	55, 0
, 52	40, 24	44, 2	47, 48	51, 42	55, 46	60, 0
, 24	44, 11	48, 5	52, 6	56, 15	60, 33	65, 0
, 2	48, 5	52, 14	56, 30	60, 52	65, 22	70, 0
, 48	52, 6	56, 30	60, 59	65, 33	70, 14	75, 0
, 52	56, 15	60, 52	65, 33	70, 18	75, 6	80, 0
, 46	60, 33	65, 22	70, 13	75, 7	80, 2	85, 0
, 0	65, 0	70, 0	75, 0	80, 0	85, 0	90, 0
, 26	69, 37	74, 46	79, 53	84, 58	90, 0	95, 0
, 4	74, 26	79, 42	84, 53	90, 0	95, 2	100, 0
, 55	79, 24	84, 46	90, 0	95, 7	100, 7	105, 0
, 1	84, 36	90, 0	95, 14	100, 18	105, 14	110, 0
, 22	90, 0	95, 24	100, 36	105, 45	110, 24	115, 0
, 0	95, 38	100, 58	106, 5	110, 56	115, 34	120, 0
, 55	101, 30	106, 44	111, 42	116, 22	120, 48	125, 0
, 9	107, 36	112, 41	117, 26	121, 52	126, 4	130, 0
, 46	113, 56	118, 48	122, 17	127, 27	131, 21	135, 0
, 56	119, 44	125, 4	129, 15	133, 6	136, 40	140, 0
, 44	127, 20	139, 31	135, 20	138, 49	142, 2	145, 0
, 12	134, 22	138, 7	141, 30	144, 35	147, 24	150, 0
, 59	141, 38	144, 52	147, 46	150, 24	152, 48	155, 0
2	149, 4	151, 44	154, 7	156, 16	158, 13	160, 0
19	154, 42	158, 42	160, 32	162, 10	163, 39	165, 0
46	164, 22	165, 44	167, 0	168, 6	169, 6	170, 0
21	172, 10	172, 52	173, 29	174, 2	174, 32	175, 0
0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0

Latitudo Loci propositi.

Longit.	5°	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
5°	15′	26′	40′	53′	1°, 6′	1°, 20′	1°, 34′	1°, 50′	2°, 4′	2°, 20′	2°, 36′	2°, 53′	3°, 11′	3°, 30′	3°, 50′	4°, 12′	4°, 35′	5°, 0
10	26	53	1°, 19	1°, 46	2, 14	2, 41	3, 10	3, 39	4, 9	4, 40	5, 13	5, 48	6, 23	7, 1	7, 41	8, 24	9, 10	10, 0
15	40	1°, 18	1, 59	2, 39	3, 20	4, 2	4, 26	5, 29	6, 14	7, 2	7, 50	8, 41	9, 35	10, 32	11, 32	12, 36	13, 46	15, 0
20	53	1, 40	2, 40	3, 34	4, 28	5, 24	6, 22	7, 21	8, 21	9, 24	10, 30	11, 38	12, 49	14, 4	15, 25	16, 50	18, 22	20, 0
25	1°, 6	2, 13	3, 20	4, 28	5, 38	6, 48	8, 0	9, 13	10, 30	11, 48	13, 10	14, 35	16, 4	17, 39	19, 18	21, 4	22, 58	25, 0
30	1, 2[illegible]	2, 41	4, 2	5, 24	6, 48	8, 13	9, 39	11, 8	12, 40	14, 16	15, 53	17, 36	19, 22	21, 16	23, 14	25, 20	27, 35	30, 0
35	1, 35	3, 1[illegible]	4, 40	6, 22	8, 0	9, 40	11, 21	13, 6	14, 53	16, 44	18, 38	20, 38	22, 43	24, 54	27, 0	29, 38	32, 14	35, 0
40	1, 5[illegible]	3, 39	5, 29	7, 21	9, 14	11, 8	13, 6	15, 6	17, 9	19, 16	21, 28	23, 44	26, 6	28, 36	31, 12	33, 58	36, 54	40, 0
45	2, 4	4, 9	6, 14	8, 31	10, 30	12, 40	14, 53	17, 9	19, 28	21, 52	24, 20	26, 54	29, 34	32, 21	35, 16	38, 20	41, 34	45, 0
50	2, 20	4, 40	7, 2	9, 24	11, 48	14, 14	16, 44	19, 16	21, 52	24, 32	27, 19	30, 10	33, 6	36, 10	39, 22	42, 44	46, 16	50, 0
55	2, 36	5, 13	7, 50	10, 30	13, 10	15, 53	18, 38	21, 28	24, 20	27, 18	30, 20	33, 28	36, 42	40, 4	43, 33	47, 12	51, 0	55, 0
60	2, 55	5, 47	8, 41	11, 38	14, 35	17, 36	20, 38	23, 44	26, 54	30, 8	33, 28	36, 52	40, 24	44, 2	47, 48	51, 42	55, 46	60, 0
65	3, 11	6, 23	9, 34	12, 49	16, 4	19, 22	22, 43	26, 7	29, 34	33, 6	36, 42	40, 24	44, 11	48, 5	52, 6	56, 15	60, 33	65, 0
70	3, 30	7, 1	10, 32	14, 4	17, 39	21, 15	24, 54	28, 36	32, 21	36, 10	40, 4	44, 2	48, 5	52, 14	56, 30	60, 52	65, 22	70, 0
75	3, 50	7, 41	11, 32	15, 25	19, 18	23, 14	27, 12	31, 12	35, 16	39, 22	43, 33	47, 48	52, 6	56, 30	60, 59	65, 33	70, 14	75, 0
80	4, 12	8, 24	12, 36	16, 50	21, 4	25, 20	29, 38	33, 58	38, 20	44, 44	47, 12	51, 52	56, 15	60, 52	65, 33	70, 18	75, 6	80, 0
85	4, 35	9, 10	13, 46	18, 22	22, 58	27, 36	32, 14	36, 54	41, 34	46, 16	51, 0	55, 46	60, 33	65, 22	70, 13	75, 7	80, 2	85, 0
90	5, 0	10, 0	15, 0	20, 0	25, 0	30, 0	35, 0	40, 0	45, 0	50, 0	55, 0	60, 0	65, 3	70, 0	75, 0	80, 0	85, 0	90, 0
95	5, 28	10, 55	16, 22	21, 47	27, 12	32, 36	37, 58	43, 20	48, 39	53, 56	59, 12	64, 26	69, 37	74, 46	79, 53	84, 58	90, 0	95, 0
100	5, 58	11, 54	17, 50	23, 44	29, 36	35, 25	41, 12	46, 54	52, 32	58, 7	63, 38	69, 4	74, 26	79, 42	84, 53	90, 0	95, 2	100, 0
105	6, 31	13, 0	19, 28	25, 53	32, 14	38, 30	44, 40	50, 45	56, 43	62, 34	68, 18	73, 55	79, 24	84, 46	90, 0	95, 7	100, 7	105, 0
110	7, 8	14, 14	21, 18	28, 16	35, 8	41, 53	48, 29	54, 56	61, 13	67, 20	73, 15	79, 1	84, 36	90, 0	95, 14	100, 18	105, 14	110, 0
115	7, 50	15, 38	23, 21	30, 56	38, 22	45, 37	52, 40	59, 29	66, 4	72, 24	78, 30	84, 22	90, 0	95, 24	100, 36	105, 45	110, 24	115, 0
120	8, 39	17, 14	25, 42	33, 58	42, 1	49, 48	57, 16	64, 27	71, 19	77, 12	84, 5	90, 0	95, 38	100, 58	106, 5	110, 56	115, 34	120, 0
125	9, 35	19, 5	28, 23	37, 26	46, 8	54, 28	62, 24	69, 55	77, 1	83, 42	90, 0	95, 55	101, 30	106, 44	111, 42	116, 22	120, 48	125, 0
130	10, 42	21, 15	31, 32	41, 26	50, 52	59, 46	68, 8	75, 57	83, 14	90, 0	06, 18	102, 9	107, 36	112, 41	117, 26	121, 52	126, 4	130, 0
135	12, 2	23, 51	35, 16	46, 8	56, 19	65, 48	74, 33	82, 37	90, 0	96, 46	102, 59	108, 46	113, 56	118, 48	122, 17	127, 27	131, 21	135, 0
140	13, 41	27, 2	39, 46	51, 42	62, 42	72, 44	81, 48	90, 0	97, 23	104, 3	110, 5	115, 56	119, 44	125, 4	129, 15	133, 6	136, 40	140, 0
145	15, 46	31, 1	45, 20	58, 26	70, 14	80, 43	90, 0	98, 12	105, 26	111, 52	117, 36	122, 44	127, 20	139, 31	135, 20	138, 49	142, 2	145, 0
150	18, 30	36, 10	52, 20	66, 42	79, 12	90, 0	99, 17	107, 17	114, 12	120, 14	125, 32	130, 12	134, 22	138, 7	141, 30	144, 35	147, 24	150, 0
155	22, 17	43, 4	61, 24	77, 0	90, 0	100, 48	109, 46	117, 19	123, 42	129, 9	133, 52	137, 59	141, 38	144, 52	147, 46	150, 24	152, 48	155, 0
160	27, 49	52, 47	73, 30	90, 0	103, 0	113, 18	121, 34	128, 18	133, 53	138, 34	142, 34	146, 2	149, 4	151, 44	154, 7	156, 16	158, 13	160, 0
165	36, 42	67, 12	90, 0	106, 30	118, 36	127, 40	134, 40	140, 14	144, 44	144, 28	151, 37	154, 19	154, 42	158, 42	160, 32	162, 10	163, 39	165, 0
170	53, 3	90, 0	112, 48	127, 14	136, 56	143, 50	148, 59	152, 58	156, 9	158, 45	160, 55	162, 46	164, 22	165, 44	167, 0	168, 6	169, 6	170, 0
175	90, 0	120, 58	143, 18	152, 11	157, 43	161, 30	164, 14	166, 19	167, 58	169, 18	170, 25	171, 21	172, 10	172, 52	173, 29	174, 2	174, 32	175, 0
180	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0	180, 0

l membr. II. $= 9,8404118$

$l\frac{3}{4} = 9,8750613$

l fin. $\alpha^2 = 7,2793592$

l membr. III. $= 6,9948323$ ergo

membr. III. $= 0,00099$

ex quo quia ne vnicam quidem partem millefimam efficit, manifeftum eft fequentia membra tuto omitti poffe.

§. 33. His igitur partibus collectis tempus vnius integrae ofcillationis prodibit $T = 4,52023\ \Theta$; vnde fi iftud pendulum ofcillationis fuas infinite paruas fingulis minutis fecundis abfoluat, pro eodem pendulo, dum motu fuo arcum 350 grad. percurrit, tempus cuiusque ofcillationis erit circiter $4\frac{1}{2}$ fecund. Quodfi pendulum arcus adhuc maiores et propius ad totam circuli peripheriam accedentes abfoluat, tempora ofcillationum vehementer infuper augebuntur, dum pro tota peripheria, fiue 360 grad. tempus adeo in infinitum excrefcit: vnde adhuc vnum exemplum euoluamus, quo talis arcus defcriptus duobus tantum gradibus a peripheria deficit.

Exemplum.

§. 34. Si pendulum ab angulo $bAg = 1°$ defcendere incipiat, ideoque in fequente afcenfu ad eandem altitudinem affurgat, erit $\eta = 1°$ ideoque $\alpha = 30'$; inde habebimus l cof. $30' = 9,9999835$ et l fin. $\alpha = 7,9408419$, vnde colligimus l fin. $\alpha^2 = 5,8816838$; fin. $\alpha^4 = 1,7633676$. Ex his igitur computemus primam feriem l cot. $\frac{1}{2}\alpha$ innolventem, quae erit $= 1,00001904$.

§. 35. Quoniam istam summam in logarithmum hyperbolicum ipsius cot. $\frac{1}{2}\alpha$ duci oportet, quaeramus primo logarithmum vulgarem ipsius cot. 15′ qui reperitur = 2, 3601799, qui in logarithmum hyperbolicum conuertitur, si multiplicetur per 2, 30258509 sicque totum primum membrum nostrae expressionis constabit his partibus 1,00001904. 2,3601799. 2,30258509 quae per logarithmos hunc in modum euoluuntur:

$$\begin{array}{r} l\,1,00001904 = 0,0000082 \\ l\,2,30258509 = 0,3622157 \\ l\,2,3601799 = 0,3729452 \\ \hline l\,\text{membr. I.} = 0,7351691 \\ \text{ergo membrum I.} = 5,43461. \end{array}$$

§. 36. Porro pro secundo membro logarithmus hyperbolicus binarii ducatur in cos. α hoc modo

$$\begin{array}{r} l\,0,6931472 = 9,8408253 \\ l\,\text{cos.}\,\alpha = 9,9999835 \\ \hline l\,\text{membri II.} = 9,8408088 \\ \text{ergo membrum II.} = 0,69312. \end{array}$$

Hoc membrum secundum si ducatur in $\frac{3}{4}$ sin. α^2 dabit membrum tertium, quod ergo ita reperietur

$$\begin{array}{r} l\,\text{membr. II.} = 9,8408088 \\ l\,\frac{3}{4} = 9,8750613 \\ l\,\text{sin.}\,\alpha^2 = 5,8816838 \\ \hline l\,\text{membri III.} = 5,5975539 \\ \text{ergo membrum III.} = 0,00004. \end{array}$$

His

His igitur partibus collectis tempus vnius integrae oscillationis prodibit $T = 6,12777\,\Theta$; vnde si oscillationes infinite paruae penduli singulis minutis secundis peragantur, tempus cuiusque oscillationis eiusdem penduli, dum arcus $358°$ absoluit, erit 6 secund.

§. 37. Hinc patet, quo minor accipiatur angulus α tempus vnius oscillationis non solum fieri maius, sed etiam minori opera assignari posse, cum contra, quo maior fuerit angulus α, inuestigatio temporis multo maiorem laborem requirat. Quin etiam, si angulus α tantus accipiatur, vt termini $\sin. \alpha^6$ inuoluentes non amplius negligi queant, ope huius methodi tempus ne quidem accurate assignare posset, propterea quod summae serierum quartae et sequentium columnarum nimis intricatos calculos postularent; neque vllum artificium Analyticum adhuc est inuentum, quo labor iste subleuari posset. Huiusmodi autem casibus series in ipsa dissertatione tradita negotium multo commodius conficiet: quoniam enim tum angulus $\zeta = 180 - \eta$ iam ita erit comparatus, vt quantitas

$$c = \sin. \tfrac{1}{2}\zeta = \cos. \tfrac{1}{2}\eta$$

satis notabiliter ab vnitate deficiat, series ibi inuenta

$$1 + \frac{1^2}{2^2}cc + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}c^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}c^6 + \text{etc.}$$

satis conuerget, ita vt eius summa, pluribus terminis actu inuicem addendis, satis exacte assignari possit, quae deinde ducta in Θ tempus vnius oscillationis indicabit.

§. 38. Caeterum hoc additamentum circa oscillationes amplissimas, vbi totus arcus a pendulo descriptus propemodum ad totam circuli peripheriam augetur, eo maiori

 studio

ſtudio pertractare eſt viſum, quod omnes, qui pendulorum motus ſunt perſcrutati, iſtum caſum plane non attigerunt. Interim tamen eſt manifeſtum, iſtum caſum ſummam attentionem mereri, propterea quod ſine ſingularibus artificiis, tam in ipſo calculo, quam integrationibus peragendis reſolutionem nullo modo exſpectare liceat, tum vero etiam ſerierum quartae columnae et ſequentium reſolutio, quam hic praetermittere ſumus coacti, Geometris anſam praebere poterit, îſtam egregiam partem Analyſeos vlterius promouendi.

P H Y S I C A.

LOBELIAE HYBRIDAE,

Auctore

I. T. KOELREVTER.

EXPERIMENTVM I.

Lobel. ſiphiliticae ♀.
Lobel. cardinalis ♂.
An. 1769. d. 26. Iul. Flor. 30.
Vid. Exp. inuerſ. II.

Copulam hybridam in plantis ſyngeneſiis monogamis, caſtrationis opera rite adminiſtrandam, rem eſſe difficilem ac laborioſam, iam ex ipſo partium genitalium intimiori nexu, ſitu atque conformatione ſatis coniicere poterunt notitia huius apparatus ſexualis vel leviter imbuti. Quum autem in haud paucis huius generis ſpeciebus, praeprimis in *Cardinali*, ſub climate noſtro ſaepius ita peragatur floreſcentia, vt plerorumque florum ſtigma antherarum coalitarum tubum plane virgineum pertranſeat, clauſumque penitus ac imperfectum, ſub vmbilici vel oſculi prominuli, corona piloſa circumſepti forma, in aprico etiam diu ſatis ita perſiſtat, antequam iſte in veram huius vuluam ſuum effundere poſſit puluerem ſpermaticum: ad abſoluendam eiusmodi hybridam impraegnationem haud abſolute neceſſariam eſſe caſtrationem, ſed conſperſionem ſtigmatis, ſtatim poſt completam eius in duos lobos expanſionem, miſſis omnibus ambagibus, commode ac ſe-

cure ſatis inſtitui poſſe, quiuis facile perſpiciet, meque ipſum experientia ſufficienter id docuit. Verum enim vero, cum vel ventorum ope, quod hic magis metuendum, vel auida inſectorum induſtria, pulueris ſeminalis proprii interdum aliquid ad bilobum ſtigma facile poſthac deferatur: caſtrationem, quamlibet operoſam, ac, ne ipſum laedatur piſtillum, cautiſſime ſuſcipiendam, tutius eſſe in plerisque floribus praemittere, quam penitus eam negligere, perſuaſum mihi eſt.

Vtroque modo rem feliciter confeci, atque ſub Auguſti finem capſulas iam maturas obtinui, ſeminibus plurimis pallide ſpadiceis foetas. Horum melioris notae quadringenta et plura ſaepius vnica continebat capſula. Ex iisdem ſequenti dein anno 1770. plantae hybridae mihi enatae ſunt permultae, nouo plane in hoc ſtirpium genere ac ſpecioſiſſimo florum colore, quibus autem altero demum anno 1771. d. 21. Iul. et ſeq. ſe induebant, maxime illuſtres.

Caeterum anomala iſta partium fructificationis explicatione, cui Lobelias in ſolo natali, vel haud obnoxias eſſe, vel certe nuptiali inſectorum ſeruitio iis hac in re ſubueniſſe Naturam prouidam exiſtimo, potiſſimum fit, vt flores Lobeliae *cardinalis*, ob ſeruorum conſtitutorum infrequentiam aut abſentiam, apud nos facile omnes abortiant. Quisquis igitur ſpecioſam hanc plantam per ſemina multiplicare cupit, ſedulo obſeruet, vt pulueris antherarum plantae proprii ac recentis ſufficientem portionem penicillo excipiat quotidie, eoque internam omnem verrucoſam ſtigmatum quorumuis virgineorum adhuc, roreque feminino madentium ſuperficiem ipſe conſpergat. Sic leuiſſima

leuiſſima hac opera, vegetabilium praeprimis exoticorum cultoribus nunquam ſatis commendanda, tam ex hac, quam e pluribus aliis ſtirpibus, magnam ſaepe ſeminum ac fructuum copiam certiſſime obtinebit, quam, neglecta ea, fruſtra vtplurimum exſpectaſſet Botanicus.

Deſcriptio
Hybridarum exper. primi.

FOLIA harum plantarum ſatis veſiculoſa, ſubſtantiae firmioris, ac praeſertim ante cauleſcentiam pallide luteo colore hinc et inde quaſi ſuffuſa; anguſtiora eadem aliquantum, atque inſignioribus magisque ſerratis crenis ad marginem praedita, quam ♀; ſed latiora, dentibus obtuſioribus minusque conſpicuis, quam ♂. Folia ſuperiora, ſpicae interſerta, minora, floresque minus occultantia, quam in ♀, aſt multo maiora, quam in ♂.

FLORES inter breuiores ac ampliores *ſiphiliticae*, et multo longiores ac anguſtiores *cardinalis*, medii.

CALYCIS laciniae multo anguſtiores, longiores etiam quodammodo, rectius porrectae, nec ita falcatae, quam ♀; aſt multo etiam latiores, aliquanto minores, erectae, ſinubusque multo magis reflexis, quam ♂.

COROLLAE laciniae profundiores ac anguſtiores, quam ♀, ſed breuiores ac latiores, quam ♂. Sic quoque earum tres inferiores haud ita parallelae inter ſe, vt ♀, ſed, ♂ more, magis a ſe inuicem diuergentes.

 STAMI-

STAMINVM columna longior, acutius triangula, minusque incurua, quam ♀, at breuior, obtusius triangula; magisque incuruata, quam ♂.

PVLVIS ANTHERARVM maxima quidem ex parte e folliculis paruulis, vacuis atque collapsis constabat; attamen etiam haud pauco numero alii iis immixti erant, seminali liquore scatentes, figurae sc. vt ♀ et ♂, longe ellipticae, ac bonae indolis.

PISTILLVM longius, stylo superne magis inclinato, quam ♀; sed brevius, stylo superius rectiore, quam ♂.

OBSERV. Stigma vniuerso huic generi non obtusum, vt Ill. *Linné* olim visum, sed adulta aetate constanter ac vere bilobum esse, iam dudum agnoui.

COLOR FLORVM e violaceo carmesinus seu purpureus; qui ♀ cyaneus, ♂ vero coccineus est.

Puluis antherarum in propria germina hybrida, partim ob parciorem folliculorum idoneorum numerum, partim ob ingenitum semini muliebri ☿. vitium, efficaciam vix vllam (vid. Exp. VI.), in materna vero, vt Exp. V. docet, maiorem exercuit. Quamuis autem plantae hac omnes per se quidem fere steriles fuerint, puluere antherarum tamen vel materno vel paterno consperſae adeo fertiles se praebuerunt, vt quaeuis facile ipsarum capsula, parcissimum quidem, ast laudabilem seminum bonorum numerum dederit.

EXPE-

EXPERIMENTVM II.

Lobel. cardinal. ♀.
Lobel. ſiphilit. ♂.
An. 1769. d. 26. Iul. Flor. plurimi.
Vid. Exp. inverſ. I.

Plantae, inuerſa hac ratione magnoque numero prognatae, iis Exp. I. ab imis radicibus vsque ad verticem ſummum, tam ſimiles erant, quam ovum ouo.

EXPERIMENTVM III.

Lobel. { ſiphilit. ♀. / cardinal. ♂. } ♀.
Lobel. ſiphilit. ♂.
An. 1771. d. 25. Iul. Flor. plurimi.

Plantae hae primi gradus deſcendentis matri naturali in vniuerſum iam multo ſimiliores, quam patri, ac, vt ſub hoc gradu ſemper fieri aſſolet, variae inter ſe ipſas formae, magnitudinis, coloris ac qualitatum. Ita v. gr. flores vnius horum individuorum ex rubicundo violacei erant, eiusdem fere tincturae, cuius Lobeliae *vrentis* ſunt. Fertilitas modo maior, modo minor, quam ſub ſtatu hybrido priori, vel etiam eadem circiter, vel ſterilitas ſumma.

EXPERIMENTVM IV.

Lobel. { ſiphilit. ♀. / cardinal. ♂. } ♀.
Lobel. cardinal. ♂.
An. 1771. d. 12, Aug. Flor. plurimi.

Plantae

Plantae inde procreatae, ſub primo hoc adſcendente gradu, patri naturali, more ſolito, in vniuerſum iam multo ſimiliores, quam matri, eiusdemque, ratione indiuiduorum, inter ſe diuerſitatis atque qualitatum, ac iſtae Exp. III. Vna vel altera earum incrementi luxuria colorisque hilaritate potiſſimum inſignis.

EXPERIMENTVM V.

Lobel. ſiphilit. ♀.

Lobel. { ſiphilit. ♀. / cardinal. ♂. } ♂.

An. 1771. d. 9. Aug. Flor. 5.

Capſulae ♀ naturales, puluere hybrido ♂ impraegnatae, ſemina bona haud pauca dabant. Ex his an. 1772. plantulae quidem prognatae, ſed caſu improviſo deſtructae ſunt.

Copulationes Lobeliarum aliae, fruſtra hucvsque tentatae.

EXPERIMENTVM VI.

Lobel. { ſiphilit. ♀. / cardinal. ♂.

propr. pulv. conſperſa.

An. 1771. d. 9. Aug. Flor. 9.

Conceptio inanis vtplurimum, vel nulla. Rarius vnum alterumue bonum ſemen in capſula.

EXPERIMENTVM VII.

Lobel. ſiphilit. ♀.

Lobel. Erinus. ♂.

An. 1771. d. 4. Aug. Flor. 20.

Conceptio inanis.

EXPE-

EXPERIMENTVM VIII.

Lobel. { ſiphilit. ♀. / cardinal. ♂. } ♀.

Lobel. Erinus. ♂.

An. 1771. d. 4. Aug. Flor. 44.

Conceptio nulla.

EXPERIMENTVM IX.

Lobel. Erinus. ♀.

Lobel. cardinal. ♂.

An. 1771. d. 12. Aug. Flor. 10.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerſ. X.

EXPERIMENTVM X.

Lobel. cardinal. ♀.

Lobel. Erinus. ♂.

An. 1772. d. 23. Aug. Flor. 3.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerſ. IX.

EXPERIMENTVM XI.

Lobel. cardinal. ♀.

Lobel. vrens. ♂.

An. 1772. d. 23. Aug. Flor. 3.

Conceptio nulla.

EXPERIMENTVM XII.

Lobel. cardinal. ♀.

Lobel. inflata. ♂.

An. 1772. d. 25. Aug. Flor. 3.

Conceptio nulla.

EXPE-

EXPERIMENTVM XIII.

Lobel. cardinal. ♀.
Lobel. cliffort. ♂.
An. 1772. d. 25. Aug. Flor. 3.

Conceptio nulla.

EXPERIMENTVM XIV.

Lobel. vrens. ♀.
Lobel. Erinus. ♂.
An. 1772. d. 10. Iul. Flor. 5.

Conceptio inanis.

EXPLICATIO FIGVRARVM.

Tab. IV.

Ser. I. Lobeliae ſiphiliticae flores.
Ser. II. Lobeliarum hybridarum Exp. I. et II. flores.
Ser. III. Lobeliae cardinalis flores.
a. a. a. Flos adhuc clauſus.
b. b. b. Flos explicitus.
c. c. c. Idem, a latere.
d. d. d. Calycis lacinia.
e. e. e. Columna ſtaminea integra, cum piſtillo, ad antherarum tubum prominente.
f. f. f. Columna ſtaminea diſſecta ac explanata.
g. g. g. Piſtillum virgineum perfectum.
h. h. h. Piſtillum impraegnatum.
i. Stigma Lobeliae cardinalis adhuc clauſum ac imperfectum.
k. Idem lente auctum.
l. l. l. Stigmata vera, biloba.
m. Aliud, lente auctum.

DISSER-

DISSERTATIO
DE
CRANIO RHINOCEROTIS
AFRICANI, CORNV GEMINO;
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALI PETROPOLITANAE OBLATA,

Auctore

PETRO CAMPER

Quum nuper in Celeb. *Pallaſii* egregia diſſertatione *de oſſibus Sibiriae foſſilibus, craniis praeſertim Rhinocerotum*, caet. *Comment. Nou. Academiae huius Tom. XIII.* inſerta, viderem deſiderari quam maxime Rhinocerotis cranii deſcriptionem, vtpote a nemine hucusque exaratam; haud ingratum fore Academiae Veſtrae Imperiali ratus ſum, ſi quae ſuper rariſſimi huius animalis capite, atque cranio adnotare mihi licuit, ipſi dedicarem.

Miſerat ex Promontorio *bonae ſpei* ad me integrum Rhinocerotis cum gemino cornu caput Illuſtriſſimus *Baro I. de Plettenberg*, ditionum noſtrarum in ea Africae parte gubernator; quod ſummo gaudio nactus 6. Febr. 1772. anni, publice, in theatro anatomico Gröningano, auditoribus meis, multisque rerum naturalium curioſis demonſtravi; primum cum pelle, quemadmodum in addita Tabula V. conſpicitur, deinceps coctione depuratum, vt

 cra-

cranium, maxillas, et quae eorum compositionem spectant, ob oculos ponerem plenius.

Primum vero iconem eius accuratissime delineavi, cuius exemplar ad mensuram rhenolandicam factam atque hic itidem contractam Vobis, Viri Inlustrissimi! obfero. Eius autem historiam integram non adjiciam, quoniam separatim eam edere decreui; videbatur etiam cum maxime Vestrae interesse Academiae, vt quae Clariss. *Pallas* de Sibiricis Rhinocerotum craniis fossilibus obseruauerat, inlustrarem, vtpote qui hucusque, quantum noui, solus integrum huius belluae cranium possideo.

Has igitur qualescumque obseruationes figuris variis, mea manu ductis, inlustratas vobis, Viri Inlustrissimi! mitto, atque summa cum reuerentia dico atque dedico, ea spe, vt, si placuerint, inter Commentarios celebratissimae Vestrae Academiae, etiam ob aliorum vsum in publicum mittantur.

His intellectis Bufali asiatici ingentis cranium, quod in museo meo conseruo, depingam, etiam Apri aethiopici cranium, vt quae historiam physicam telluris spectant, inde clarius intelligantur; ea enim mihi contigit felicitas, vt, ex multorum amicorum generositate, totius fere telluris rarissimorum animalium sceletos, vel crania mihi comparare potuerim.

De Rhinocerote, atque eius cornuum numero.

Rhinoceros ingens bellua, frugivora, reperitur frequenter in Africa, et in Asia, nunc cornu vnico, nunc gemino armata, adeo vt in vtraque orbis antiqui regione haec

haec diuersitas conspiciatur; quamquam in Africae promontorio plurimum bicornes reperiantur: vnde manifestum est, & ex Africa per Aegyptum Romam adferri, & ex Mogolensi imperio juxta Persiam in Arabiam transire potuisse, sic vt Domitiano imperante in ludis conspici potuerit, sicuti ex *Martiali* et nummis ea occasione cusis (*a*) patet; et *Jobi* tempore cognosci ac describi nomine *Rëem*, quemadmodum hodie extra omne dubium poni posse confido. Rhinocerotes enim gemino cornu antea vel rarissimi, vel numquam nisi a *Pausania* visi, hodie in curiosorum museis longe crebriores inueniuntur quam cornu vnico, adeo vt verissime animaduerterit Cl. *Pallas* (*b*), se innumera talia vidisse specimina, etiam in tenerrimae aetatis bellua. Idem ipse adfirmare audeo, qui duo talia crania possideo, et in Hollandia similia plura in aliorum museis vidi.

Inueniuntur etiam cornu tergemino; vnde maxime probabile videtur, luxuriantis Naturae alterum illud, et minus cornu potius productum esse, quam differentiam vere specificam. Islandicae oves quippe non diuersam speciem efficiunt, quoniam quatuor, quinque, vel plura cornua gerunt, quibus omnino carent in Belgio, quamquam hae eaedem in Drenthana regione eleganter contornatis et vere hammoniis cornibus superbiant.

Adfirmare vero non audeo ad Suum pertinere genus, quemadmodum Cl. *Pallasio* placuit (*c*), quia de

 mori-

(*a*) Tab. VI. Fig. IV. et V.
(*b*) *loc. cit.* p. 45.
(*c*) ibid. p. 447.

moribus et vitae genere nihil prorſus determinare valeo; Cranii certe ſtructura multum diuerſa eſt, etiam dentium diſpoſitio, quae tamen omnia admirabilem ſimilitudinem habent in Apris noſtris, in aſiaticis *Babiroſſa*, atque americanis, *Pecari* vocatis. In aethiopico roſtrum quidem praecedentibus analogum eſt, dentes vero quam maxime diſſimiles. Noſtratem, americanum, et aethiopicum ſecui, atque eorum roſtrum oſſiculo ſingulari ad terram confodiendam praeditum vidi. Fateor equidem Aprum aethiopicum dentes non habere primores ſeu inciſiuos, verum etiam iis carent Elephanti, ac Rosmari: eandem ob rationem, propter laniarios nimium exſertos, quam vt vnquam inciſoriis vti queant.

Ex catagrapho Tab. V. patet labium ſuperius A. I. tamquam in digitum migrare I. K. elephantino non abſimilem, qui ad proboſcidis extremum reperitur. Eo vtitur ad cibum capiendum vt Elephas, eo deſtituitur aper omnis, cuius nares inſuper non a latere roſtri, ſed in antica parte plana ſitae ſunt.

Cornu anterius A D. in hoc ſpecimine incuruum adeo fuit vt alterum E F H. tamquam inutile reddiderit. Verum non ita in omnibus: poſſideo alterius cranii partem, cuius cornu anterius rectum, et antrorſum inclinatum eſt.

Habet etiam labium inferius M K. valde latum, et oris rictum a ſuibus diuerſum, vtpote qui longius excurrit in Rhinocerote.

Oculi in media capitis parte ſiti, qui in Apris retrorſum magis ſedem obtinent, etiam maiores ſunt et elegan-

gantiores, vti in viuo, cum vnico cornu, ante triginta annos vidi. Reliqua icon demonſtrat.

Si Tab. V. catagraphice delineatam contemplemini, vt et Tab. VI. fig. 1. quae a fronte idem caput repraeſentat, aliquid grande, atque maieſtate conſpicuum in hoc animali mirabimini, quod verbis deſcribi nequit, et quod in aprorum genere quam maxime deſiderari videtur.

Progredior ad ipſum cranii catagraphum cuius figuram Tab. VI. exhibet. Eam ſi cum figura 2. Tab. IX. Tom. XIII. *Comment. veſtrorum nouorum* conferre lubuerit, (quod tanto facilius fieri poterit, quia caſu fortuito eandem longitudinem vtraque habet icon) patebit, orbitam in noſtra figura medium occupare, atque peramplam eſſe; altitudinem totius, roburque maiora; condylos occipitis magis retrorſum ſitos, narium vero hiatum quidem minorem, ſed altiorem eſſe.

Maxima autem, mihi videtur, differentia in ſepto narium ſita eſt, quod totum ad extremitatem roſtri vsque oſſeum eſt in ſibirico cranio (*d*), quum cartilagineum fuerit in capenſi.

Sedes cornuum in foſſili, ſatis bene cum illis noſtri B C fig. 2. congruunt. Si ſumma ſuperficies roſtri magis hiſpida eſt, et ſuturae obliteratae in ſibirico cranio, id aetati potius quam ſpecificae varietati adſcribendum eſſe reor.

In noſtro os maxillare ſuperius Fig. 2. Tab. VI. appendicem habet O. P. qualis in omnibus fere quadrupedibus reperitur, vt et in homine ſylueſtri ſeu *Orang-Outang*,

Bb 3 in

(*d*) *Nou. Comm. l. c.* pag. 448.

in Cynocephalis, totoque simiarum genere, et in aliis permultis. Comprehendit haec dentes incisiuos; in Rhinocerote vero nostro ob paruitatem nullos continet. In Apro aethiopico longe alia ratio, nam in eo dentes primores desunt, quia laniarii cornuum instar sursum et antrorsum flexi eorum vsum vanum redderent.

Interea manifeste patet, Rhinocerota dentibus tum incisoriis, tum laniariis omnino carere, et molaribus solis esse prospectum, quorum alveoli maximum spatium oris interni occupant.

Tres anteriores licet robusti, tamen minores sunt tribus subsequentibus; septimus iterum minor sexto; forte, quia animal valde adultum non fuit.

Recte igitur indicauit Cl. *Pallas*, (*e*) dentes Rhinoceroti esse vel senos, vel septenos: septenarius numerus ex nostro evidens est. Atque haec omnia ex ipsa inspectione figurarum nostrarum manifesta sunt; operae pretium nunc erit, partes quasdam paulo accuratius repraesentare.

De cerebri, cerebellique camera primum agendum, quoniam viscera illa primas tenent: haec perparua, vti ex linea punctis adumbrata, *l*, *m*, *n*, *o*, in Tab. VI. fig. 2. patet; octo pollices ex E in *m* longa, et sex fere alta est. Maior igitur quam in fossilibus Sibiriae capitibus a Cl. *Pallasio* accuratissime mensuratis (*f*).

In ea nullum osseum tentorium obseruaui, quale insigne habent phocae, vrsi, canes, leones, feles, et omnium maximum inter cerebellum et cerebrum phocaenae. Orbita,

(*e*) Ib. p. 463.
(*f*) Pag. 448. et 457.

Orbita, quae ob oculi nobilitatem ſecundo loco mihi digna videtur, perampla eſt, margine ſcabro T. tab. VI. et VII. fig. 3. inſtructa, quem ſuggrundium Cl. *Pallaſio* (g) vocare placuit vocabulo minus bene ex *Vitruuio* adplicato, *ſubgrundas* quippe vocauit tectorum prominentes oras. In integro capite vero, vt in Tab. VII. fig. 1. non ita eminent A et B.

Dolui, quod oculos effoderint ex capenſi capite, quoniam lacrymalia puncta proſequi non potui; quibus tamen gaudere videntur propter duplicem canalem oſſeum, *p*. et *q*. Tab. VI. fig. 2. in angulo orbitae conſpicuum. Punctis iis ſeu oſtiis caret Elephas, et Hippopotamus, forte multa etiam alia animalia.

Nerui optici longitudo inſignis eſſe debet, quia oculus valde diſtat a cerebro: *x*. foramen opticum eſt, *z*. ſpheno-palatinum, *y*. *w*. infra-orbitale; reliqua tranſeo, vtpote ſatis manifeſta.

Inſignes vero proceſſus habet vtraque zygomatis radix L I. fig. 2. Tab. VI. quibus maxillae inferioris condyli retinentur, ne retrorſum labantur: leo, vrſus, vulpes, et caetera, quae lateraliter maxillam non mouent animalia, ſimiles ſed latiores et minus longos habent obices.

Maſtoideus proceſſus I. C. F. exiguus eſt, etiam tympani cavitas parua videtur, niſi forte per zygomatis radicem ſe extendat, quod non examinaui.

Ora

(g) Pag. 450.

Ora poſterior oſſis frontis D. quidem reflexa, ſed vltra condyli partem E. non protracta eſt; in foſſilibus multum eminet: aetati hanc diuerſitatem adſcriberem, ſi minor eſſet. Reliqua ſatis ſibi inuicem ſimilia ſunt.

De baſi cranii Rhinocerotis.

Ex collatione baſis cranii noſtri Rhinocerotis Tab. VIII. fig. 1. cum illa Cl. *Pallaſii* ib. Fig. 3. iterum liquet, robore, et latitudine noſtrum ſupergredi foſſile caput.

Dehiſcentia autem, quam adeo in foſſili palato demiratur Cl. *Pallas* (*h*), in noſtro perfectius videtur effecta, quia duo oſſicula maxillaria anteriora, O P. conſeruaui, de quibus in ſuperioribus dictum fuit. Inde Cl. *Pallas* intelligere poterit cur in quatuor craniis foſſilibus nullum veſtigium dentium primorum inuenerit, (*i*) quos tamen fruſtra *Parſonius*, *Linnaeus*, *Buffonius*, aliique enumerarunt. Caret quippe iis Rhinoceros, atque nonniſi molares poſſidet.

Dentes omnes ideo molares voco, quia magno oſſi maxillari inhaerent, quemadmodum in omnibus quadrupedibus, nullis exceptis, ex *ſecundo*; quoniam radicem duplicem et coronam omnes horizontalem habent, vti et bini anteriores in vtraque maxilla. Ex horum dentium paruitate iudicaſſe videntur modo dicti auctores, atque ideo praecipue in errorem lapſi, quod crania huius animalis examinare non potuerunt. In viuo animali, praeſertim tam fero atque valenti, non facilis eſt dentium enumeratio; excuſandi igitur graues illi Viri, modo ex noſtra obſer-

(*h*) Pag. 452.
(*i*) Pag. 453.

obſeruatione diſcant hi animalium ſcrutatores, dentium enumerationem fallaces dare characteres pro claſſium atque generum diuiſionibus. Diſcant, his characteribus conceſſis, *Brutis adnumerandos eſſe Rhinocerotes, et nullo modo Belluis.*

Ruminantia omnia hanc anteriorem maxillae portionem habent ſine dentibus, quemadmodum Rhinoceros: in foſſili Bufali cranio eam Cl. *Pallas* Tab. XII. delineari curauit.

In Myrmecophaga capenſi eadem naturae deviatio, etiamſi molares adſint valde conſpicui, quos fruſtra negauit *Kolbius.*

Dentium molarium numerus in vtraque maxilla ad 28. adcedit; ſeptem in vtroque latere, ingentes et robuſtiſſimi, ita tamen diſpoſiti, vt inferiores intra margines ſuperiorum excipiantur: vnde ſimul patet lateraliter non moveri maxillam inferiorem ad manducandum, ſed contundi cibos; obſtat etiam huic motui maxillae inferioris articulatio, vti ex fig. 2. Tab. VII. colligi poteſt facile, transverſalem quippe lineam format condylus vterque Ω. Θ.

Vomer in noſtro erat valde tenuis, ex duplici lamina conſtans, quae ſeptum cartilagineum excipiebat, atque exterius multopere diſcrepat a foſſili fig. 3. *ib.* in quo et vomer, et ſeptum ex oſſe robuſtiſſimo conflata videntur.

Foraminum, et reliquarum partium differentia ſingularem deſcriptionem non videbatur requirere. Magis elongata omnia in foſſili, quae contracta ſunt in noſtro, quoniam totum cranium gracile magis eſt in his foſſilibus.

De differentia inter nostrum Rhinocerotis cranium et Sibiricum fossile.

Ex iis quae in praecedentibus adnotaui haud difficulter colligitur cranium a Cl. *Pallasio* Tab. IX. depictum geminum cornu gessisse, simili ratione qua nostrum, sed tantam simul varietatem locum habuisse, vt eadem animalis species vix existimari queat.

Examinanda igitur esse arbitror asiaticorum crania, num nares septo osseo diuisas habeant, et compressas? ea ratione forte melius explicare possemus diuersitates, quas in fossilibus notarunt rerum naturalium curiosi.

Nemo hodie ignorat diuersitatem illam insignem quam inter quasdam Elephantorum maxillas fossiles notarunt *Collinsonius* et *Hunterus*, hic vol. LVIII. pag. 35. *Transact. Philos. Angliae* ille in vol. LVII. p. 464. Tantam eam ratione dentium molarium existimo, vt determinare audeam, alteram speciem constituisse haec animalia, quamquam carniuora appellare prorsus non audeam.

In dentibus molaribus fossilibus Elephantorum semper notabilis obseruatur diuersitas; quid ergo? num perditam atque extinctam statuere ideo liceret speciem, quia similem non nouimus? Id sane credibile non videtur, quia providentiae divinae repugnat.

Interea tot quadrupedum incognitorum crania, quemadmodum haec et illa, quae Cl. *I. F. Esperus* descripsit, tot diuersas Cetorum maxillas in stratis reperimus, quae aberrare omnino videntur ab iis, quae hodie obseruamus, vt improbabile minime censeam, nos temporis diuturnitate alias detecturos species, quas hucusque ignoravimus, quia non-

nondum omnis telluris maria, et terras rite examinare licuit. Auget ſpem meam, quod in deſertis Aſiae et Africae locis quotidie noua detegantur animalium genera, quae vix ante decem annos nullum mortalium cognouiſſe conſtat. Exemplo ſint Aper aethiopicus, noua Bonaſi ſpecies, nuper in *Ser. Principis Arauſionenſis* viuario mortua, elegans illud inter ceruum et bouem medium Animal a Cl. *Huntero* deſcriptum, taceo alia plura.

Eadem ratione Ill. *W. Chapmannus*, et Cl. *Wooller* in *vol. L. philoſ. Tranſ.* Crocodylum foſſilem deſcripſerunt, in ſaxo aluminoſo ad profunditatem 180 pedum, in ducatu Eboracenſi An. 1758. repertum, non niſi nuper cognitum, a Cl. *Edwards* explanatum. Rarus etiam hodie eſt hic gangeticus Crocodylus: poſſideo parvum, et cranium adulti vltra duos pedes longum. Ita quotidie noua reperimus animalia in Aſia, quae foſſilia Europae ſeptentrionalis inluſtrant.

Ante paucos annos in agro Syluaeducenſi non procul a Moſae ripa pars cranii Elephanti iunioris reperta eſt, cuius dentes molares ratione laminarum multopere a recenter mortuorum molaribus dentibus diuerſi ſunt. Videtur fragmentum parui Elephanti, praeter propter 4. annorum, et altitudinis pedum quatuor cum dimidio. Congruit enim cum capite ſceleti huius aetatis et ſtaturae, quem ex ſumma generoſitate Ser. Principis Arauſionenſis GVLIELMI V. poſſideo: placuit enim Celſiſſimo Belgii Gubernatori mihi concedere paruulum hunc Elephantem in ſuo vivario mortuum. Anatomen huius animalis breui publici iuris faciam, quemadmodum eius prodromum antea in diario Amſtelaedamenſi, *Exercitationum literariarum* titulo cognito, edidi.

 Haec

Haec in transitu: redeo ad os femoris fossile Elephanti maioris, altitudinis 10. pedum, quod cum vertebra in fundo aggeris euersi in agro *Bommeliae*, non procul a paruo cranio repertum et a me descriptum est in Act. Harlem. Tom. XII. p. 381. historiam tradidit Clar. *Palier* Syluaeducis S. 'S. Theolog. Professor.

Patet ex parui cranii fragmento, ossa Elephantorum in Belgii variis locis reperiunda non esse armentorum quibus Imperatores Romani vsi sunt ad Batauos subiugandos; ad tales enim expeditiones paruuli inepti fuissent, sed ossa haec esse aliunde aduecta, atque hic deposita post varias et admirabiles catastrophes, quas tellus nostra ante multa saecula subiit, et quarum vestigia manifesta vbique reperimus.

Americam sane Romani cum exercitibus suis non devastarunt, multo minus Elephantorum, et incognitorum animalium ingentem adeo numerum versus Ohionem fluvium deduxerunt, vt tot crania et alia ossa ibidem etiam hodie reperire quiremus.

In Sibiria haec eadem, Rhinocerotum, et Bufalorum ossibus intermixta tanta copia non reperirentur si telluris totius euersio locum non habuisset.

Diluvium, quemadmodum a Moyse traditur ad tantos tumultus edendos nullomodo sufficiens fuisse videtur; maior quippe perturbatio, violentior corporum variorum euersio ad stupendos illos effectus requirebatur; diluvia scilicet diuersa, terraemotus ingentes et saepius recurrentes, ignis subterranei explosiones vehementes, et variae, forte et telluris totius dimotio, sola apta videntur fuisse ad producendas tot diuersarum rerum admirabiles mixturas.

ras. Elephantorum maxillae cum ammonitis et belemnitis vnitae non reperirentur, aut cum gloſſopetris, quales Inl. *Tatiſchtſchew* in muſeo Imperialis Veſtrae Academiae repoſuit, atque *Stellerus* memoriae mandauit, vti Cl. *Pallas* (*k*) teſtatur, ſi coniecturae locus non eſſet. Verum ſuper his iudicium differendum eſſe exiſtimo, donec plura, et euidentia magis circa haec omnia hominum ſollertia deteget.

Ex Muſeo Lancumano a. d. 26. Octobris. MDCCLXXVI.

TABVLARVM EXPLICATIO.

Tabula Quintae. Fig. 1. Caput integrum exhibet Rhinocerotis, quemadmodum ex Promontorio bonae ſpei, praecipuis muſculis ſub cute ſublatis, miſſum fuit, ad menſuram rhenolandicam reductum.

A. B. C. D. Cornu anterius, cuius pars A. C. B. fibroſa, tanquam hirſuta; C. D. glabra, vtrinque compreſſa, cum nullo detritionis indicio.

E. F. G. H. Cornu alterum, priori ſimile ſed minus. E. G. F. pars fibroſa, G. H. glabra, complanata.

Vtrumque putredine procul dubio ſeparatum a pulpa cui inſiderunt, ideo tamquam ſuperimpoſita hic, et ſeiuncta repraeſentantur cornua.

I. K. Digitus labii ſuperioris. K. M. labii inferioris latitudo in fig. 1. Tab. VI. magis conſpicua.

K. M. L. Oris rictus. N. frontis ora ſumma.

O. Auris externa ſiniſtra, pilis in margine ornata.

Menſura adiecta etiam reliquis figuris conuenit.

Tabula Sexta.

Catagraphum cranii repraesentat: *prima figura* lineis sparsis omnes partes manifeste ob oculos ponit, et maxillam clausam; *altera* eiusdem monogramma, characteribus excipiendis accommodatum. *Tertia* maxillam, a capite remotam, vt capitis processus varii, et ipsius maxillae facilius in oculos incurrant.

A. B. C. D. Os frontis cum osse nasi A, *c*.

D. E. G. S. Os occipitis, cuius condylus sinister E.

H. F. K. I. L. *f*, *z*. Os temporis cum processu zygomatico L. *f*, *z*.

K. Meatus auditorius; F. processus mastoïdeus.

K. I. L. Processus osseus maxillae inferioris condylum repellens.

L. M. N. Processus pterygoideus; N. eius hamulus.

o. P. Ossis maxillaris appendix, ossiculum parvum, nullos dentes comprehendens.

o. Alueolus dentis molaris postremi seu septimi.

R. Eminentia aspera, cui recti capitis anteriores inseruntur.

T. Orbitae margo asper, subgrundae a Cl. *Pallasio* dictus; magis conspicuus; Tab. VII. fig. 3. T.

U. Os vnguis, quod terminatur, *a*, *b*, *q*, *d*, *e*, *y*.

V. Osseus nodulus binos canales lacrymales separans.

W. Foramen quod transmittit secundum ramum quinti paris, vt foras pateat *m*, Y.

X. Foramen opticum; Z. spheno-palatinum.

A. B. *r*, *u*, Sedes cornu prioris, *c* C *s*, *t* sedes alterius; vtraque scabra est et vasorum sanguiferorum vestigia manifesta continet.

a, *b*, *c*.

a, *b*, *c*. Sutura inter os vnguis, frontis, et maxillare.

a, *y*, W. *z*, *f*, *g*. Os zygomaticum, parte excauata *y*, *z* orbitae marginem inferiorem efformans.

h, *i*, *k*. Veſtigium inſertionis muſculi temporalis.

l, *m*, *n*, *o* Camerae cerebri et cerebelli limites interni.

I. II. III. IV. V. VI. VII. Lateris ſiniſtri ſeptem molares.

In Fig. III.

Γ. Σ. Δ. Θ. Λ. Π. Inferior maxilla depingitur.

Δ Σ. Proceſſus eſt coronoideus, Θ condylus, Λ. eminentia oſſea.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. Septem molares lateris ſiniſtri.

In fig. I., vbi os clauſum repraeſentatur, dentes ſuperiores excipiunt intra ſe dentes inferiores, euidentius in fig. III. huius tabulae a parte priore.

v. *w*. foramina e quibus nervi quinti paris ramus tertius egreditur diuerſis ramificationibus.

Tabulae Septimae.

Figura Prima, idem Rhinocerotis caput a parte priori delineatum exhibet; in quo margines orbitarum *ſubgrundae* dicti, A et B *v*, valde manifeſti ſunt, atque ita eminent, vt oculorum nihil conſpici poſſit, quemadmodum in hoc emortuo, exſiccato, et oculis orbo capite; ſed in viuo Rhinocerote vnico cornu, quem Leidae ante annos 30. ſimiliter a parte priore delineavi, vtriusque oculi cornea et pupillae viſui ſe obſerebant.

Figura Secunda roſtri partem ſummam repraeſentat; A et B ſubgrundarum latitudinem; C, et D, cornuum ſedes et diametros deſignant.

Figura

Figura Tertia cranium a parte priori exhibet, vt narium amplitudo conſpiciatur, et ſepti oſſei defectus; in fundo vero palati oſſei tenuitas adparet.

A, et B. Oſſa ſpongioſa denotant; B. inferius, A. ſuperius.

O. P. Oſſis maxillaris appendix, vide Tab. VI. fig. 2.

T. Subgrundarum ſiniſtrae: reliqua haud obſcura.

Figura Quarta Nummum cupreum, a Sen. Rom. cuſum in honorem Domitiani, repraeſentat, et in eo Rhinocerotem cum gemino cornu, ex muſeo Celeb. *W. Hunteri*, Londinenſis Anatomici ſummi; gibber in dorſo ex corroſo metallo.

Figura Quinta alterum itidem cupreum exhibet, ex muſeo Inluſtr. *Duane*, Londinenſis. Hos cerae impreſſos ad me miſit Cl. *W. Hunter.*

Tabula Octava.

Cranii eiusdem baſin, palatum, et dentium ſitum a parte inferiore exponit *Figura Prima*, *altera* maxillam inferiorem a parte ſuperiori.

A. E. F. I. L. M. N. S. Q. O. P. R. vt in figurae ſecunda Tab. VI.

α. L. Sinus, qui condylum maxillae inferioris Ω. Θ. excipit.

β. Par foraminum ſextum, quod arteriae carotidis externae ramum ad duram matrem transmittit.

γ. Foramen inſerviens arteriae carotidi, et quinti paris ramo tertio.

δ. Circulus paruus, punctis minutis repletus, denotat locum cui adhaeſit oſſis hyoidis pars ſtyliformis.

ε. Par

ε. Par foraminum nouum, transmittendis venae jugularis et octaui paris fibris accommodatum.

ζ. Par foraminum decimum, e quo par linguale exit.

θ. Canales palatini.

λ. μ. Narium foramina hic non divisa, propter vomeris absentiam.

I. II. III. IV. V. VI. et VII. septem dentes molares, quorum omnium coronae valde conspicuae.

In Figura Secunda.

Γ. λ. Maxillae longitudo adparet.

Δ. z. Processus est coronoideus; π. angulus maxillae.

Ω. Θ. Condyli latitudo; λ. eminentia ossea, cui vel ligamentum, vel musculus probabiliter inseritur.

Γ. r. Maxillae crassities, et obliterata symphysis.

s. t. Duo foramina, vtrinque, coeca pro excipiendis gingiuae ligamentis.

u. Ostium canalis ossei, quem tertius ramus quinti paris ingreditur. Confer v. w. fig. 3. Tab. VI.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. Septem molares inferiores cum suis coronis.

Notandum, figuras has omnes ichnographice esse ductas, scilicet ita, vt axis opticus semper normalis fuerit in singulis punctis ad planum in quo repraesentantur, neglectis scilicet perspectiuae regulis; quemadmodum semper soleo, vt majori cum perspicuitate loca vera omnium partium repraesentem.

ADDITAMENTVM

Auctore

P. S. PALLAS.

Deſcriptio cranii Rhinocerotis africani a Celeberr. *Camper* propoſita vtique tantam continet a craniis foſſilibus Sibiriae noſtrae differentiam, vt vix pro eadem ſpecie haberi queat et exquiſite optanda ſit aſiatici animalis accuratior atque comparatiua deſcriptio, quae certius docebit numne duae Rhinocerotis ſpecies in orbe ſint ſtatuendae. Interim, vt cranii vtriusque facilior fieret comparatio, in *Tab. IX. fig.* 1. integerrimi cranii Sibirici foſſilis, ad Tſchikoium regionum transbaikalenſium fl. inuenti, adponendam iconem curaui, eo magis neceſſariam, quia inter priores iconiſmos in *Nouorum Commentariorum Academiae* noſtrae *Volumine XIII. et XVII.* exhibitos nulla extet cranii maxillae ſuae impoſiti, qua circumcaeſura capitis animalis perfectius exprimitur. Hac nunc cum Camperianis praeſertim *Tab. VI.* exhibitis collata, differentiae vtriusque, praeſertim quoad maxillarum longitudinem, et oſſa roſtri, luculenter apparebunt.

Dum iſta praelo traduntur, adlatae ſunt ab Ill. *Campero* litterae, e quibus ſequentia ad vlteriorem Rhinocerotum illuſtrationem facientia, eius fere verbis, adjici poſſunt. Vidit interea Vir Celeberr. Rhinocerotem viuum in viuario regio Verſalienſi et os eius accurate potuit inſpicere, in quo lata quidem, ſed tenuis valde lingua deliteſcebat. Apparuit diſtincte interuallum inter dentes anteriores, tum in ſuperiore, tum in inferiore maxilla, qua in parte gingiua admodum prominebat.

Dein-

Deinde vero in diſſoluto capite vituli Rhinocerotis, ex India orientali nuper transmiſſo, os inciſiuum ſeu maxillae ſuperioris complementum (*Tab. IX. fig.* 2.) binis alueolis *A* et *B*. inſtructum, et ſeſquipollicari longitudine obſervavit; dum in adulto cranio, ſupra deſcripto, eadem vix unum pollicem ſuperabant, nullo alveolari veſtigio notata. Praeter duos iſtos alveolos in ſingulo complemento iunioris cranii, quorum anterior multo maior eſt et profundior, reliqua maxilla tantum quinque molares continet, ita diſpoſitos, ut intervallum inſigne detur inter anteriorem ſeu quintum molarem, atque alveolum minorem *B*. citra quem, per faciem obliquam *O P Z*. cum maxillari oſſe committitur haec appendix. Figura utriusque maxillae huius iunioris animalis Cel. *Campero* egregie convenire viſa eſt cum *Fig.* 2. 3. et 4. *Tab. XVI.* in *Tom. XVII. Novorum Commentariorum* noſtrae Academiae, ipſique etiam hocce cranium Sibiricum unicornis animalis fuiſſe cenſetur, quale etiam eſt illud iunioris, de quo hic agitur.

Haud improbabile etiam Ill. *Camper* credit, maxillas in variis Rhinocerotibus diverſimode conſtructas eſſe, vt plurima eorum crania examinanda ſint, antequam certi quidquam de hac ſtructura et dentium numero determinari queat. Vtique vero ſemper diſtabunt dentes primores, ſaltem ſuperiores, quia ſecus nocerent labio ſuperiori, eiusque mobiliſſimo apici, qui admodum ſimilis eſt digito proboſcidis Elephanti, iisdemque fungitur officiis; quibus dentes approximati omnino obſtarent. Anne vero in vitulis duplex complementum? alterum illud oſſeum iam deſcriptum, alterum adhuc cartilagineum, maceratione deperditum? — Mihi potius hoc inter ſpecificas Indici et Afri Rhinoc. differentias collocandum eſſe videtur.

Deinde, dum in Rhinocerote vivo, Verſaliae viſo, etiam inferiores dentes primores inter ſe diſtarent; in Juniore res aliter ſe habere viſa eſt. *Tab. IX. fig.* 3. ex Cel. *Camper* autographo delineat ſiniſtram inferioris maxillae partem priorem *M. V. S.* in qua diſtincte apparent ſeptem alveoli, quorum ultimus ſeu anterior 7. valde magnus eſt et profundus adeo, vt per alveolum ſextum eius fundus, ex illabente lumine, trans foramen *y.* conſpici queat. Habet is a latere interno cavum, S. quod adeo manifeſtum eſt alveoli indicium, vt ſimillimum ſit iis, quae in maxillis hominum animaliumque videmus ex lapſis primoribus dentibus. Si vero pro tali veſtigio non haberetur, numerum dentium augeret, vt octo, et non ſeptem ab vnoquoque maxillae latere darentur. Atque haec in maxilla inferiore alveolorum conſtitutio mihi etiam magis cum illa videtur congruere, quam ſupra adlegata Tabula *Novorum Commentariorum* e cranio foſſili Sibirico, integerrimo delineavi.

Caeterum monendum eſſe duxi, me in deſcriptione cranii Rhinocerotis aſiatici *Vol. XIII. Novor. Comment.* exhibita, non id voluiſſe, Rhinocerotem cum *Suillo genere* naturaliter eſſe coniungendum, quod Ill. *Camper* intellexiſſe videtur, ſed proxima ſtare affinitate et ad eundem *Ordinem naturalem* pertinere videri.

OBSER-

OBSERVATIO
DE DENTIBVS MOLARIBVS FOSSILIBVS IGNOTI ANIMALIS, CANADENSIBVS ANALOGIS, ETIAM AD VRALENSE IVGVM REPERTIS;

Auctore
P. S. PALLAS.

Inter collecta durante itinere fossilia, duo adlati fuere molares maximi et durissimi, quos comparatione post reditum instituta iis simillimos esse deprchendo, quorum in Americae borealis regione quadam, ad Ohio fluvium, cum aliis quadrupedum reliquiis inventorum primam notitiam optimo *Collinsono* et graphicam descriptionem Cel. *Huntero* debemus (*a*). Quum plurimis Hippopotamorum craniis quondam lustratis probe callerem molares istos atque nostros non huius esse belluae, sed ignotae cuiusdam, antiquioris telluris hospiti; tamen propter assertum Celeb. *D'Aubentoni*, qui molares canadenses plures, simul cum simillimis aliis inter Turchesias Galliae meridionalis reperiundis, etiam Collinsonianis comparatos, audacter Hippopotamo tribuit: nolui prius molares apud nos repertos publicare, quam de forma dentium molarium Hippopotami certissimus essem factus. Itaque quando nuper occasione transmissae ad Academiam Celeber. *Camperi* discriptionis

 cranii

(*a*) *Philosophical Transactions vol. LVII. 1767. p. 464. tab. 21. & vol. LVIII. 1768. p. 34. tab. 4.*

cranii Rhinocerotis africani, litterarum commercium cum Anatomico illo summo inchoari opportunum esset, desiderium illud meum Celeberr. Viro exposui, rogans vt ex aliquo craniorum, quae Lugduni-batavorum atque Amstelaedami asservari noram, Hippopotami molarem maximum delineari, vel cera effingi curaret. Annuit voto Vir humanissimus, quumque in proprio Eius thesauro osteologico extaret cranium huius belluae adultae, propria manu exaratam iconem molaris maioris postremi e sinistro latere inferioris maxillae excussi, graphice expressam transmisit, quam Tabulae VIII. infra (fig. 3.) adieci.

Ex hac icone, ad veras mensuras naturali magnitudine curiose exacta, satis liquet molares Canadenses, quos *Acta anglica* delinearunt, quosque depicta ibidem etiam maxilla eius, ad quam pertinuerunt, belluae iamdudum ad peculiare animal Elephanto proxime analogum referendos esse docuerant, nullo plane modo hippopotameis comparabiles esse. Et equidem ita Hunteriana cura nitidisque iconibus illustratae sunt istae ignoti animalis reliquiae, vt superfluum foret molarium, qui ad meas manus pervenerunt, novam redordiri descriptionem. Quia vero, praeter vnicam Americae borealis paludem, paucaque minus certo indicata australioris Americae loca, et adhuc rariora per Europam exempla, nondum inventa huius belluae vestigia norim, inde vero nonnullis, praesertim Cel. *Pennant* (*b*), placuit suspicio, eandem inquilinum Americae interioris esse animal; non erit inutile saltem indicasse nostros in orientali limite Europae repertos, praesertim

(*b*) *Synopsis of quadrupeds* p. 91.

fertim quum fub conditionibus aliis, et in regione veris quoque elephantinis, imo Rhinocerotum etiam reliquiis (c) paffim memorabili, oblati fuerunt.

Ambo quidem imperfecti atque radicibus orbi, coronae quoque aliqua portione trunci, ad me pervenerunt. Ex illo tamen alterius fragmento, quod icone *Tabulae IX*[nae], *fig.* 2. defuper infpectum delineari curavi, quodque folum nunc fupereft et videtur mediam coronae, vtrinque praefractae partem conftituiffe, fi figuris Hunterianis comparetur, de identitate fpecifica horum molarium nemini dubium fore fpero. Equidem iuga transverfa quorum vnum (*a-b.*) integrum fupereft, argute dorfata, medio demiffiora, perque longitudinem fuam totam inaequali convalle excavata, quam vitrea fubftantia argute coronat, aliquantum a molaribus *Huntero* delineatis abludere videntur, id vero difcrimen ab aetate pendere poteft. Caeterum moles coronae, laterum conuexitates continua extus vitrea fubftantia corticatae, incifurae inter iuga argutae, ab altera parte profundiores, Hunterianis exactiffime conueniunt. Ad *litt. c.* figurae noftrae vitreae fubftantiae quafi gutta in interuallo iugorum diffluxit et obfoletum colliculum effecit, qui, vt et ipfa quoque iuga, adtritu dentium oppofitorum in vivo animali antiquatus atque laeuigatus eft. Molares ambo, de

(c) Fragmentum cranii Rhinocerotis ad rivum Tfchelna, inter oppidula Nouo- et Staro-Schefchminsk, habet in *Itinerario* ruffico *Rytfchkovius* iun. *Part.* I. *p.* 31. Molares elephantis in riuo Ufen ad fl. Ik tendente et in ftratis cupriferis ad Djomam *Id. Ibid.* *p.* 76. & 104. --- itidemque in cuprifodinis altioris iugi ad rivum Sfenfa Cel. *Lepechin itiner. Vol.* I *p.* 531. et ad Ufam denique fluvium *Itineris propr. Vol. II. p.* 9. vt alia nunc intacta relinquam.

de quibus mihi sermo est, reperti fuere in strato horizontali minerae ferreae arenoso-ochraceae induratae, quae ad riuum Schebysy, in inferiorem tractum Albi fluuii (*Bjelaja*), vbi is iam in clementiorem regionem versus Kamam descendit, ab occidentali parte influentem foditur: in regione occupata collibus stratificatis, argilloso-cotaceis, quales secundum occidentalem decliuitatem totius Uralensis iugi lata fascia calcaream marinam colluviem vbique contegunt, ossibus passim animalium exoticorum vastae molis, maxime vero lignis atque truncis arborum petrefactis, diluvianam originem indubie prodentes. Ambo in isto strato simul, simillimi, atque haud dubie ex eodem animali compares, simul varia admodum corrupta ossium fragmina reperta sunt, e quibus tantum vnicum arcuatum, sesquipollicaris fere diametri, zygomatis vel costae fractae simile, ad me relatum fuit. Eburneorum dentium an vlla indicia ibidem apparuerint, per inscitiam operariorum et ipsius, ad quem fodina pertinet, mercatoris exquiri haud potuit. Ipse enim molares non in loco natali, sed iam ab aliquo tempore effossos a possessore fodinae per emissarium accepi. Non autem calcinati sunt, sed adinstar ossium, quae in Gallia meridionali et Europa passim reliqua profundioribus in stratis reperiuntur, potius indurati atque mineralisati, substantia satis dura, vitreo cortice durissimo, fragiles extus (praeter corticem sordido albore et politura perfectissima conspicuum, nec quidquam linguae adhaerentem) fusco-subcoeruli, interius magis albidi, fuscis lineolis variegati, quo in loco linguae tenaciores sunt. Caeterum odore peculiari ossium mineralisatorum solemni, peramoeno fragrant, neque dubium fere est certo igne adhibito in Turchesias permutari posse, quas omnino crudas ad amussim referunt.

Po-

Potuiſſem hic ſcribendi finem facere, niſi quaedam contra Cel. *Hunterum*, elephantina oſſa Sibiriae noſtrae omnia iam ad ignotum illud animal Elephanto affine, cuius Americanas reliquias deſcripſit, referente eſſent monenda. Suſpicatur nempe Vir Celeberr. fore vt ſibirica oſſa mamontea dicta, quorum tanta et tam varia in Muſeo noſtro academico extat ſupellex, vt quotidie cum omnibus fere ſceleti elephantini recentis partibus coram comparari queant, omnia tandem Americanis ſuis ſimilia deprehendantur. Quumque ipſe ſibiricis pro inſtituenda comparatione careret, e *D'Aubentono*, ſibiricum et americanum femur ſimillima afferente, contra ſibiricorum oſſium cum veris elephantinis ſimilitudinem non ſatis iudicioſe concludit. Poſſumus tamen collatione ſpeciminum perfectiſſimorum nosmet ipſis et aliis probare oſſa noſtra mamontea, vti elephantinis ſimillima, ita tantundem ab americanis eorumque analogis dentibus et oſſibus foſſilibus diuerſa eſſe, ac ipſa ſunt Elephantorum recentium oſſa, quibuscum haec, *Hunteri* opera, comparata habemus. Femorum oſſa foſſilia Sibirica, licet craſſitie, ſecundum animalium aetatem, perquam varia (prout in Diſſertatione de oſſibus Sibiriae foſſilibus, *Nouor. Commentar. Petrop. Vol. XIII. p.* 474. expoſui) omnia tamen longitudinis proportione Americana oſſa ſuperant, iisdemque differentiis formae, quas *Hunterus* indicauit, ab ignotae illius belluae oſſibus abludunt. Et prouti crania foſſilia, quae nobis e Sibiria adlata ſunt integra, elephantinis veris in omni, vt ita dicam, puncto reſpondent: ita e contrario tantundem ab Americanis maxillis, *Huntero* delineatis, differunt maxillae foſſiles noſtrae, quarum plures iuniorum Elephantum, quaternis inſtructas molaribus, aeque ac ſeniorum cum binis molaribus maioribus, habemus. Quemadmodum et molares co-

copiosissime apud nos cum ossibus sic dictis mamonteis reperiundi, omnes elephantinis recentibus simillimi, tabulis parallelis alternae substantiae in massam varie oblongo compressam, supra detrito-planam conferruminatis compositi, plane nullo modo Americanis *Huntero* descriptis, vel apud nos raro exemplo detectis, quorum causam egi, sunt comparabiles, siue coronae conformationem et continuitatem seu radices spectes, in americanis dentibus multiplices, in elephantinis vix diuisas. Non ergo sufficeret *D'Aubentoni* assertum, qui tamen et ipse, os femoris canadense multo crassius breuiusque sibiricis, differte fassus est. Neque ebur fossile nostras quandoque adinstar Americani contortum (quale *Hunterus* inter Sloaneanos thesauros sub oculis habuit, a *I. Bell* e Sibiria relatum atque in *Actis Parisinis* 1727. *p.* 309. descriptum, et cui simile e nostro quoque Museo excitaui (*Diffent. citat. p.* 473.) quidquam probat, quum etiam in Africano ebore venali huius conformationis exempla obseruantur, et descripsit *Grew* in *Museo Regalis Societatis p.* 31. *Tab.* 4.

Pro certo igitur ab omnibus, qui hanc materiam tractabunt, accipi vellem: ossa mammontea nostratum, vbique per Russiam atque Sibiriam sparsa et iam effossa tanto passim numero,

Quem qui scire velit, Lybici velit aequoris idem

Discere quam multae Zephyris turbantur arenae,

omnia ne minimum quidem ab elephantinis differre, sed sine omni dubio pro Elephantorum in boreales terras inundatione violenta abreptorum, summisque simul subsidentibus terrae stratis immersorum reliquiis esse habenda; quod

quod et de plurimis per reliquam Europam repertis dentibus oſſibusque grandioribus ſatis conſtat. Eritque ſemper mirabile, quod alterius ignotae ſpeciei oſſa atque dentes, licet hi ſoliditate elephantinos etiam ſuperent, adeoque edaci temporis carici minus obnoxii fuiſſe videantur, tamen vbique multo rarius et in profundioribus plerumque ſtratis diluvianis, ſaltem in Europa, Aſiaque inveniri: ſiquidem diluviana ſtrata adpellare liceat illa, quae non ſunt tranquilli maris ſedimentum et marina colluvie teſtisque minus ſcatent.

Caeterum vti ſpecifica inter Elephantem vulgo notum, et incognitum illud animal, ad quod molares noſtri atque *Huntero* deſcriptae reliquiae referri debent, extra omne dubium poſita eſt differentia; ita contra ex harum comparatione facile elucet ſumma vtriusque animalis generica analogia. Quam ita ſolide, ſimul cum differentiis inter americanis et Hippopotami molares, expoſuit Celeberr. *Camper* in litteris, quae transmiſſam iconem comitabantur, vt non poſſum non ipſa Ill. Viri verba hic ſuperaddere:

„Ex comparatione horum dentium (Hippopotami et molarium a *Collinſono* atque *Huntero* delineatorum) „apparet (ſunt *Camperi* verba) toto coelo diverſorum „eſſe animalium, quicquid dicant Inl. *Buffonius*, *D'Aubentonus*, aliique. Superat canadenſis, tum latitudine, tum „altitudine, ad minimum bis Hippopotami molarem, et „quidem mole integra octies, quoniam ſolida ſunt ad ſe „invicem vt cubi harum dimenſionum. Canadenſis novem habet iuga non detrita; hippopotamicus dens coronam figuratam, ſed detritam. Fateor equidem iuniorum Hippopotamorum dentes molares anteriores eſſe acu-

„ minatos, ſed adeo parvos ſimul, vt vix tertiam partem
„ huius (delineati) efficiant. Verum non ſolitarium den-
„ tem, ſed in maxilla atque in proprio alveolo ſitum con-
„ templari oportet, vt tanti momenti quaeſtionem deci-
„ damus. Quam occaſionem nobis ſuppeditavit Celeb.
„ *Hunterus*, qui in eadem Tabula, ad eandem menſuram
„ maxillam Elephanti adulti exhibuit (*loc. cit. tab. IV.*
„ *pag.* 43.). Eas maxillas ſi inter ſe conferre libuerit,
„ videbis clariſſime ſtupendam habere ſimilitudinem, modo
„ dentium formas negligas. Maxilla animalis incogniti,
„ etiamſi mole ſuperet Elephanti adulti maxillam, tamen
„ iunioris videtur, quia dens anterior lapſus eſt: proba-
„ biliter enim etiam haec animantia adulta quatuor tan-
„ tum geſſerunt molares, quemadmodum Elephanti, qui
„ ſimiliter in iuventute octo poſſident. Si vero maxillas
„ inferiores Hippotamorum conferimus cum hac incogniti
„ animalis ab *Huntero* Fig. 1. 3. 5. 16. exhibita, luce
„ meridiana erit clarius diſſimile eſſe prorſus et quidem
„ adeo, vt congeneri animali tribui omnino nequeant.
„ Icon capitis Hippopotami ab Inluſtr. *Buffonio Tom. XII.*
„ *tab. VI.* propoſita, ſatis bene exarata eſt, vt ea vti et
„ differentiam ſummam demirari poſſimus (*d*). Taceo
„ dentium molarium numerum, qui in vtroque latere
„ vniuscuiusque maxillae ſenarius eſt, contra incognito
„ animali tantum binarius; adeo vt etiam hac in re mi-
„ nime inter ſe convenire queant. Mitto laniarios dentes,
„ primoresque adeo conſpicuos in Hippopotamo, et omnino
„ deficientes in hoc incognito, quemadmodum in Ele-
„ phanto. „

„ Ratio-

(*d*) Mihi fere praeferenda videtur, licet minus eleganter aeri inciſa Icon, qua cranium Hippopotami ſenioris expreſſit *Nehem. Grew* in *Muſ. regal. Societ. tab. I.*

„ Rationes praecipuas, ob quas non Hippopotami, „ ſed alicuius Elephanti dentes eſſe arbitror, me iam ita „ expoſuiſſe confido, vt nullum dubium amplius ſupereſſe „ poſſe mihi videatur. Mirari equidem non ſatis valeo, „ quam ob cauſſam carnivoro tribuerit animali hanc ma- „ xillam foſſilem canadenſem *Huuterus*? nullum enim novi „ carnivorum, quod dentes molares ita effictos habet. „ Compara Leonum, Tygridum, Vrſorum, Canum, Vul- „ pium caeterorumque molares, videbisque omnes eſſe acu- „ tos, etiamſi ramoſos. Maxillas ſuas in verticali tantum „ directione movent haec carnivora: incognitum animal, „ quia condylum habet inſtar Elephanti, alio modo. Adde „ quod idem laniariis careat, ſine quibus nullum carnivo- „ rum ſuam praedam retinere poſſet. Videtur tamen pro- „ babile incognitum hoc etiam eburneos exſertos dentes „ habuiſſe in maxilla ſuperiore, tanquam Elephas. Ope- „ rae pretium igitur foret, vt curatius crania tam Ele- „ phanti, quam incogniti inter ſe comparentur; probabile „ enim hucusque mihi videtur, promiſcue pro Elephan- „ tinis habita fuiſſe. Ardua etiam perſaepe eſt haec di- „ ſtinctio, praeſertim ſi praeconceptis indulgemus opinio- „ nibus, quemadmodum Inl *Buffonius* et *D'Aubentonus* in „ horum dentium deſcriptione (*Tom. XII.* imprimis ſub „ *No.* 1513.), vbi etiam *Collinſonii* ſuper hoc dente fi- „ gura, tanquam convenientiſſima citatur. „

„ Coniecturae meae pondus praeterea addere vide- „ tur haec conſideratio: quod *quoniam proboſcide gaudere* „ *debet incognitum neceſſario*, etiam idcirco, veluti Ele- „ phas, primoribus dentibus deſtituatur. Verum cur pro- „ ſcide inſtrui debeat neceſſario? interrogantes audio. Ob „ hanc, reſpondeo, cauſſam, quoniam ex maxillae infe- „ rioris mole dijudicare valemus, caput incogniti eſſe in- „ gens, elephantino adulto maius, adeoque perquam grave.

 Id

„ Id ſi probabile ſtatuamus, neceſſe eſt vt collum ſit per-
„ quam breve, quemadmodum in Elephanto, etiam vt
„ altitudo atque totius corporis moles ſit valde ingens;
„ quid ergo? vt proboſcide, tanquam longiore manu ſit
„ inſtructum! ſine qua, ſiue carnivorum fingatur, ſeu
„ phytivorum, alimentum capere omnino non poſſet.
„ Gaudere igitur debet proboſcide et deſtitui dentibus pri-
„ moribus. Si ad Dromadarios, Camelos, Equos, Oves,
„ Cervos et Boves animum advertimus, patebit, collum in
„ iis omnibus eſſe proportionatum altitudini ſpinae dorſi a
„ terra; ſed in his omnibus caput parvum et leve eſt.
„ Equi collum brevius collo Cameli, ſed et capus gravius.
„ Illud Bovis gravius quidem eſt equino capite, ſed et
„ collum brevius. Cameli caput omnium leviſſimum.
„ Elephanti caput, haud raro DC. vel DCCC. Libras
„ grave, requirebat igitur collum breviſſimum, reſpectu
„ altitudinis corporis, cum quo tamen pabulum adtingere
„ nequiviſſet, niſi induſtria et provida Natura longiori
„ proboſcide hunc defectum compenſaſſet. Quoniam igi-
„ tur omnis haec ratiocinatio etiam incognito animali ad-
„ plicari poteſt, et quoniam maxilla inferior apprime ele-
„ phantinae ſimilis eſt, iure ſummo ad idem genus referri
„ poſſe opinor. Molares dentes, fateor coronis ſuis di-
„ verſos eſſe ab elephantinis; verum inde quidem ſpecifica,
„ ſed generica differentia peti nequaquam poteſt. In ae-
„ thiopico Apro molares fere elephantini dantur quatuor,
„ in noſtrate viginti, in Americano cyſtifero viginti qua-
„ tuor, in Babyrouſſa viginti; ob quam ſolam differen-
„ tiam tamen nemo novam hanc Africae beſtiam ad di-
„ verſum genus referre vellet. „ Haec Celeb. *Camperus*;
e quibus novo argumento diſcimus, quantum lucis et in-
crementi Anatome comparata a Summi Viri laborioſo otio
expectare ſibi debeat.

OBSER-

OBSERVATIONES
CIRCA MYRMECOPHAGAM AFRICANAM ET DIDELPHIDIS NOVAM SPECIEM ORIENTALEM; E LITTERIS CELEBERR. *PETRI CAMPER* EXCERPTAE ET ILLVSTRATAE

a

P. S. PALLAS.

Primus ante tredecim annos, in *Miſcellaneis Zoologicis* Hagae-comitum editis, contra Ill. *Buffonii* opinionem, qua Myrmecophagae atque Didelphidum genus extra Americanum orbem nuſquam dari aſſerebatur, ſurrexi et Myrmecophagam, ab Americanis quidem omnibus diverſam, in Africa verſus Promontorium bonae ſpei, Didelphidum vero duas ſpecies, alteram Opoſſo americano ſimillimam, adeoque antiquo novoque orbi vere communem, alteram Indiae peculiarem, in inſulis Moluccanis inquilinas eſſe, indeque crebro Belgii curioſis transmitti, docui (*a*). Eadem deinde repetiit *Arn. Voſmaer* (*b*), et ſententiam meam confirmarunt Cel. et Amiciſſ. Viri *Pennant* (*c*), *Schreber* (*d*) et *Zimmermann* (*e*), qui etiam collecta plura

(*a*) *Miſcellan. Zool. p.* 59. ſeq.
(*b*) *Voſmaer Beſchryv. van een ooſtind. Inkhoorn* cet.
(*c*) *Synopſis of quadrupeds p.* 206. 333.
(*d*) *Säugthiere* Tom *II. p.* 207. *et* Tom. *III. p.* 539. 550. ſeq.
(*e*) *Zoologiae geograph. p.* 338.

ra itineratorum teſtimonia *Buffonio* oppoſuerunt, et Bradypum quoque didactylum Indiae orientali et forte Guineae cum America communem eſſe, contra *Buffonium* aſſeruerunt (*f*). Praeterquam quod inſuper nova Didelphidis ſpecies ab Illuſtri itineratore *Ioſ. Banks* in Nova Zeelandia antarctici haemiſphaerii detecta et in Itinerario opera *Hawkeswortbi* edito inſerta fuit. Immo ipſe tandem Ill. *Buffon* in *Supplementorum* Operis ſui *Vol. III. p.* 268. iam fatetur, ſe Didelphidum in India orientali exiſtentiam haud negare, quae etiam loco quodam *Mandelſloi* confirmetur; ſed ſpecies tamen nullas Indiae cum America eſſe communes et africanam quoque Myrmecophagam ab omnibus Americanis ſpecie differre (*ib. p.* 283.) diſputat; quod ipſum tamen prius haud videbatur diſerte conceſſiſſe.

Myrmecophagae capenſis equidem nonniſi foetum in Miſcellaneis *cit.* deſcripſeram, cuius autem tota forma externa Americanas eiusdem generis ſpecies ita referebat, vt de internis quoque characteribus vix dubitandi locus eſſe videretur. Verum enim vero Ill. *Camper* in litteris ad me datis, quas Academiae obtuli, patefecit novam in hac afra Myrmecophaga Naturae multiformis exceptionem, quae ſtrictas methodicorum regulas eludit et non a priori, ſed ex obſervatione, non ad logicas praeconceptas regulas, ſed ad Naturae nutum leges Syſtematum in Scientia naturali concipiendas eſſe docet. *Myrmecophaga africana*, quae toto corporis habitu, oris pedumque externa forma, lingua tereti emiſſili, externos characteres generis exacte refert, tamen non eſt *edentula*, vt Americanae ſpecies

---

(*f*) *Pennant* l. c. *p.* 321. *Schreber* l. c. Tom. *II. p.* 200. *Zimmermann* l. c. *p.* 337.

cies omnes; ſed habet in intimo ore, ab extremis maxillarum remotos, molares, fere Daſypodum inſtar. Sic inter Apros, ſoli aethiopico deſunt dentes primores; ſic Didelphidum, Veſpertilionum, Soricum et Talparum genera, naturalibus characteribus coniunctiſſima, dentibus, praeſertim quoad numerum, inconſtantiſſima ſunt; vnde hos fidos, ſine omni exceptione, generum ordinumve characteres, ſaltem numero et proportione praebere non poſſe ſatis liquet. Non enim methodicorum ſcholis ſe adſtringere voluit Natura, ſed quamlibet Generis formam ſpecificis, vario vitae generi accommodatis, variare, ſyſtemata artificialia noſtra flocci faciens. Sic Sorices atque Didelphides alias magis ferinis, alias glirium aemulis dentibus inſtruxit, quod iſtas magis carnivoras eſſe, has phytivoras, cibum rodendo comminuere conveniebat. Sic pariter Myrmecophaga africana, quae, vt Ill. *Camper* me docet, non ſolis, vt americanae, formicis, ſed radicibus quoque ex parte vivere deſtinata fuit, molaribus, ad comminuendum vegetabilem victum, indiguit.

Camperiana manu delineatam naturali magnitudine iconem cranii Myrmecophagae afrae *Tab. IX.* figurae priores exprimunt, quarum elucidationem ipſis Cel. Viri verbis, ex eius litteris d. 20. April. 1777. datis excerptam audiamus.

Figurae naturalem magnitudinem cranii animalis Promontorio bonae ſpei transmiſſi curate menſuratam exhibent. *Prima* repraeſentat ipſum cranium integrum, a parte dextra; *ſecunda* maxillam inferiorem. *Tertia* dentem molarem ſiniſtrum, ordine ſecundum e maxilla inferiore depingit, eiusque tres facies.

In Figura prima.

A A A A A. Os frontis ſignificat, *B B B B.* os temporis cum proceſſu zygomatico *B B, K A.* ad cuius radicem, ſupra *E.* in *B*, ſinus eſt pro excipiendo capitulo maxillae inferioris *T T.*

C C C. Os occipitis.

D A A, D B B. Os bregmatis dextrum, quod cum ſiniſtro oblitterata ſutura ſagittali vnicum os efformat.

E B, E A, E E. Os multiforme, cum proceſſu pterygoideo *G.* qui ſemper fere in quadrupedibus ſeparatum os format et tanquam complementum eſt oſſis palati *F F F.*

H H. Annulus pro excipienda membrana tympani, quod in aliis quoque animalibus adultis ſeparatum inveni.

I I. Os vnguis, in quo P. oſtium canalis naſalis.

K K I P I L. Os iugale *I K L I A L L.* Os maxillare ſuperius maius, *mala* Galeno vocatum.

L L M M. Eius complementum ſeu pars anterior, hic ſine dentibus.

N N M L. Os naſale. P. Canalis naſalis.

K - E. Foramen opticum; *O.* lacerum;

R. pro transmittendo ſecundo ramo quinti paris.

S. Foramen quod nervorum par nonum emittit;

T. infra orbitale; *L K.* palatinum.

I - T. Sex molares dentes lateris ſiniſtri, quibus ſex in oppoſito reſpondent. *Molares* hos voco etiamſi radices ſimplices habeant, quoniam os maxillare maius occupant, et minus ſ. complementum L. M. dentibus omnino caret. Omnes ſunt cylindracei, cum vnica radice; intermedii tanquam ex binis vnitis conſtant.

Figura

Figura altera.

Inferioris maxillae *T T.* condyli, articulis inservientes, *V.* processus conoïdeus, *W.* hamulus cui biventer inseritur ad maxillam commodius aperiendam. Os illud valde tenue est, praeprimis inter *V. X.* et *W.* intumescit vero insigniter inter *X.* et *Z.* vt molares admittat. Gracilescit maxilla deinceps et cum osse oppositi lateris tanquam canalem format ad linguam excipiendam.

In maxilla inferiore XII. dentes itidem reperiuntur, quorum IV. posteriores valde magni, sextus vix conspicuus est. In antica parte inter *T.* et *V.* conspiciuntur tanquam alveolorum vestigia quaedam, quae gingivae firmandae solummodo inservierunt. Idem monstravi in maxilla inferiore Rhinocerotis (*Tab. VIII. fig. 2. s. t.*).

Figura tertia.

Repraesentat dentem penultimum 2. lateris dextri maxillae inferioris, exactissime mensuratum:

a b c d. Dentis integri cathagraphum; *a b*, coronam, *c d.* radicem.

a b e f. Coronam integram visui offert;

d c g h. radicis basin obtusam, millenis foraminulis pertusam, quae ostia sunt cylindricorum canalium, quos nervi ingrediuntur. Constant igitur hi dentes ex fibris parallelis, canaliculos formantibus vsque ad coronae superficiem; quae tamen integra est, sed nulla crusta adamantina tecta. Gaudet itaque dentibus molaribus Myrmecophaga africana et quidem

 viginti

viginti quatuor, inter quos ſedecim valde inſignes, quos mireris *Kolbii* induſtriam effugiſſe. (*Haec Camperus*).

* * *

Didelphidem in orientali India praeſertim illam tantum indigenam eſſe reputaveram, quae ab Ill. *Buffonio* ſub nomine *Phalanger* in XIII^mo^ *Vol.* operis pro ſurinamenſi perperam deſcripta fuerat, praeterque illam, peculiarem orientis, tantummodo Didelphidis Opoſſum varietatem in Moluccanis inſulis occurrere docueram, Americano animali, praeter colorem dilutiorem, ſimillimam. Non erat tunc, quum haec in *Miſcellaneis* aſſerui, ob oculos Iter indicum *Cornelii de Bruyn*, (*g*) in quo ſingularis alia Didelphidis ſpecies, *Philandri* nomine, delineatur, cuius ille Bataviae in vivario plura ſpecimina viderat, quamque pingit vulpino, anguſto capite, faſcia fuſca per oculos, auriculis erectis, ventris marſupio magno, completo, cauda trunco breviore, craſſa, nuda, artubus poſticis maioribus et carnoſioribus, plantis tridactylis, vnico digito quaſi duplicato, biungui. Hanc poſtea ſpeciem Celeberr. *Schreber* egregio ſuo Operi (*Tom. III. p.* 551. *tab.* 153.), nomine Did. Philandri, tanquam diſtinctam ſpeciem inſerere haud dubitavit. Nullo tamen hucusque alio, quam *De Bruynii*, pictoris equidem egregii, ſed in hiſtoria naturali rudis, teſtimonio innitebatur iſta ſpecies, poteratque pro vitiata icone Didelphidis orientalis (*Phalanger*) haberi illa, quam *De Bruynio* debemus; quod etiam Cel. *Pennant* viſum fuit. In aliis animalium picturis

(*g*) *Reize over Moſcovie door Perſien en Indien p.* 374. *tab. n.* 213.

ris praeſtitam a *Te Bruynio* fidem nunc, etiam quoad Philandrum iſtum, confirmant, quae ex ſceleto huius animalis, in ſuo genere paulo magis adhuc, quam Did. orientalis, anomali, e Iava inſula a Dn. *van der Steeg* Bataviae medico transmiſſo, in litteris me docuit Celeberr. *Camper*.

Icones cranii et plantae, ab Ill. Viro accuratiſſime delineatas, ecce in *Tabula IX. fig.* 4. *et* 5; quibus Cel. *Camper* ſequentia pro illuſtratione adiecit.

Didelphis aſiatica (*Philander*) in maxilla ſuperiore, *fig.* 4. ad naturalem magnitudinem ducta, dentibus primoribus vtrinque tribus A — C. gaudet, tertio inciſo in C. — quinque molaribus Γ Δ. laniariis vero nullis. In inferiore maxilla duobus tantum inciſoriis, haſtatis, marginibus exterioribus latis, acutis *A B*. Differt igitur ea ratione valdequam ab Americanis ſpeciebus; etiam *pedibus*, quorum anteriores in hac noſtra orientali ſpecie valde breves et pentadactyli ſunt; *poſteriores* vero (*Fig.* 5.) longi, robuſti, duobus exterioribus digitis *Q.* et *L.* longis, valentibus; internis *T W X. T Y Z.* extenuatis, exilibus, arcte inter ſe vnitis, pollice nullo, quum et manus et plantae quinque digitis gaudeant in omnibus americanis. Diverſae etiam ſunt colli vertebrae, quarum ſpinae omnes exiguae ſunt in Did. aſiatica, *licet numerus dorſalium, lumbarium et ſacri vertebrarum, coſtarumque diſpoſitio in Did. Opoſſum et aſiatica conveniant.*

Vt pedum poſticorum ſingularis diſpoſitio melius intelligatur addit Cel. *Camper* explicationem partium: *D F.* itaque indicant calcaneum; E. talum; *F.* naviculare; *G F T.* os cuneiforme tertium, *T.* medium, *R.* maius;

G. H.

G H. os metatarsi digiti annularis in hoc animali maximi, *H I.* primum, *I K.* secundum, *K L.* tertium officulum cum vngue. *M N.* Os metatarsi digiti minimi; *N O.* primum; *O P.* alterum, *P Q.* tertium officulum cum vngue. *TVWX.* Digiti medii ossa, atque *T, A A, Z Y X.* illa indicis tum metatarsi, tum digitorum: hi arcte vniti tanquam vnicum formant digitum, duobus vnguiculis ad *X.* instructum. Deficit autem pollex, quemadmodum in multis aliis animalibus, superstite ossis metatarsi quadam velut imagine *S.* quale in canibus, felibus, mustelis et muribus *Galenus* (*Adm. anat. lib.* 6. *c.* 1. *cl.* 1.) pollicis delineamentum seu 'υπογραφην vocat, cuique tendo perinaei longi inseritur.

Mensurae quaedam Did. asiaticae cum D. opossum apud *D'aubentonum* comparandae sic se habent ad mens. Paris.

Capitis longitudo	3''.	9'''.	Longit. off. humeri	2''.	6'''.
Dentium *A B. fig.* 4.	0.	7.	—— —— — vlnae	3.	6.
Colli —— —— ——	2.	0.	—— —— — manus	1.	10.
Thoracis - - -	5.	6.	—— off. femoris	5.	0.
Lumborum - - -	4.	9.	—— cruris - -	7.	4.
Altitudo off. Ilium.	5.	0.	—— pedis *fig.* 5. *DL.*	5.	4.
Longit. off. marsupii	2.	2.	—— dig. maximi *HL.*	1.	11.
—— — caudae - -	15.	0.			

Habemus igitur confirmatam novam speciem Didelphidis orientalis, quae *dentium inciforum* inferiorum magnitudine, forma et numero solam inter Didelphides illam speciem refert, cui nomen *Phalangistae* indidit Buffonius, etiam plantarum digito e duobus connato similem. Reliquae omnes Didelphides tota dentium inciforum constitutione, quos supra 10. infra 8. habent, dein caninorum, istis

iſtis deficientium, praeſentia, maiorique numero molarium differunt. A Phalangiſta autem ſ. Did. orientali, differt nova haec Did. *Philander*, defectu plenario pollicis in plantis, digitique vnius longitudine et craſſitie, vt et artuum poſticorum tota proportione; dein inciſorum ſupra minore numero; vt alia relinquam. Liquet autem e Camperiani ſpeciminis menſuris, quod in animalibus a *De Bruynio* delineatis cauda praeter naturam truncata fuerit, nimis in icone data brevis. Et haec de nova illa ſpecie ſufficiant, donec pleniora doceat dies.

DE-

DESCRIPTION
DU BUFLE À QUEUE DE CHEVAL, PRÉCÉDÉE D'OBSERVATIONS GÉNÉRALES SUR LES ESPÉCES SAUVAGES DU GROS BETAIL;

par

P. S. PALLAS.

Rien n'est plus judicieux que la réduction que Mr. le *Comte de Buffon* a fait dans le genre d'animaux, qui comprend le Taureau & le Bufle, en réduisant à leur juste valeur ce nombre d'espéces vagues ou plûtot nulles, établies par les Compilateurs sur de simples differences de nom ou des varietés accidentelles, & adoptées aprés par la plûpart des auteurs modernes qui ont voulu donner des systèmes ou des corps complets de Zoologie. Rien de plus clair par exemple, que d'expliquer d'aprés *Gesner* le Bonasus d'*Aristote*, qu'*Elien* repéte sous le nom de Monops, par les Taureaux sauvages de Péonie, qui sont exactement le même animal, que *Jules-César* décrivit sous le nom Germain d'Ur-us. — Cette espéce, jadis bien plus nombreuse & plus repandue en Europe, qu'elle ne l'est dépuis que cette partie du monde se trouve foulée par une population étrangere de hordes asiatiques qui sont venûes s'y établir, n'existe plus aujourd'hui que dans les vastes forets de la Lithuanie, dans quelques parties des monts Crapacs & peut-être dans le Caucase. Elle cherche un climat temperé & semble n'avoir jamais frequenté le Nord de l'Europe, & de l'Asie: ou il serait impossible qu'elle

qu'elle eut été entierement détruite dans cette vaste étendue de forêts qui couvrent toute la partie boréale de l'Empire Russe jusqu'à la Sibérie orientale, ou certainement la population n'a jamais suffi pour l'exterminer.

J'ignore les raisons, qui ont pù determiner Mr. le C. *de Buffon* à adopter deux varietés dans la race du Taureau sauvage d'Europe: l'Urus & le Bison. Il me semble que ces pretendues varietés ne sont pas plus réelles que les espéces des nomenclateurs, que ce Naturaliste celebre a eu raison d'anéantir; elles n'ont, selon moi, de fondement que deux noms appliquables au même animal dans la langue dont ils sont tirés. L'odeur musquée, que l'on trouve aux mâles de l'Urus & que les Allemands expriment par le mot de *Bisem*, à sans doute produit le mot de Bison dans les langues étrangères: or cette odeur ne semble être bien sensible que dans les taureaux sauvages d'un age avancé, surtout au temps du rut; ce n'est aussi que l'age qui produit ce pélage herissé sur les parties anterieures des Taureaux sauvages, & qui les rends plus bossus & plus robustes de l'avant-train; ainsi les noms *Urus* & *Bison* auront originairement designé, non pas deux varietes de l'espece, mais l'état different du même animal selon l'age & le sexe. Le Baron *de Herberstein* a bien indiqué deux raçes distinctes de bêtes à cornes sauvages en Lithuanie, mais il est plus que probable, que celle, qu'il indique sous le nom de Thour, & qui est sans bosse, n'était qu'une raçe introduite de Bufles devenus farouches. Je suis trés-persuadé qu'aucun des veritables Taureaux dans l'état sauvage qu'il a designé par le mot de *Soubr* n'acquiert plus de bosse, que la hauteur des épines dorsales ne lui en donne naturellement. Cette loupe de graisse au contraire, qui caracterise le bétail domestique de Perse, de l'Inde & d'autres contrées méridionales, & qu'on ne re-

trouvera certainement dans aucun individû de la race sauvage, n'est qu'une congestion de cette matiére produite dans l'état de domesticité par la même raison, qui détermine ordinairement la surabondance de graisse vers la croupe & les reins des brebis & vers l'omentum dans les hommes. Ce n'est pas un effet de l'esclavage tel, que Mr. le C. de *Buffon* voudrait le faire entendre; les brebis à bosse de Perse ne les ont surement pas acquises par le travail, ni en portant des fardeaux: c'est la suite d'une nourriture surabondante dans un état de domesticité paisible & de la faiblesse causee par l'education & le climat. Bien moins encore les bosses & les callosités du Chameau & du Dromadaire peuvent-elles étre derivées de l'état de servitude que ces animaux ont subi; elles appartiennent à leur conformation naturelle, aussi bien que les callosités des singes, les chataignes du cheval, les brosses des Gazelles, & même l'épiderme, plus épaisse deja dans le foetus humain, à la plante des pieds & au creux des mains, que sur le reste du corps.

D'un autre coté je suis tout à fait du sentiment de Mr. le C. *de Buffon*, que le Bison ou Taureau sauvage ordinaire de l'Amerique septentrionale pourrait étre consideré comme une varieté de l'Urus d'Europe, changée par le climat. Par toute la Sibérie on ne trouve ni l'un, ni l'autre sauvage; aucune trace, pas même des cranes fossiles de ces animaux, pour faire soupçonner que leur race eut autrefois existé quelque part dans cette partie de l'Asie. Ce n'est donc point avec les Elans, les Rennes, le Loup, le Renard, l'Isatis, le Lievre blanc, la Zibeline, l'Ermine & d'autres animaux du Nord, que le Taureau sauvage a pû passer de l'ancien au nouveau Monde, sur les détroits glacés entre la pointe orientale de l'Asie & l'Amerique. D'ailleurs comme la race sauvage etoit, deja lors

lors de la déconverte de l'Amerique, infiniment plus nombreuſe & plus répandue dans ce continent, qu'elle ne l'a jamais été en Europe; & qu'en Aſie elle n'a pas même pénetré auſſi avant que certains autres animaux communs à l'Amerique & l'Europe, mais étrangers de même à la Sibérie, comme la petite Loutre (*Lutreola Lin.*) & la Marte: L'on pourrait ſuppoſer avec quelque vraiſemblance que l'Amerique était la patrie primitive du Taureau ſauvage, d'ou il peut avoir paſſé en Europe dans un temps, ou ce continent était peut-étre trés-voiſin de l'autre par une continuation de terres élevées & depuis ſubmergées par les effets de feux ſouterreins, dont les Isles Hébrides, les Orcades, les Isles de Faröe & l'Islande ſemblent nous indiquer les traces. D'aprés cette ſuppoſition le Biſon d'Amerique ſeroit la race originale de l'eſpéce; & l'Urus d'Europe, changé par le climat de ſa nouvelle patrie, aurait acqui un poil plus rude au lieu de la laine du prémier, & une taille encore plus gigantesque.

Qu'il me ſoit permis de faire ici la comparaiſon de ces deux animaux, qui manque encore à la Zoologie auſſi bien, que les détails que je puis donner de l'Urus d'aprés une déſcription fort exacte, faite en 1739. par Mr. *Wilde* alors Anatomiſte de nôtre Académie, & dépoſée dans nos archives. J'ais vû le même *Biſon d'Amerique*, dont Mr. *de Buffon* a donné la figure (pas tout à fait exacte) dans le IIIme Volume des *Supplements à l'hiſtoire naturelle des animaux p 57. pl. V.* & qui a été conduit en ſpectacle par la plûpart des villes de Hollande, d'Allemagne & de France. Je n'ai presque rien trouvé dans la forme de cet animal, qui put le diſtinguer conſiderablement des bonnes figures de l'Urus que nous avons dans les ouvrages de *Ridinger* & dans les gravures de la mé-

 nage-

nagerie du *Prince Eugene* à Vienne. Si l'on eut pû prendre des mésures exactes de cet animal, ce qui n'est guere possible sur un sujet en vie, quoique moin feroce en effet, que son air ne l'annonçait, je crois pourtant qu'on lui trouverait la tête & la queue proportionellement plus courtes, le dos plus élevé à l'endroit des épaules, & la croupe plus faible & plus retrécie. Mais le coup d'oeil est trompeur, & sans mesures les comparaisons sont trop incertaines. La difference du poil est bien plus considerable & plus frapante: toute la tête, le col, & l'avant-train jusqu'au delà des épaules etaient couverts d'une laine crepue extrémement douce & toufue, élastique & presque noire, avec une légere teinte de brun. Cette laine etait plus haute sur le sommet de la tête, qu'elle couvrait d'une espéce de bonnet, donc les seules pointes des cornes sortaient; sous la gorge, ou elle était pendante en guise de barbe; & au dessus des épaules, qu'elle rélevait de beaucoup, en augmentant cet air de bosse que l'animal acquiert par la hauteur des epines dorsales. Le poil de tout le reste du tronc & de l'arriere-train était au contraire extremement ras, lisse, fin & luisant, tel que le plus beau cheval ne saurait le surpasser, & d'un noir lustré parfait. On peut se former une idée de sa grandeur par les mésures approchantes qu'on en trouve publiées.

L'Urus de Prusse & de Lithuanie est, selon la description que j'ai sous les yeux (*a*), d'une taille qui sem-

---

(*a*) Cette description, externe & anatomique, a été faite sur un vieu Taureau sauvage de la plus forte taille, & sur plusieurs Vaches, qui périrent avec tous les Urus envoyés à Petersbourg par le Roy de Prusse, d'une espéce de contagion au mois d'Octobre & de Novembre 1739.

ſemble égaler celle du Rhinoceros & qui ſurpaſſe le Bufle domeſtique. Sa longueur depuis le bout du muſeau jusqu'à l'anus était, dans le mâle qui ſervit à cette déſcription, de dix pieds, trois pouces méſure d'Angleterre. Le train de devant était haut de ſix pieds, & celui de derriére l'egalait à cauſe de la plus grande hauteur des jambes poſterieures, quoique le tronc allat en diminuant vers la croupe. La tete etait longue de deux pieds, 6 pouces jusqu'à la nuque, ſa plus grande circonference de plus de 5 pieds; la hauteur perpendiculaire du thorax de 3'. 10''. de la partie poſterieure du corps, à l'entredeux des cuiſſes, de 2'. 8''. La largeur du muſeau de 8''. de l'entredeux des yeux 1'. 6''. la diſtance entre les cornes d'un pied, leur circonference à la baſe 1'. 1''. leur longueur d'un pied; celle des ſabots d'un demi pied, les ergots de 3 pouces touchans à terre; le tronçon de la queue de 2 pieds, & le bouquet qui le termine 1'. 4''. ---- Une des vaches avoit ſept pieds de long, ſur 4'. 9''. de hauteur, & le diamètre perpendiculaire de ſon thorax etait de 2'. 8''. — Tout l'avant - train du corps jusqu'aux épaules etait heriſſé de longs poils de la hauteur d'un pied & au delà, doux & laineux prés de la peaux, mais durs & groſſiers à l'exterieur. Cette partie dure était brune, mais le laineux du poil d'une couleur griſâtre. Le poil du ſommet de la téte griſaillait d'age dans le mâle. Sous la gorge & jusqu'au poitrail le crin formait une barbe pendante de plus d'un pied de long. La tête n'avait que le muſeau & le tour des orbites ras & découvert; tout le tronc depuis les épaules & les quatre jambes étaient garnies d'un poil fort court & liſſe, d'un brun noirâtre. Le crin du devant était plus court aux vaches, & tout le corps moins robuſte & la tête moin groſſe; la barbe ſous le col avait

 pour-

pourtant plus de neuf pouces & ſemblait d'autant plus conſiderable, que le reſte de l'avant était moins heriſſé. A l'une de ces vaches on trouva la veſicule du fiel double, mais contenue dans une enveloppe commune du peritoine, avec quatre conduits hepati-cyſtiques; la veſicule gauche avait pourtant moin d'etendue & s'uniſſait à l'autre par ſon col. — La longueur des inteſtins du mâle fut trouvée de 158 pied, dont le duodenum d'environ 3'. le Jejunum de 34'. l'Ileum de 80'. le coecum 1'. 5''. le colon fort rétréçi & incruſté de graiſſe de 38'. & le rectum de 2'. Toute la ſtructure interieure ne differait point de celle du taureau domeſtique; la verge du mâle avait deux aulnes ou 4'. 8''. de long.

Le Biſon d'Amérique différe donc ſurtout par ſa laine, utile à toute ſorte d'emplois, qui s'étend plus avant ſur le tronc; & par la croupe plus baſſe & plus fine. Il répond exactement à la déſcription du Boeuf ſauvage de Canada, que le P. *Charlevoix* (*b*) nous a donnée; & à ce que d'autres voyageurs en ont dit (*c*). Si celui, qu'on a vû en Europe n'égalait pas tout à fait la taille de l'Urus, c'etait peut-être parce qu'etant pris jeune, il n'avait pas acquis tout l'accroiſſement, dont ſa race eſt ſuſceptible, dans cet état de captivité ou on l'elevait. Toujours c'était

(*b*) *Charlevoix hiſtoire de la Nouvelle France Vol III. p. 131.*

(*c*) *Dumont mem. ſur la Louiſiane p. 75. Du Praz hiſt. de la Louiſiane Tom. II p. 166. I. Brickell natural hiſtory of North carolina p. 107. Hennepin* le prémier qui ait écrit ſur la Louiſiane, a donné la prémiere figure du Biſon d'Amerique, laquelle, toute mauvaiſe qu'elle eſt, ſe trouve repetée dans le *Muſ. Muſeorum* de *Valentinus* (*edit allem. Vol. II. p. 134.*) Celle de *Catesby* n'eſt pas bien parfaite.

c'était un animal d'une grandeur & d'une force ſi rèmarquable, que Monſ. *de Buffon* & Mr. *Paauw* ne devraient pas le citer parmi leurs preuves de la faibleſſe des productions naturelles du nouveau monde, qu'ils auront auſſi, bien de la peine à accorder avec la taille prodigieuſe des Elans & des Rennes de l'Amerique ſeptentrionale, laquelle ſe confirme de plus en plus.

Que l'on poſe, avec Mr. le *C. de Buffon*, ces Taureaux ſauvages du Canada, comme n'etans qu'une variété de *l'Urus* d'Europe; ou bien que l'on conſidére ces *Biſons* comme eſpéce diſtincte, ce qu'une déſcription externe & anatomique, ſoigneuſement comparée, des deux animaux pourra un jour nous apprendre: il eſt toujours certain que leur reſſemblance eſt trés grande & que ces deux animaux ont bien plus d'affinité entre eux, que n'en a le Bufle avec nôtre Taureau domeſtique. Il n'eſt donc point du tout étonnant, que l'animal d'Amerique apprivoiſé ait produit avec le bétail qu'on y a transporté d'Europe, comme les experiences raportées par *Kalm* & par Mr. *de Buffon* en font foi. Celà ſeul ne ſuffirait pourtant point pour prouver, que ces animaux fuſſent abſolument de la même eſpéce avec l'Urus & le bétail d'Europe qui en derive, ſi les grandes reſſemblances des formes ne venaient à l'appui de cette opinion. Car il eſt certain que le Bufle, dont l'eſpéce eſt indubitablement trés-diſtincte du Taureau, peut néanmoins produire avec la Vache domeſtique (*d*). Et peut-étre bien d'autres experiences de ce genre,

(*d*) Outre les experiences faites dans le Brandenbourg par les ſoins de Mr. le Preſident *de Benekendorf*, qui ont été annoncées dans les Journaux & Gazettes & à la ſuite d'une petite brochure allemande,

genre, reputées impossibles (comme l'etait aussi pendant longtemps, du moin selon Mr. le C. *de Buffon*, le mélange du chien & du loup), réussiraient-elles, si beaucoup de personnes entendues & curiéuses étaient à même d'en faire, ou si les Grands & les Riches voulussent souvent s'y interesser. Il me semble même qu'il ne faudrait pas toujours, pour que ces accouplemens disparates eussent du succès, que les animaux destinés aux experiences fussent élevés ensemble; mais il faudrait observer exactement le temps de la chaleur, surtout des femelles, qui est toujours fixe pour des animaux sauvages, même lorsqu'on les éleve en captivité. Il est d'ailleurs certain, que sans donner autant de liberté, qu'il est possible d'en accorder, à l'animal choisi sauvage, & sans l'avoir rendu familier à l'homme, pour qu'il sente, le moins qu'il se peut, sa contrainte, on ne parviendra que rarement au but.

Plus le Bison d'Amerique semble voisin de l'espéce de l'Urus d'Europe, plus il differe d'une autre espece de bête à corne toute particuliére à l'Amerique & trés-

di-

qui a pour titre: *Thyms Nutzbarkeit fremder Thiere, Bäume und andrer Gewächse*, à Berlin 1774. 8. --- ce fait est confirmé par plusieurs exemples de vaches fécondées par des Bufles, qu'on a vû à Astracan Mr. *Hablizl*, Correspondant de l'Academie dans cette ville, vient de m'en annoncer un dans ses Lettres, qui y est arrivé tout récemment. Mais le veau mulet produit par la vache est venu mort, & on est generalement d'opinion à Astracan, que ces mulets ne survivent pas & que trés-souvent les vaches même périssent des suites d'une telle portée; ce qui n'est pas étonnant, vû la disproportion des Bufles par raport à la taille des vaches, puisque l'on voit arriver quelquefois de tels accidents à des vaches couvertes par des taureaux de leur espéce, mais de trés-grande race.

diſtincte de toutes les varietés du Taureau & du Bufle. C'eſt le même animal dont le P. *Charlevoix*, à la ſuite de la deſcription qu'il a donné du Biſon d'Amerique, parle ſous le nom de *Boeuf muſqué*, d'aprés le raport du Gouverneur *Jéremie*, & ſur lequel aucun autre voyageur n'à donné autant de details que lui (*e*). J'ai crû devoir rapor-

(*e*) *Charlevoix hiſtoire de la nouvelle France Tom III. p. 131.* „Le Boeuf du Canada (c'eſt du Biſon qu'il eſt queſtion) eſt „plus grand que le nôtre. Il a les cornes baſſes, noires & cour-„tes, une grande barbe de crins ſur le muſeau & autant ſur la „téte d'ou elle lui tombe ſur les yeux, ce qui lui donne un air „hideux. Il a ſur le dos une boſſe qui commence ſur les han-„ches & va en augmentant juſque ſur les épaules. La prémiere „côte de devant eſt plus haute d'une coudée que les autres au-„deſſus du dos, & large de trois doigts, & toute la boſſe eſt „couverte d'un poil un peu rouſſâtre & fort long; le reſte du „corps l'eſt d'une laine noire, qui eſt fort-eſtimée: on aſſure que „la dépouille d'un boeuf eſt de huit livres de laine. Cet animal „a le poitrail fort large, la croupe aſſez fine, la queue fort „courte, & on ne lui voit preſque point de cou; mais ſa tête „eſt plus groſſe que celle des nôtres. Il ſuit ordinairement dés „qu'il appercoit quelqu'un & il ne faut qu'un chien, pour faire „prendre le galop à un troupeau entier. Il a l'odorat fin & pour „l'aprocher, ſans qu'il s'en apperçoive, d'aſſez prés pour le tirer, „il faut prendre le deſſous du vent. Mais quand il eſt bleſſé il „devient furieux. — On trouve aux environs de la baye de Hudſon „*un autre Boeuf*, dont le cuir & la laine ont les mêmes avanta-„ges. — Voici ce qu'en dit Mr. *Jéremie*: Entre la Riviére da-„noiſe & celle du Loup marin il y a une eſpéce de boeufs, que „nous nommons *Boeufs muſqués*, à cauſe qu'ils ſentent ſi fort „le muſc, que dans certaines ſaiſons il eſt impoſſible d'en man-„ger. Ces animaux ont de trés-belle laine, elle eſt plus lon-„gue que celle des moutons de barbarie. j'en ai fait des bas plus „beaux que de ſoye. Ces Boeufs, quoique plus petits que les „nôtres, ont cépendant les cornes beaucoup plus groſſes & plus „longues. Leurs racines ſe joignent ſur le haut de la tête & de-

raporter en notte le passage de *Charlevoix*, d'autant plus que Mr. de *Buffon* n'en cite que la derniére partie, qui se raporte au Boeuf musqué, pour le confondre avec le Bison d'Amerique (*Hist. nat. vol.* 23. *p.* 135.), en prénant peut-être les boeufs à laine, dont il est quéstion dans la premiére partie, pour la posterité de troupeaux domestiques égarés, que d'autres auteur ont pourtant distingué des Bisons à laine, & qui n'eussent pas acqui en si peu de siécles par la seule influence du climat, tout ces caractéres que *Charlevoix* attribue à son Boeuf de Canada. Mr. *Pennant*, à qui nous devons la premiere figure de ce Boeuf musqué, a crû pouvoir déclarer sa figure pour le Bison d'amerique des auteurs,le même que le Boeuf du Canada de *Charlevoix*, en ajoutant, que le Boeuf musqué du même ne lui semble pas étre d'une espéce differente (*f*). Je dois encore remarquer à son égard que les cornes décrites par Mr. de *Buffon*, pour celles de Bufles du Cap de bonne Espé-

---

„ scendent à coté des yeux presqu'aussi bas que la gueule, ensuite „ le bout remonte en haut, qui forme comme un croissant. Il „ y en a de si grosses, que j'en ai vus étant separées du crane, „ qui pesoient les deux ensemble soixante livres. Is ont les jambes fort courtes, de maniére que cette laine traine toujours par „ terre lorsqu'ils marchent, ce qui les rend si difformes, que l'on „ a peine de loin à distinguer la tête Il n'y a pas grand nombre de ces animaux, ce qui feroit que les Sauvages les auroient „ bientôt detruit si on en faisoit faire la chasse. Joint à ce, que „ comme ils ont les jambes trés-courtes, on les tuë, lorsqu'il y a „ bien de la neige, à coups de lance, sans qu'ils puissent fuir. „

(*f*) *Pennant synopsis of quadrupeds p. 8. 9. tab. 2. fig. 2.*

Eſpérance (*g*), n'appartiennent pas, comme il le croit, à ce même Boeuf muſqué d'Amerique. Il eſt certain, d'aprés les dimenſions, que ces cornes, quoique reſſemblantes à certains égards à celles de l' animal américain, ſont celles du *Gnou* d'Afrique, qu'on a vû tout nouvellement dans la ménagerie du Prince d' Orange à la Haye, dont Mr. le Prof. *Allemand* nous a donné une déſcription (*h*), & qui loin d'avoir aucune affinité avec le Boeuf muſqué, appartient plutôt, ſelon les obſervations donc Mr. le Dr. *Sparrmann* m'a fait part, au genre des Antelopes, dont il porte les caractéres, joints à cette forme bizarre qui tient du cheval & du taureau. Cependant on trouve une conformation trés approchante aux cornes des Bufles du Cap, donc l'eſpèce eſt bien diſtincte du Bufle d'Aſie, comme la figure qu'en donnera Mr. *Sparmann* le fera clairement connoitre.

D'aprés les éclairciſſemens que la déſcription de Mr. *Pennant* & quelques nottes priſes ſur une téte entiére du Boeuf muſqué, que jais vüe dans le Muſéum de Londres, me fourniſſent, il n'eſt plus douteux que ces crânes ſinguliers, que j'ai décrits dans le *XVIIe Tome* des *Nouveaux Commentaires* de l'Academie (*pag.* 601. *tab.* 17.), ſont effectivement ceux de ce Boeuf muſqué de l'Amerique ſeptentrionale, dont les cadavres ont pû avoir été flotés ou arriver avec les glaces juſque ſur les côtes arctiques de la Sibérie ou ces cranes ont été trouvés. Je ne répeterais point ici la deſcription de leur forme ſinguliere & de la poſition de leurs cornes, dont le caractère déciſif indique abſolument le même animal que *Charlevoix* décrit d'aprés Mr. *Jéremie*, & dont Mr. *Pennant* a fait

 graver

(*g*) *Hiſt nat. vol. XXIII. p. 252. ſuiv. planche 41. fig. 4. 5.*
(*h*) *Hiſtoire naturelle du Gnou, du grand Gerbo & de l'Hippopotame par Mr. Allamand, à Amſterdam. 1776. 4.*

graver le dessein. Mais je dois remarquer, que la douceur & l'abondance de la laine, que le prémier attribue à cet animal, ne s'accorde guéres, ni avec la tête que l'on conserve à Londres, ni avec la figure de Mr. *Pennant.* Cette derniére est presque rase & dégarnie de poils; & la tête, que j'ai examinée, est couverte d'un gros poil roïde & noir d'une longueur considerable. Cette même tête a pourtant, ainsi que la figure du célebre Auteur anglois, ces cornes dont les expansions plattes & meurtries par les efforts de l'animal couvrent tout le front & ne sont separées que par un sillon assés étroit; donc les corps applatis se rabatent au dessus des orbites sur les cotés de la tête, & dont la pointe enfin se recourbe en croissant: ce qui répond aussi bien à la description de Mr. *Jéremie*, qu'aux cranes trouvés sur nos côtes de Sibérie. Il se pourrait pourtant, que l'animal eut sur le reste du corps cette laine précieuse, dont la tête n'offre aucune trace, & que la mûe le dégarnit de poil, comme il arrive au Dromadaire, & le rendit en été tel que la figure de Mr. *Pennant* le répresente. Des observations ulterieures & plus exactes éclairciront ces doutes & justifieront peut-être ce point de la déscription communiquée au P. *Charlevoix*. En attendant nous en savons assez pour décider, que son Boeuf musqué forme une espéce trés-distincte du Bison, du Taureau & du Bufle, & doit être comptée pour la quatriéme de ce genre, & pour un des quadrupédes particuliers à l'Amérique, comptable parmis les plus grands animaux de ce continent.

Pour le *Bufle* d'Asie, nous n'en connaissons pas mieux *l'état sauvage*, que celui du Chien & de l'Onagre n'avait été connû. Il me paroit, que la plûpart des voyageurs, qui ont

ont parlé de Bufles ſauvages, n'ont vû que des troupeaux de Bufles domeſtiques errans ſans paſteurs & toujours farouches. Il n'y a que *Kolbe*, qui ſemble avoir parlé de Bufles vraiment ſauvages, mais d'une raçe de Bufles roux qui certainement, comme je viens de le dire, doit être conſiderée comme une eſpéce particuliére & toute differente du Bufle d'Aſie. Les montagnes élevées du Tybet & du Nord de l'Inde ſont vraiſemblablement la patrie de la raçe ſauvage des Bufles devenus domeſtiques aux Indes, à la Chine, en Perſe, & dans l'Aſie mineure, d'ou ils ont été transplantés en Egypte, en Barbarie & dans les parties méridionales de l'Europe. Dans ces climats chauds le Bufle domeſtique a presque entièrement perdu ſon poil, à quelques reſtes près, qui ſemblent indiquer que cet état n'eſt pas celui de l'animal ſauvage. Auſſi parait-il par la déſcription que Mr. *Pennant* a donné d'un petit Bufle qu'on montrait à Londres (*i*), qu'il exiſte aux Indes même une raçe de Bufles trés-couverte de crins, qui vraiſemblablement approche de l'état ſauvage. Enfin j'ai trouvé tant de reſſemblances entre le Bufle domeſtique tel que nous le connaiſſons, & ce bétail du Tybet & de la Tatarie, dont Mr. *Gmelin* l'oncle a donné une déſcription imparfaite (*k*) ſous le nom de *Vacca grunniens*, qu'il ne me reſte plus de doute ſur l'identité de ces deux animaux & leur origine d'une même tige ſauvage, laquelle ſelon les voyageurs & le raport des Mongols, doit avoir plus de reſſemblance avec la race domeſtique du Nord, & différer, ſurtout par le poil, de celle qui s'eſt formée dans le climat méridional.

 Mr.

(*i*) *Synopſ. of quadr. pag. 8. Planche II. fig. I.*
(*k*) *Novi Commentarii Petropol. Vol. V. p. 339. tab. VII.*

Mr. le Comte *de Buffon* en donnant l'eſſentiel de la déſcription de *Gmelin* dans une des Notices qu'il a placée à la fin du *dernier Volume* de ſon *hiſtoire naturelle*, ſoupçonne ce bétail du Tybet devoir étre de la raçe du Biſon. Il en aurait jugé autrement, ſi la déſcription, ſur laquelle il s'eſt fondé, avoit été plus circonſtanciée, où la figure de *Gmelin* moins mauvaiſe. Ce ſera donc un ſervice rendu à la Zoologie de ſuppléer à l'une & à l'autre, & de rectifier l'idée qu'on doit ſe former de ce bétail, que je nommerai Bufle à queue de cheval & dont la raçe ſauvage eſt connue au Tybet ſous le nom de *Yak* (*l*).

Aelien eſt le ſeul des anciens qui ait fait mention de ces Bufles & qui meme en donne une idée fort juſte. (*m*). Le *Poëphagus*, ſur lequel il nous a fait un conte d'aprés d'autres raports, eſt le même animal ſans que ce compilateur paraiſſe s'en étre douté (*n*). D'entre nos voyageurs européans *Marc Paul* & *Rubruquis* ſont les plus an-

(*l*) *Georgi Alphabetum Tybetan. p. 212.*

(*m*) *Aelian. de animal. lib. XV. cap. 14. verſ.* Gillii. „Adferunt „regi ſuo Indi animantes diverſas: vt --- boum genera duo, quo- „rum alii ad curſum velociſſimi ſunt; alii perquam feri; & ex „his bubus (eorum caudis) etiam muſcaria faciunt. Corpore omni- „no nigri ſunt, caudas vero egregie albas habent.„

(*n*) *Id. ib lib XVI. cap. 11.* „Poëphagus indicum animal, duplo „quam equus maior, ſpiſſiſſima cauda & nigerrima praeditus eſt: „humani pili ſubtilitatem eius ſetae vincunt. Permagni eas ideo „Indiae mulieres aeſtimant, quod eis ipſis crines ſuos pulcherrime „implicent & devinciant. Ad bina cubita ſingulae ipſius ſetae lon- „gitudine procedunt, & ex una radice circiter triginta ſimul, thy- „ſanorum inſtar exoriuntur.“ Il le décrit dans la ſuite comme un animal timide, qui ne ſe décide à la réſiſtance qu'à la derniere extremite, & qui alors s'accule contre les broſſailles pour cacher ſa queue.

anciens qui ayent pénetré jusqu'à cette partie de l'Asie qui produit cet animal, & tous les deux en font mention. Le prémier (o) place à l'Orient du Tangôut, entre les royaumes de Cergouth & Kathaï, une raçe de Bufles sauvages d'une trés-grande taille, comparable à celle de l'élephant, garnie de crins blancs & noirs, de la longueur de trois palmes, dont on a formé une race domestique trés-robuste. Ces animaux semblent avoir été plus communs chez les Mongols du temps de *Rubruquis* (p), qu'il ne le sont aujourd'hui, lorsqu'on n'en trouve que chez les Princes mongols & dans les troupeaux des plus riches de ces Nomades. Un autre voyageur ancien (q) en a parlé trés-pertinemment. Mais le Jesuite *Gerbillon* (r), dans un

(o) *M. Paul. Venet. de regionibus orient. Lib. I. cap. 62.* En parle comme d'animaux employés au labourage & à porter des fardeaux, & *Rubruquis* dit aussi que les Mongols s'en servaient pour le transport de leurs tentes & bagages.

(p) Voy. *Histoire gener. des Voyages Tom. VII.*

(q) *Niccolo di Conti* Venitien, dans la *Collection de Ramusio Vol. I. p. 340. b.* Il y est dit, que dans le royaume de Mangi, qui est entre le Tybet & la Chine, „nell' ultima parte „di questo paëse verso il Catayo si trovano Buoi bianchi e neri, „e quelli son piu pregiati che nascono con i crini e la coda di „cavallo: ma quelli che hanno i crini piu spessi e piu sottili, leg-„gieri come una penna, e lunghi che arrivano insino a i piedi, „sono stimati a peso d'argento, perche di questi tai crini ne fan-„no ventagli, che adoperano solamente in servitio de gl'idoli e de „i Rei. Ne fanno ancora d essi fiocchi incastrati in oro & in „argento, e gli mettono sulle groppe di cavalli, dove spargendosi „vengono a coprir tutta la groppa; & appresso gli attaccono al „collo, dal quale pendendo adornano il petto; & ancora i ca-„valieri gli portano in cima delle lancie, in segno di gran no-„bilta.“

(r) *Du Halde Tom. IV. p. 282.*

un de ſes voyages de Mongolie, les remarque comme quelque choſe d'extraordinaire, & l'envoyé *Tsbrand Ides* n'en donne aucun éclairciſſement, quoiqu'il ſoit le prémier qui en ait publié une figure (*s*). Une autre figure de cet animal ſe trouve dans quelques exemplaires de l'ouvrage de *Witſen* (*t*) & cet auteur en traite fort au long. Il raporte les differens uſages auxquels on employe les queues toutes blanches de quelques uns de ces Bufles, tant pour cette eſpéce d'étendart des orientaux, connû ſous le nom de queue de cheval, dont l'uſage eſt trés-ancien aux Indes & commun aux Perſans & aux Turcs (*v*), que pour l'ornement des elephants & chevaux, dont *Bernier* & d'autres voyageurs ont fait mention (*w*); ainſi que pour les chaſſemouches des Indiens deja connues du temps *d'Aelien*. *Witſen* eſt d'ailleurs le ſeul qui parle d'une eſpéce de bézoard, de la groſſeur d'un oeuf d'oye, trés eſtimé des orientaux, qui doit ſe trouver quelquefois dans l'eſtomac de ces animaux.

Les Chinois, qui ſe ſervent du crin blanc de ces Bufles, teint d'un beau rouge, pour former les houpes dont ils ornent leurs bonnets d'été, en ont introduit la race dans leurs pays (*x*). Mais ils tirent la plus grande partie

---

(*s*) *Voyage d'Tsbrand Ides, edit. hollandaiſe p. 41.* Cette figure péche par la forme trop allongée de la tête & par le dos trop uni.

(*t*) *Witſen Nord en Ooſt-Tatarye Edit. II. Vol. I. p. 66. 342. & 258.*

(*v*) C'eſt, ſelon *Bellon*, ces mêmes queues de vaches que les Turcs employent dans leurs armées, voy. *obſerv.* au *2. liv. chap. 92.*

(*w*) *Voyage de Fr. Bernier au Mogol Tom. II. p. 42.*

(*x*) *Nieuhof legation. batav. edit. lat. Part. II. p. 108.*

partie de ce crin du Tybet, ou les marchands de l'Inde & de Perse viennent aussi en faire emplette, & renchérissent surtout les queues de ces Busles, donc le prix varie selon la longeur & la beauté du crin, qui joint à la finesse & au lustre de la plus belle soye une roideur elastique approchante du crin de cheval. Celles d'entre ces queues, qui ont plus d'une aulne, sont les plus estimées. *Grew* en décrit une du Cabinet de la Societé de Londres, qui avoit un crin gris de cinq quarts d'aulnes de longeur (*y*). Selon Mr. *Pennant* (*syn. p.* 5.) on en conserve une autre toute blanche, de six pieds, dans le Museum de Londres.

Il parait que cette raçe domestique de Busles à queue de cheval varie à plusieurs égards. *Witsen* dit qu'il en nait chez les Mongols de roux & de noirs & qu'on en trouve des vaches qui ont les cornes blanches comme l'yvoire. Au Tybet & chez les Mongols on tache de multiplier surtout la varieté qui nait avec la queue & l'arriére-train ou quelque autre partie du corps blanche, parce que c'est les crins & queues blanches, susceptibles de teinture, qui sont les plus récherchées dans le commerce. Celle, que Mr. *Gmelin* eut pour sa déscription, avait l'échine & la queue toute blanche, avec des cornes longues, minces, recourbées sans arètes ni applatissement, comme je m'en suis assuré sur le crane du même individu, qui est encore conservé dans le Cabinet de l'Academie. *Witsen* dit au contraire qu'en Dàourie les mâles de ces Busles portent de trés-grandes cornes applaties & courbées

(*y*) *Museum regalis Societatis p. 26.*

bées en demi-cercle, dont on se sert pour la fabrication des arcs. Selon *Rubruquis* les Tybetains leurs coupent les cornes. Pour moi, je n'ais vû que des individus sans cornes dans les deux sexes, tels que je vais les décri.e & que la Xme *Planche*, faite sur le dessein d'un Busle mâle adulte, en peut donner l'idée.

Je suis redevable de l'animal, qui m'a servi pour cette description, à Mr. *de Bril*, Lieutenant-General & ci-devant Gouverneur d'Irkoutzk, qui fit tuer à ma prière un des deux mâles, qu'il avait reçu jeunes, avec quelques vaches, d'un Chef Mongol sujet des Chinois. On nourrissait ces animaux depuis trois ans lorsque je les vis à Irkoutzk au printemps 1772. Les vaches venaient alors de produire pour la prémiere fois chacune un veau femelle, dont l'un avait le bout de la queue blanc, quoiqu'il n'y eut aucune trace de cette couleur dans les adultes. D'ailleurs ces veaux etaient couverts d'un poil crépu, rude & noir, semblable à la toison d'un chien barbet; & quand je les vis trois mois après leur naissance (en Juillet) il leur venait déja de longs crins à la barbe, à la queue & au dessous du corps. Ils etaient plus vifs & plus inquiets que des veaux ordinaires, & bondissaient avec une sorte de légereté. Les adultes avaient conservé un caractére de ferocité, qui ne permettait point qu'on en approchat de fort prés. Ils n'étaient qu'indifferens pour leurs surveillans, mais ils ne pouvaient souffrir les étrangers. Le moindre éclat des habits, surtout la couleur jaune ou rouge, leur echauffait la bile; & approcher des veaux était se faire attaquer avec furie par les vaches. Pour prémier signe de colére ces Busles secouent leur corps, rélevent & agitent la queue & lancent des regards ménaçans.

çans. Ils ſont d'autant plus à craindre, qu'ils ont les mouvemens bruſques & la courſe aſſez rapide. Malgré ce naturel farouche ces Bufles ſe melaient volontiers aux troupeaux de vaches domeſtiques & l'on a vû les males couvrir celles-ci, quoique les taureaux ordinaires ne vouluſſent jamais rendre cette politeſſe aux Bufles fémelles. Les accouplemens des prémiers n'ont pourtant rien produit, peut-étre parce qu'ils n'avaient pas été complets & ſuivis. — Les mâles de ces Bufles à queue de cheval approchent de leurs fémelles la téte étendue en avant, la bouche béante, à la maniére des Bufles ordinaires, & la queue levée; ils ſont extremement lourds & lents à s'accoupler.

Ces animaux n'aimaient point la chaleur d'été, quoiqu' aſſez médiocre dans le climat ou je les ais obſervés; ils l'evitaient en cherchant l'ombre ou ſe plongeant dans les mares d'eau, qui etaient à leur portée, & y reſtaient des heures entiéres aprés s'étre repus. C'eſt à cauſe de cette proprieté, qui les rapproche encore des Bufles ordinaires, que les Chinois leurs ont donne le nom de *Si-nijoû* (Vache qui ſe lave). Ils nagent tout auſſi bien que le Bufle ordinaire, & ſortis de l'eau, ils frottent & ſecouent ſouvent tout le corps. Je les ai vû, comme par amuſement, s'exercer à fouiller de leur tête les lieux eſcarpés des bords d'un petit lac. Lorſqu'ils ſe couchent, ils ployent les genoux anterieurs & ſe jettent du train de derrière rudement ſur le coté gauche. Les deux ſexes n'ont d'autre voix que ce grognement ſemblable à celui du cochon, mais grave & monotone, qui ſemble abſolument leurs être naturel. Les mâles le répetent moins ſouvent que les vaches, & les veaux ne le font entendre que rarement. Quelques rélations attribuent un ſemblable grognement à l'Urus de Lithuanie.

 Nos

Nos Bufles à queue de cheval n'excedaient pas la taille d'une petite vache domeſtique. Ils reſſemblent par la forme & le port de la tête au Bufle ordinaire; ils ont de mème le muſeau plus court, plus convexe & plus gros par le bout, que le taureau domeſtique. Ce bout griſonne tout autour des narines & de la bouche. L'ouverture ovale des narines eſt moins oblique & preſque transverſale; les lévres ſont trés-épaiſſes & pendantes & à celle de deſſus il y a un eſpace nud qui répond à l'entredeux des narines. Le ſommet de la téte s'éléve en boſſe entre les oreilles, tout couvert d'une touffe de gros poils crepus. Du milieu du front le poil ſe diſperſe en rayonnant & deux autres épis ou étoiles, dont la poſition eſt variable, ſe trouvent plus avancés vers le muſeau, qui eſt parfaitement liſſe. Les oreilles grandes & larges ſont toutes heriſſées de poil & dirigées en bas ſans étre pendantes. L'encolure des mâles eſt de beaucoup plus groſſe que celle des femelles. Le dos forme une boſſe à l'endroit des épaules, qui ne parait conſiderable qu'à cauſe d'une touffe de poils crepûs, laquelle s'allonge ſur le col en forme de crinière & ſe perd à quelque diſtance de la nuque. Le reſte du dos & les cotés du cou ſont revetus d'un poil aſſez court & liſſe en été, plus fourni & heriſſé en hyver. Ce poil affecte une direction contraire à ce qui s'obſerve ordinairement dans les animaux: comme dans le Zébré, il ſe forme à l'endroit de de l'os ſacrum une épis rayonante, d'ou le poil eſt couché en avant le long de l' épine du dos jusqu'aux épaules, & cette bande eſt ordinairement entremelée de poils cendré & vient dans quelques individus toute blanche, comme la figure de *Gmelin* l'indique. Tout le deſſous du tronc & le gros des quatre jambes produit des crins

crins extremement toufus, de plus de demi-aulne de longueur, qui pendent jusqu'à mis-jambes & forment une espéce de barbe sous le col. Le tronçon de la queue n'est visible qu'à la base, qui est recouverte d'un poil plus court jusqu'à un demi-pied du corps; tout le reste est caché par des crins qui ont jusqu'à deux pieds de long & forment une houppe bien plus toufue & plus grosse que les queues de chevaux les mieux garnies. — Toute la partie inferieure des jambes, qui sont à proportion aussi grosses au moins que celles du Bufles ordinaire, est révetue d'un poil lisse & roide. Un espace triangulaire entre les jambes anterieures & le thorax porte aussi du poil lisse, mais plus doux. Les sabots, surtout aux pieds de devant, sont considerablement grands & semblables en tout à ceux du Bufle, ainsi que les ergots trés-saillants, convexes au dehors, excavés aux faces opposées.

Le Bufle à queue de cheval, dont j'ais fait la dissection, mésurait dépuis le bout du museau jusqu'à l'anus, 6 pieds 9 pouces, mésure de Paris: La plus grande longueur de sa téte s'est trouvée de 1'. 11''. 8'''. le tronçon de la qneue avait 1'. 6''. 6'''. les oreilles 6''. 3'''. Il avait quatre papilles rangées sur une ligne transversale entre le scrotum & le prépuce, lequel formait une grosse eminence à la distance de 12''. 9'''. du scrotum, sans que la trace de tout le reste de la verge, qui est de 3'. 3''. soit exterieurement visible. Le scrotum denué de poil était formé d'une peau noire & ridée, qui borde aussi l'ouverture de l'anus. Les creux des aines étaient aussi nuds, mais d'une peau blanchâtre.

On n'a pû remarquer dans les viscéres aucune difference notable d'avec les parties du Bufle commun. La

longueur du canal inteſtinal etait d'environ cent trente pieds. Les excremens ſe forment en pelottes d'une conſiſtence moyenne entre ceux de la vache ordinaire & du cheval. Ce Bufle du Tybet à quatorze paires de côtes, & autant de vertébres dans la queue. Le crane de la varieté deſtituée de cornes que j'ai examiné, avait de particulier, que l'occiput & la partie voiſine des pariétaux formaient une boſſe offeuſe convexe, trés-ſaillante & ſolide dans toute ſon épaiſſeur, produite par l'accumulation de la matiére offeuſe au defaut des cornes. Cette boſſe fut cauſe qu'on eut bien de la peine à tuer l'animal par des coups de hache reitérés, qu'on lui appliqua ſur la téte. *Aelien* a trés-bien remarqué, que ceux d'entre les boeufs domeſtiques, qui manquent de cornes, ont toujours la ſubſtance du crane plus épaiſſe & plus ſolide (*z*). Le front au deſſous des orbites était plat dans cet animal, & les os des machoires ne ſemblaient differer de ceux du Bufle commun, que par une largeur encore plus conſiderable vers les bouts; le chanfrein ayant la même convexité. Les dents de devant etaient au nombre de huit, toutes d'une largeur conſiderable & preſqu' égale, à l'exception de la plus exterieure de chaque coté; elles étaient mal affermies dans leurs alvéoles, & leur largeur collective était de 3''. 8'''. Les molaires étaient au nombre de ſix dans chaque rang, qui ſe joignaint par dentures; celles du deſſous avaient des foſſettes & la prémière était la moindre de toutes & ſans aplatiſſement ſur ſa couronne. Ainſi le nombre des dents était de 32. Le palais ſe trouvait ſillonné de 12 rides transverſales, dont les

---

(*z*) *Aelian. hiſt. anim. lib. XII. cap. 20.*

les 12 prémières comme crenelées. — La chair de l'animal, que j'ai diſſequé, s'eſt trouvé auſſi coriace & d'un auſſi mauvais gout, que l'eſt ordinairement celle des Bufles adultes.

Gmelin eſt le prémier qui ait parlé d'une *varieté* beaucoup *plus grande* dans la race domeſtique de ces *Bufles à queue de cheval*, laquelle ſelon lui porte le nom de *Ghainoûk* parmis les Mongols & les Calmoucs qui habitent les monts altaiques, & qui doit encore differer par ſa queue, dégarnie de crins par le bout, de la *petite varieté* appellée *Sarlyk* en langue mongole, que nous venons de décrire. Le nom de Khaïnouk ou *Ghaïnouk* eſt trés - connû de tout nos Calmoucs & ſouvent repeté dans ceux d'entre leurs livres ſacrés qui traitent des céremonies funebres. Mais les plus intelligens d'entre leurs prètres : ceux même qui avaient vécû dans le grand deſert entre le Tybet & la Sibérie, m'ont aſſuré que l'on ſe ſert indifferemment du nom de Ghaïnouk & de Sarlyk, pour la grande & la petite variété ; la prémiere étant la raçe originaire du Tybet, & l'autre déchue de ſa grandeur primitive par l'influence du climat moins convenable de la Mongolie. Ce n'eſt que par accident qu'on leur trouve quelquefois l'extremité de la queue ou quelqu' autre partie du corps raſe & degarnie de poils. Auſſi tous les Calmoucs opinent que la grande variété du Ghaïnouk ou Yak du Tybet, ſauvage auſſi - bien que domeſtique, ne diffère des Bufles ras de Perſe, que l'on nourrit à Aſtracan, que par le crin, dont elle eſt auſſi garnie que nôtre petite varieté. Mr. *Stewart*, qui vient de donner un recit curieux d'une miſſion faite au Tybet par la Compagnie anglaiſe des Indes orientales

les (*a*), parle des Bufles à queue de cheval du Tybet, comme étans généralement plus gros que le taureau domestique, sans bosse, à petites cornes, & couvers d'un crin fort long, souvent tout argenté. Il nous apprend que les Tybetains ont transferé à ce betail, dont les queues y sont un article de commerce considerable, la vénération religieuse, que les Indiens payent à la vache ordinaire; ce qui s'accorde bien avec ce que j'en ai appris des peuples Mongols adonnés à la superstition du Tybet, & par leurs livres religieux. — Au reste les Calmoucs conviennent, que cet animal n'était pas sauvage dans les montagnes que leur Horde occupait. Quelques Tatares occidentaux, voisins de l'Irtiche, m'ont bien assuré, qu'il existait dans la grande chaine altaïque des Bufles sauvages nommés *Soûghôun* dans leur langue, dont ils faisaient un portrait semblable en tout à nôtre Bufles à queue de cheval: mais il est plus que probable. que si cette raçe se trouve effectivement sauvage dans les endroits qu'ils indiquent, elle dérive de tels individus domestiques consacrés par les Lamas & lachés, comme anathémes, avec d'autre betail, aux environs de la montagne sacrée de Boghdo, qui est comme le centre de la grande chaine altaïque, & au genies de laquelle on consacrait ces troupeaux par motifs de religion. Il est averé que, tant que la grande Horde Calmoucque occupait son ancien domaine, les environs de ladite montagne fourmillaient de troupeaux de chevaux, de bêtes à cornes, & même de chameaux devenus sauvages auquels personne, que les prêtres, n'osait toucher.

Si

(*a*) *Philosophical Transactions vol.* LXVII. 1777. *Part. II. p.* 478.

Si jamais un voyageur naturaliſte vient à pénétrer dans le Tybet par la voye de l'Inde, il ſerait à ſouhaiter, qu'il nous procurat une connaiſſance plus exacte du Yak ſauvage de ce pays, de ſon naturel, de ſes raports avec le grand Bufle domeſtique des pays méridionaux, des varietés dans la race domeſtique au Tybet, & de celles qu'on obſerve parmis les Bufles de l'Inde.

OBSERVATIONS

SUR L'ASNE DANS SON ÉTAT SAUVAGE OU SUR LE VÉRITABLE ONAGRE DES ANCIENS;

Par

P. S. PALLAS.

Tandis que nous possedons dans les Cabinets d'Europe nombre d'animaux des deux Indes assez rares sur les lieux mêmes, plusieures espéces communes dans des climats moins eloignés de l'Europe restent toujours trés-imparfaitement connues & même douteuses à plusieurs égards. L'Onagre, si souvent nommé des anciens, en est un exemple frapant: il semblerait ne plus exister, tant ce grand nombre de Voyageurs modernes, qui ont parcouru les terres du Levant, en font peu mention. Il en est une raison bien simple: c'est que nous ne sommes plus les maitres de ces contrées, d'ou les Romains tiraient les Onagres pour leurs haras; c'est que nos voyageurs, loin de pouvoir s'arreter dans les grands deserts arides de l'Asie, que ces animaux recherchent, les traversent ordinairement à la hate, le plus souvent en nombreuses caravanes & par des routes frequentées, ou il n'est guéres possible d'espérer qu'un hazard favorable dût leur procurer l'aspect d'un animal célebre chez les anciens par sa timidité & la legereté de sa course. Mr. *Niebour*, si justement célebre par son voyage d'Arabie, m'assure n'avoir jamais entendu parler d'Onagres dans tout le cours de ses voyages, pas même en Syrie, ou du temps de *Rauwolf*, qui en fait mention

tion (*a*), ces animaux ne devaient pas être fort rares. Presqu' aucun des autres voyageurs du Levant n'a prétendu avoir vû des Onagres à l'exception de *Pierre della Valle* (*b*), encore n'en parle-t-il que d'aprés celui qu'il vit renfermé dans une eſpéce de ménagerie à Baſſora; & ceux qu'examina *Oléarius* (*c*) ſe trouvaient de même dans un parc avec d'autre gibier raſſemblé pour le plaiſir de la chaſſe. Un des plus anciens voyageurs, qui ont pénetré dans les déſerts de la grande Tatarie, le moine *Rubruquis* eſt auſſi le prémier qui ait indiqué l'Onagre ſous le nom tatare de *Koulan*, le même qu'il porte encore aujourd'hui chez toutes les hordes nomades. Le Journal de *Hogg* & *Thompſon*, raporté par *Hanway* (*e*), fait auſſi mention de troupeaux de chevaux ſauvages, d'Onagres & de Gazelles, qui abondent aux environs du Lac Aral dans les déſerts à l'Eſt de la Mer caſpienne. C'eſt à peu prés tout ce qu'on peut trouver de témoignages modernes ſur l'exiſtence d'Onagres ou Aſnes ſauvages en Aſie ou cette eſpéce, ſelon les anciens, était repandue dans tous les cantons de l'Aſie mineure, la Syrie, la Perſe & l'A-

rabie.

(*a*) *Voyage de Rauwolf* (Edit. originale allem. à Augſpourg 1583. 4to) à la page 65.

(*b*) *Voyage de Pietro della Valle* (ed. françaiſe) *Vol. VIII. p. 49.* & dans l'Edit. hollandaiſe (d'Amſterd. 1766. 4to) Part. III. p. 137. & Part. VI. p. 105.

(*c*) *Voyage de Oléarius en Perſe* (edit. allem. à Slesvich. 1656.) p. 526.

(*d*) *Hiſtoire generale des Voyages Tom. VII. Liv. 17. chap. 2. ſect. 1.*

(*e*) *Hanway hiſtorical account of the britiſh trade on the Caſpian Sea, Vol I. p. 349.*

rabie (*f*). Nous n'en ſavons guéres plus ſur ceux d'Afrique, pour lesquels je ne trouve de garants que *Léon l'afriquain* & *Marmol* à citer. Car ceux, qu'on dit avoir été communs dans quelques-unes des Isles Canaries (*g*) & dont la raçe eſt aujourd'huy détruite, n'etaient que le produit d'anes domeſtiques transplantés de main d'homme & dévenus ſauvages, auſſi bien que ceux que *Dapper* attribue à quelques Isles de l'Archipel, ou ils ſemblent avoir ſubi le même ſort.

Une choſe bien conſtatée cependant, ſurtout par les raports unanimes des Nomades aſiatiques, des caravanes marchandes qui nous arrivent de Boucarie & de perſonnes échapées à l'eſclavage, que j'ai eu occaſion de queſtionner, c'eſt que les Onagres, connus de tous les aſiatiques

(*f*) *Varron* & *Pline* parlent des Onagres comme d'animaux communs dans l'Aſie mineure; *Xénophon*, *Suétone* & *Ammien* font mention de ceux de Méſopotamie, de Perſe & des déſerts parthiques; *Tacite* raporte, que le peuple Juif ſous la conduite de Moyſe dut quelquefois aux Onagres la découverte des fontaines dans les déſerts arides de l'Arabie; & l'*Ecriture ſainte*, quoiqu'à d'autres égards, en fait trés-ſouvent mention comme d'un animal familier aux deſerts qui avoiſinent la Paléſtine. Il n'y a pourtant de tous les anciens que le ſeul *Oppien* qui nous ait laiſſé une déſcription bien caractériſée de l'Onagre des anciens, par laquelle on réconnait facilement l'Aſne dans ſon état ſauvage, tel que nous allons le faire connaitre. Et il n'y a certainement de tous les anciens que *Philoſtorgius* qui ait appliqué le nom d'Onagre au Zébre d'Afrique.

(*g*) Voy. le temoignage d'*Aloyſe ca da Moſto* dans la *Collection de Ramuſio Vol. I. p 98* & ce qui eſt raporté dans l'*Hiſtoire & la deſcription des Canaries publiée en Anglais par G. Glas*, ſur la chaſſe generale, que les habitans de l'Isle Fuerta-ventura furent obligé de donner aux Aſnes ſauvages trop multipliés ſur leurs terres & par laquelle on en tua jusqu'à quinze cents.

ques par le nom de *Koulàn*, ſont encore trés-nombreux dans les déſerts de la grande Tatarie, & viennent annuellement par grands troupeaux ſe répandre dans les déſerts montagneux à l'èſt & au nord du Lac Aral, ou ils paſſent l'été & s'attroupent en automne par centaines & même par milliers pour leur retours vers l'Inde, à la récherche d'un aſyle contre l'hyver. Un paſſage de *Barboza* (*h*) ſemble tracer cette migration jusque dans les parties les plus méridionales de l'Inde; mais la Perſe eſt certainement le lieu de rétraite le plus ordinaire pour ces troupeaux d'Onagres & dans les montagnes des environs de Casbin, on en trouve en tout temps de l'année. Des témoins oculaires m'ont aſſuré avoir vû dans les déſerts la trace de tels troupeaux, laquelle ſouvent porte ſur plus de 300 toiſes en largeur. Cependant tous mes efforts pour me procurer un de ces animaux, lors de mon ſejour ſur les confins de la grande Tatarie, ont été vains, vû la diſtance des lieux, qu'ils frequentent, de la frontiére Ruſſe: ces troupeaux ne paſſant guéres au delà du 48me. degré de latitude Nord. Etant donc déja ſur mon retour en 1773. je priai enfin feu Monſ. le Prof. *Gmelin*, alors pret à partir d'Aſtrachan pour la côte orientale de la Mer caſpienne, de rechercher les occaſions pour nous faire connaitre cet animal dans l'état de nature. C'eſt aux ſoins de cet Academicien, décédé ſur le retour de ce dernier voyage, que nous ſommes rédevables des connaiſſances plus préciſes que je vais donner ſur le véritable Onagre, ſurtout d'aprés cette fémelle, qui nous fut amenée à Pétersbourg

 par

(*h*) Relation d'*Odoard Barboza* dans la *Collection de Ramuſio Vol. I. p. 300.* b ou il eſt parlé d'Onagres dans les montagnes du Malabar & du Royaume de Golconde.

par les perſonnes de ſa ſuite, & qui lui était venûe de Casbin, avec un étalon de la même raçe.

Les Perſans, qui prononcent le nom Tatare de l'Onagre avec une aſpiration, qui l'a fait changer en *Kourhan* à *Oléarius*, l'appellent auſſi en langue turque *Daghà-Iſcháki*, ou Asne de montagne, parce qu'il aime ſurtout les déſerts montagneux les plus arides. Ils en font la chaſſe, ainſi que les Tatares nomades, & de pluſieures façons. Ces derniers ne cherchent qu'à tirer ces animaux par embuſcade pour en avoir la chair, qui eſt réputée delicieuſe, & doit bien l'étre, puisque même les Romains ont été friands de jeunes Onagres (*i*). Les Perſans au contraire, tachent de les prendre vivans au moyen de foſſes couvertes, que l'on a ſoin de remplir d'herbes à une certaine hauteur, afin que l'animal ne ſe bleſſe pas par la chute. L'on chaſſe les Onagres vers ces foſſes pratiquées dans les endroits des deſerts qu'ils frequentent. Les jeunes Onagres pris vivants ſe vendent à un prix conſiderable pour les haras des grands du pays. C'eſt de l'accouplement de ces Onagres apprivoiſés que provient cette raçe noble d'Asnes qui ſervent de monture en Perſe & en Arabie & qu'en Egypte (ſelon le recit de Mr. *Niebour*, qui m'a aſſuré en avoir vû de tout ſemblables en couleur à nôtre Onagre) l'on vend jusqu'à 75 Ducats. *Tavernier* (*k*) dit que les beaux ſe vendent en Perſe plus chers que les che-

---

(*i*) *Pline hiſt. nat. lib VIII. cap. 44.* „Onagri in Phrygia & Lycaonia praecipui. Pullis eorum, ceu praeſtantibus ſapore, Africa gloriatur, quos laliſiones appellant. „ *Mécène* avait ſubſtitué pour la table les poulains„ de mules, comme le raporte *Pline* au même *livre, chap. 45.*

(*k*) *Voyage de Tavernier liv. 4. chap. 3.*

chevaux & jusqu'à cent écus la piéce. Il les diſtingue trés - bien de la raçe chétive des Aſnes ordinaires, qui y ſervent pour porter les fardeaux, & le caprice ſingulier, que les Perſans conſervent ſelon lui, de peindre ces Aſnes de monture en rouge, comme on le fait auſſi en Egypte avec le Kannà qui y ſert d'ailleurs pour le fard des femmes, ſemble donner l'explication de ces Onagres chimériques de l'Inde à tète rouge, dont *Elien* a parlé (*l*) & auquels il ajoute, pour ſurcroit de merveilleux, une corne au front. *Le Brun* & *Adanſon* (*m*) n'ont pas moins fait l'éloge de ces bidets iſſus d'Onagres, & tous les voyageurs du Levant s'en ſont loués.

Semblables en tout à l'Onagre ſauvage, ces Aſnes de bonne race ſont extremement vifs & legers à la courſe, d'une forme leſte, d'un port animé, & meritent bien l'épithéte appliqué par *Martial* à l'Onagre. La qualité qui les fait eſtimer la plus, c'eſt qu'ils reſiſtent à la fatigue beaucoup mieu que les chevaux tatares, & qu'ils font plus de diligence que les Chameaux (*n*). La bête que nous avons eu à Pétersbourg & qui avait été priſe fort jeune, quoique petite de taille & probablement arretée dans ſon accroiſſement par la captivité & les defauts d'une nourriture peu convenable, avait fait tout le chemin d'Aſtracan jusqu'à

(*l*) *Aelian. hiſt. anim. Lib. IV. cap. 52.*

(*m*) *De Bruyn Reize over Moſkovie door Perſien en Indien pag. 405. Adanſon voyage au Senegal p. 118.*

(*n*) Mr. *Niebour* évalue le chemin que font les Aſnes de ſelle dans la demi-heure, lorsqu'ils marchent d'un pas égal, à 1750 doubles pas de l'homme, au lieu que les grands Dromadaires n'en font que 975 & les petits tout au plus 1500. *Voy. d'Arabie p. 311. 312. note.*

jusqu'à Moscou, qui est de plus de 1400 Verstes, en courant à la suite des voitures de poste sans autre rélache que celle de quelques nuits; plus fatiguée encore par les coups & les meurtrissures qu'elle avait reçue; étant souvent trainée par la voiture ou on l'avait attachée. Elle avait courue de même les 730 Verstes de Moscou à Pétersbourg, & ce ne fut apparament pas de la suite de ces fatigues, ni d'une galle universelle qui en avait resulté, mais plûtôt du froid & de l'humidité de nôtre climat, & de l'effet des herbes d'un terrein marécageux, peu convenables à sa constitution, qu'elle périt aux approches de l'automne, aprés avoir répris assez de forces & de légereté, pour faire juger de la difference qu'il y a de l'Asne domestique aux Onagres. Elle n'avait rien de cette lenteur & de cette stupidité, qui a rendu le premier l'emblème de ses mauvaises qualités. — Les Onagres sont des animaux faits à la course, qui fuyent avec tant de vitesse & de constance, que les meilleurs chevaux ne sauraient les atteindre. *Xénophon* raporte des Onagres de Mésopotamie, qu'étans chassés ils s'arretaient souvent au milieu de leur fuite, pour se laisser approcher, & qu'alors ils s'elancaient avec une vitesse qui leur faisait gagner sans peine sur les meilleurs coursiers. Aussi tous les auteurs anciens rendent justice à leur célerité & le nom que les Hébreux leur donnaient (*Päräd*) derive de cette qualité. D'ailleurs comme les Onagres aiment surtout les montagnes pelées, ils courrent avec facilité sur les terreins les plus difficiles, & cet instinct reste à l'asne domestique & se communique au mulet. La situation naturellement raprochée des jambes de ces animaux semble les favoriser dans ces occasions, & le sabot cylindrique de leurs pieds, extremement dur & sec, est fait pour de tels terreins

reins

reins. Le mauvais effet du ſol marécageu de Petersbourg fut bientôt ſenſible à nôtre Onagre & la corne de ſes pieds vint à ſe fendre & à tomber par lambeaux.

Il eſt certain, qu'en général l'eſpéce de l'Aſne proſpere bien moins dans les climats froids & humides, que le cheval, dont la race ſauvage ſe ſoutient dans nos deſerts juſqu'au 56me degré de latitude boréale. C'eſt une des raiſons qui, jointe aux mauvais traitemens, au manque de ſoins & de bonne nourriture & aux fatigues qu'on impoſe aux Aſnes domeſtiques en Europe, en ont ſi fort abatardi le naturel. Mais faut-il juger du cheval d'aprés les plus chétifs de ſa race? & n'eſt il pas probable & même prouvé par ce que nous avons allegué, qu'avec les ſoins qu'on a pris pour annoblir l'eſpéce du cheval, par des accouplemens choiſis & croiſés & par toutes les autres attentions connues, l'on parviendrait de même en Europe, du moins dans les parties temperées de nôtre continent, à donner aux Aſnes domeſtiques la taille & les bonnes qualités de ceux du Levant, & beaucoup plus de beauté & d'utilité que nous ne leurs connoiſſons? Peut-être même ſurpaſſeraient-ils les Onagres, tout comme nos plus belles races de chevaux ſont devenues infiniment ſuperieures aux cheval ſauvage, qui eſt à peu prés de la forme & de la grandeur des petits chevaux tatares. Pour les mauvaiſes qualités de naturel qu'on reproche à l'Aſne & que les mulets heritent de lui, il eſt trés-probable, qu'elles proviennent en partie de la trop grande étendue & de la fineſſe de l'organe de l'ouïe dans ces animaux, formés par la nature pour la ſolitude des déſerts. Les bruits qui rétentiſſent autour

 d'eux

d'eux, dans l'état domeftique, doivent néceffairement les étourdir, & l'ufage des Anglais qui, en coupant les oreilles aux Afnes, croyent les rendre plus alertes & plus dociles, prouve que c'eft là la principale fource de l'humeur qu'on reproche à ces animaux, & qu'on les corrigerait en partie par l'application de quelque moyen moins défigurant, pour modérer l'effet des bruits fur leurs organes.

Par l'amélioration de la raçe domeftique de l'Afne, que l'on obtiendrait le plus promptement en la croifant avec la bonne raçe du Levant ou avec l'Onagre, on annoblira auffi les mulets, produits de l'accouplement de cet animal avec le cheval, dont l'utilité eft affez généralement réconnue. *Varron* & les autres anciens qui ont traité de l'économie & des haras, fe réuniffent à dire que de leur temps les meilleures mules etaient le produit de l'Onagre apprivoifé avec la jument. Les mulets de Perfe, dont *le Brun* a vanté la force & le courage (*o*), ont apparament la même origine. — Tous ces avantages

---

(*o*) *De Bruyn Reize over Mofcovie &c. p. 139.* ou il dit, que dans la partie méridionale de la Perfe il y a des mules, qui par inftinct (comme le font auffi les étalons des chevaux qui vont en liberté) fe jettent courageufement fur les ours ou autres bétes féroces & les frapent des pieds de devant; ils font quelquefois trompés par la reffemblance des cochons, qui dans ce pays font noirs & heriffés, & en tuent par illufion. *Varron* raporte un exemple d'un femblable courage au II. Livre, chap. 8me. Cela s'accorde avec l'inftinct des Onagres fur lesquels les Nomades ont fait de femblables obfervations. Ils racontent d'eux entrautres, que le prémier de la troupe, qui voit un ferpent, fait entendre

tages feraient d'autant plus grands, fi l'on s'évertuait à apprivoifer le *Gicquétéi* ou le Mulet fauvage de la Mongolie, qui furpaffe l'Onagre en grandeur, en beauté & peut-être par fa légereté (*p*).

L'économie fauvage des Onagres reffemble affez à celle du Gicquétei & du Cheval fauvage. Ils fe réuniffent en troupeaux conduits par un étalon principal, comme *Oppien*, *Pline* & ceux qui le copient, l'ont dejà debité. Mais il parait que dans le temps où ils font leur rétraite vers le Sud, ils s'attroupent en plus grand nombre. C'eft juftement le temps où le rut eft paffé & les femelles pleines; nonobftant quoi on voit les étalons fe déchirer à belles dents & fe battre à ruades. — Ils ont la vûë, l'ouïe & le nez également bons, de forte qu'il eft impoffible d'approcher d'eux en rafe campagne. Les chaffeurs cherchent à fe cacher, pour les attendre au paffage, ou aux environs des mares d'eau faumâtre ou ils viennent s'abreuver; ce qu'ils ne font pourtant que rarement. J'ai remarqué fur l'Onagre femelle, que j'obfervais, qu'elle paffait fouvent deux journées entiéres fans boire, furtout par un temps humide ou lorsqu'il tombait de fortes rofées. Auffi preferait-elle toujours l'eau faumâtre à l'eau douce, & ne voulait jamais de celle qui était trouble. Elle aimait le pain froté de fel & mangait quelquefois

L l 2 du

---

un certain cri qui raffemble tous les autres autour de lui, & qu'alors chaque Onagre cherche à être le prémier pour écrafer le ferpent. C'eft de même pour les bétes féroces.

(*p*) Voyez la defcription que j'ais donné de cet animal fi longtemps inconnû aux Naturaliftes, qui n'en favaient que le nom, au *XIXe. Vol.* des *Noui Comment.* de nôtre Academie.

du sel par poignées. On m'a dit que tant qu'elle fut a Derbent, elle courrait toujours boire à la Mer caspienne, quoiqu'elle put trouver plus prés de quoi satisfaire sa soif avec de l'eau douce. Elle récherchait aussi les plantes chargées de parties salines, les Kalis, les Atriplex, les Chénopodiums, la Renouée; puis les améres laiteuses, comme le Dent de lion, le Laitron, &c. enfin le Trefle, le Saintfoin, avec quelques autres plantes de cet ordre, surtout chargées dé gousses, & le Chiendent. Elle aimait aussi les Concombres crûds; & quelques herbes, qu'elle refusait vertes, lui plaisaient séchées, comme par ex. le Pois verd. Elle ne touchait pas au contraire aux plantes odoriférantes, aux plantes de marais, aux Rénoncules, aux Orties, aux Quintefeuilles, à toute sorte d'herbe dure & méme aux chardons qui sont pourtant partie de la nourriture de l'asne domestique. L'on m'a raporté que les Persans apprivoisent les jeunes Onagres en les nourrissant de riz, d'avoine, de paille, de ris & de pain. Les Boucares indiquent par le mot de *Buroghàn* une espéce d'arbrisseau, commun dans la partie méridionale des déserts de la grande Tatarie, que les Onagres aiment surtout à brouter. — Au reste nôtre bête était extremement familiére & suivait les personnes, qui la soignaient, librement & avec une sorte d'attachement. L'odeur du pain était surtout un grand attrait pour elle. Mais conduite contre son gré elle montrait tout l'entétement de l'Asne. Elle ne souffrait aussi point que quelqu'un l'approchat par derriére, & touchée avec un baton ou avec la main sur la croupe, elle payait d'une ruade, qui était toujours accompagnée d'un petit grognement semblable à celui d'un étalon qui rüe.

L'Onagre

L'Onagre mâle, qui avait été acheté avec cette fémelle, mais qui perit dans le transport par mer de Derbent à Astracan, fut moins docile & surpassait la fémelle en grandeur. Selon les mésures, qu'on prit sur son cadavre, sa longueur depuis la nuque jusqu'à l'origine de la queue avait été de 4 pieds $10\frac{1}{2}$ pouces, le train de devant haut de $4'. 2''. 8'''.$ le train de derrière de $4'. 6''. 6'''.$ la tête avait 2 pieds de longueur, les oreilles $11\frac{1}{2}$ pouces, & la queue, y compris le bouquet, 2 pieds $1\frac{1}{2}$ pouces. La femelle au contraire n'avait que 3 pieds 10 pouces dêpuis la nuque jusqu'à la racine de la queue; son train de devant était de $3'. 4''. 8'''.$ celui de derrière de 3 pieds six pouces, la tête d'un pied $6\frac{1}{2}$ pouces, le tronçon de la queue $10\frac{1}{2}$ pouces, le bouquet qui la terminait $8''. 5'''.$ les oreilles $7''. 5'''.$ & le poids de l'animal, lorsqu'il mourut extenué, ne fut que d'environ 150 livres (poids de Russie). L'Etalon differait encore de la fémelle en ce qu'il avait tout le corps plus robuste, l'encolure plus grosse, le poitrail & la croupe plus larges, & surtout par une barre ou raye transversale (*Tab. XI.*) qui croisait sur les épaules avec celle qui s'etend de long de l'épine dans l'un & l'autre sexe. C'est cette croix que la plûpart des anes domestiques mâles ont conservé, & qui embellit surtout ceux qui ont la couleur du poil claire. Cette barre transversale, bien plus étroite que l'autre, manque entièrement aux onagres fémelles; quelque Tatares m'ont au contraire assuré qu'elle se voyait assez souvent double dans les mâles.

Nôtre Onagre était bien plus haut sur les jambes & les avait plus fines, que l'Asne domestique. Elle ressemblait par la forme étroite du poitrail & de tout le

corps, (qui eſt trés-bien exprimée par la figure deſſinée de croupe à nôtre Planche XII.) à un jeune poulain de jument, & de même elle atteignait & ſe grattait facilement au col & à la téte avec les pieds de derrière. Elle était faible ſur ſes pieds de devant, mais ſur l'arriére du dos elle ſoutenait fort bien l'homme le plus lourd, malgré l'état d'épuiſement ou nous l'avons vû. Elle portait ſa téte bien plus relevée que l'Aſne, les oreilles bien rédreſſeés, même lorsqu'elle était malade, & montrait de la vivacité dans tous ſes mouvemens. La téte de l'Onagre eſt plus haute que celle du Gicquetéi; cependant j'ai trouvé le crane décharné d'une légereté ſurprenante. Le chanfrein eſt trés-arqué, le front convexe au deſſus des ſaliéres qui ſont trés-viſibles, mais plat dans l'entre-deux des yeux. Les lévres trés-épaiſſes ſont garnies juſqu'au bord de poils roides, couchés & contournes en ſuivant leur convexité. Le cartilage des narines ne forme point cette partie ſaillante, que j'ai remarquée au Gicquetéï. L'iris des yeux était d'un brun livide. Les oreilles, remplies à l'interieur de poils blanchâtres, aſſez longs & crépus, diſpoſes le long des deux bords & de trois arêtes ſaillantes longitudinales, avaient la pointe toute noire. La couleur du poil ſur la plus grande partie du corps & le bout du muſeau eſt un blanc argentin; le deſſus de la téte, les faces laterales du col & du tronc ſont blonds ou de couleur iſabelle pale. Cette couleur ne s'etend point le long des jambes antérieures; mais les cuiſſes en ſont couvertes juſqu'au jarret, & cette couleur de la cuiſſe ſe trouve ſeparée de celle du tronc, par un eſpace blanc de la largeur de la main entre la cuiſſe & le flanc. Un autre eſpace blanc ſuit la crinière & la raye de l'epine dans toute ſa longueur, s'élargit ſur la croupe & communi-

munique avec l'intervalle blanc des flancs; *Oppien* a trés-bien remarqué cette bordure blanche de la raye de l'Onagre, dans la déscription qu'il nous a donné de cet animal. La crinière, qui eſt d'un brun noirâtre, commence à l'entredeux des oreilles & va juſqu'aux épaules; elle eſt formée par un poil doux, laineux, de trois à quatre pouces de haut, ſemblable à la crinière d'un poulain de jument. La raye, qui coule depuis la criniére tout le long de l'épine juſqu'à la queue, eſt preſque couleur de café, plus large à la region lombaire, rétrecie vers la queue, & le poil de toute cette bande eſt fort touffu & ondoyant, même en été, lorsque tout le reſte du corps de l'Onagre eſt parfaitement liſſe. Le bouquet, qui termine la queue, eſt fait de crins aſſez roides, ſemblables en groſſeur à la crinière du cheval, & d'un empan de long. Le veſtige calleux, qui tient lieu de ce qu'on appelle chataigne dans le chevaux, n'eſt point rond dans l'Onagre, comme aux Aſnes domeſtiques, mais d'une forme ovale allongée, un peu irrégulière. Les ergots ſe trouvent marqués, ſur les boulets des quatres pieds, par une calloſité ſaillante. Le ſabots des pieds ſont preſque cylindriques, raboteux par des rugoſités circulaires & fort creux en deſſous. — Le poil en general, ſurtout celui dont l'animal ſe couvre en hyver, eſt bien plus ſoyeux & plus doux, que celui qui vient au chevaux, même dans nos pays du nord, & ne peut étre comparé qu'à la laine du chameau. Cette laine d'hyver eſt ondoyante, comme l'exprime la répreſentation du mâle à la *XIme Planche*, trés-graſſe au toucher & d'un blond plus clair ſur les partie qu'occupe cette couleur. Le poil d'eté au contraire eſt liſſe, ſoyeux, extremement doux au toucher & aſſez uni, à l'exception de quelques épis qu'il forme & ſurtout

tout de ces rayes ſinguliéres qui ſont exprimées dans le profil de l'animal à la Planche XIIme, & dont il y a deux eſpéces. Celles qui occupent l'eſpace triangulaire entre l'épaule & le col, naiſſent de la diſpoſition du poil, dirigé à contre-ſens dans les intervalles de ſillons parallèles, qui ſont environ au nombre de douze; celles au contraire qui tournent annulairement autour du gras des jambes de devant, & la partie inferieure des cuiſſes, ne ſont que des eſpéces d'inſcriptions, formées par des marques à peine viſibles ſur les poil, qui en coupent la direction. Il y a des ſillons ſemblables aux premiers ſur le thorax au devant & derrière les jambes. Il y a de plus ſur le col, a peu de diſtance de la nuque, un épi de chaque coté de la criniére, qui diſperſe le poil en tout ſens; deux ſemblables de chaque coté dans les flancs & des ſutures formées par le concours du poil le long du bord poſterieur des cuiſſes & ſur le bas-ventre, où deux ſutures forment une eſpéce de croix. Tout le long du dos la direction du poil tend vers la queue, au lieu que dans le Zèbre une partie du dos a les poils dirigés à rebours, dont on ne trouve que cet animal, le Bufle a queue de cheval & une ſeule eſpéce de Gazelle (le Coudou *Buff.*) pour exemple dans tout le regne animal.

Je n'ai compte que ſeize vertèbres dans la queue de l'Onagre, le nombre des autres répondait à celui de l'Aſne domeſtique. Le nombre des dents n'allait qu'à trente deux, dont ſix inciſives dans chaque machoire trés uſées & cinq molaires dans chaque rangée. Les parties interieures ne m'ont parû differer de celles de l'Aſne qu'autant qu'elles peuvent varier d'un individû à l'autre. Il y avoit dans les gros inteſtins de trés-grandes Aſcarides, telles qu'on en trouve dans les chevaux, & quelques vers ſtron-

ſtrongles de petite taille etaient diſtribués par les inteſtins gréles. Ceux qui aſſurent que l'Aſne n'eſt jamais ſujet à la vermine, ne doivent pas étendre cette règle aux Onagres, car celui, que nous avons décrit, en avait d'une petite eſpéce, mais en ſi grande abondance que le poil en étoit comme ſemé.

Nous avons deja dit, que chez les Tatares nomades la chair des Onagres eſt préferée à celle du cheval & à toute ſorte de gibier. C'eſt la même choſe chez les Arabes (*q*) & les auteurs de cette nation, qui ſe permet de manger l'Onagre, font la même difference entre cet animal & l'Aſne domeſtique, que faiſaient les Hébreux, dont la loi ne permettait pas d'accoupler l'Onagre avec l'Aneſſe, comme étant d'eſpéces differentes. La bile d'Onagre eſt eſtimée chez les Perſans comme un reméde contre les obfuſcations de la vûe & les cataractes: & ce préjugé ſérait pardonnable. Mais il ne l'eſt pas, de prétendre chercher un reméde contre les maux des reins, par des turpitudes commiſes avec les Aneſſes de la raçe ſauvage, comme il eſt certain que le font les Perſans & que les Tatares Nogais d'Aſtracan ont été tenté de le faire avec nôtre Onagre, lorſqu'il ſe trouvait dans cette ville.

Les peaux d'Onagres ſont récherchées des Boucares pour étre préparées en manière de chagrin. *Rauwolf* en dit autant de ceux de Syrie, dont les peaux ſont apportées à Tripoli. Mais c'eſt une erreur de croire, que la peau des Onagres ſoit naturellement grainue, comme cela ſe trouve encore dans les auteurs les plus modernes

(*q*) Voyez *Bochart hierozoicon liv. III. chap. 16.* & les *obſervations Zoologiques de Forſkål* pag. V. ou il eſt fait mention de l'Onagre ſous le nom Arabe de *Djaeàr*.

dernes, ou que le chagrin ne saurait être préparé qu'avec de telles peaux. On le fabrique à Astracan & dans toute la Perse (*r*) avec cette partie des peaux de cheveaux, que l'on coupe en croissant sur la croupe. L'on fait d'abord tremper ces morceaux de peau dans l'eau claire, jusqu'à ce que le poil s'en détache avec facilité. Aprés la depilation on les rétrempe dans d'autre eau, pour les racler une séconde fois du coté de la chair; on les ramollit derechef; on enleve, avec des instruments plus tranchants, une légere couche du coté du poil & la pure partie nerveuse des peaux, qui reste aprés ces differentes operations, doit être bien tendue, au moyen de ficelles, dans des espéces de chassis, composés d'un bois courbé en arc & d'un autre bois droit. Ainsi tendues on les couche, l'une aprés l'autre, sur un gros morceau de feutre & on en couvre le coté du poil, qui est parfaitement lisse, avec la graine noire d'une espéce d'arroche (*chenopodium*), laquelle est trés-dure, lisse & d'une forme lenticulaire, de la grosseur du millet ou des graines d'amaranthe, qui pourront aussi servir à cet usage; l'on fait entrer cette graine dans la surface des peaux, en marchant dessus aprés les avoir récouvertes d'un autre feutre. Dans cet état on fait sécher ces peaux à l'ombre sans déranger la couche de graine qui y est collée & sans qu'elles touchent au support contre lequel les chassis sont appuyés. Lorsqu'elles sont bien desséchées, on les bat légérenent pour faire sauter la graine, on les détache des chassis & on taille, avec un instrument bien tranchant, la surface emprein-

(*r*) Ce que nous appellons *chagrin* est proprement appellé *Sogré* chez les Tatares; *Sagri* chez les Turcs & *Kojouchi* chez les Boucares.

empreinte, par la graine, d'une infinité de fossettes, de façon que les intervalles eminents de ces fossettes étant enlevés, il ne reste qu'une légère trace de ces empreintes. Les peaux ainsi lissées (operation qui demande beaucoup d'attention & d'habitude) on les retrempe d'abord quelques jours dans l'eau claire, pour les ramollir, puis on les passe dans une lessive chaude, faite avec ce sel natreux, qui abonde sur les terreins salés des landes d'Astracan. On les retire incessament de cette lessive pour les entasser par monceaux, ou elles doivent reposer quelques heures. C'est alors que ce grain, formé par la substance encore entiére des fossettes, ressort & s'éléve au dessus du reste de la surface qui a perdu de sa substance par la derniére opération (s) & le chagrin est pret pour les teintures que l'on veut lui donner, aprés qu'on l'a passé encore pour quelques couleurs, dans une saumure faite avec le sel marin. Pour le teindre d'un beau verd on trempe les peaux preparées dans une solution saturée & chaude de sel ammoniac, puis on les saupoudre, du côté qui n'a pas de grain, avec de la limaille de cuivre tamisée, on les ploye en deux, & on enveloppe chacune d'un morceau d'etoffe de laine, pour les ranger sous une presse, ou elles doivent rester quelque temps: on doit réiterer ce procedé une seconde fois pour perfectionner la couleur. — Pour le chagrin bleu, on prépare à froid une cuvette d'indigo pulverise, avec partie égale de chaux vive & le double d'alcali de soude, ajoutant

 une

(s) On trouve des notices imparfaites sur la vraye fabrication du chagrin dans *l'Hist. de l'Acad. de Paris 1709 p. 8.* & dans le *Museum museorum de Valentinus* (Edit. allem.) *vol. I. p. 439.* ou les détails assez exacts sont tirés de mémoires venu de l'Inde.

une livre de miel ſur deux d'indigo & de chaux & cinq livres de ſoude; les peaux, pour cette couleur, ne doivent pas avoir paſſé par la ſaumure. — Pour avoir du chagrin d'un beau rouge, l'on commence par blanchir les peaux, en les faiſant tremper, aprés la leſſive, dans une ſolution d'alun bien ſaturée, puis les enduiſant pour quelque temps, des deux cotés, d'une pâte de farine de froment, qu'on enléve en les lavant; aprés quoi on les ſeche au ſoleil, on les frotte légérement avec de la graiſſe de mouton, & on finit par les racler du coté du grain avec un inſtrument de bois, en y verſant toujours de l'eau chaude pour les amollir & pour enlever le ſuperflus de la graiſſe. Ainſi blanchies on les trempe dans la ſaumure pendant 24 heures, & on les teind avec de la cochenille, que l'on a fait bouillir dans une forte décoction d'une eſpéce de Kali (*Salſola vermiculata*), de la même façon qu'on prépare cette couleur pour les maroquins de Turquie. — Le chagrin noir enfin, ſe fait en couvrant les peaux, au ſortir de la ſaumure, avec la poudre de noix de galles, avec laquelle on les laiſſe entaſſées pendant 24 heures, on les ſeche, on les bat, on graiſſe chaque peau avec de la graiſſe de mouton & on finit par les mouiller des deux cotés avec une forte ſolution de vitriol de mars. — Les Boucares paſſent des peaux d'Onagres entiéres à la façon de chagrin noir, pour s'en chauſſer. Mais les chagrins fins de belles couleurs, qui ſe font à Aſtracan & en Perſe, ſont ordinairement des croupes de chevaux, qu'on envoye en grande quantité crûes aux Perſans par le commerce de la Mer caſpienne.

Je

Je ne parlerai point de la pierre d'Onagre, dont *Bauhin* veut diſtinguer deux eſpéces: c'eſt probablement des concretions trouvées dans les Aſnes domeſtiques ou les Mulets, qu'on a données pour ces bézoards d'Onagre, afin de les rendre plus précieuſes dans ces temps d'obſcurité ou les bézoards étaient encore en vogue. Je paſſe ſous ſilence les autres contes qu'on a fait ſur les Onagres & dont on peut s'amuſer en conſultant *Geſner*, *Aldrovande* & *Bochart*. Je ne m'arreterai pas enfin à la mépriſe de quelques auteurs qui ont donné pour le Zébre, d'autres qui ont confondu avec le Gicquetéï, l'Onagre des anciens. La comparaiſon de ce que j'en ai dit, avec la deſcription *d'Oppien* & des autres anciens auteurs, & ſurtout ce paſſage de *Luitprand*, éveque de Cremone, raporté par *Bochart*, prouvent aſſez que l'Aſne ſauvage, que nous venons de décrire, eſt l'Onagre des anciens.

ASTRONOMICA.

DE

THEORIA LUNAE

AD

MAIOREM PERFECTIONIS GRADUM EVEHENDA.

Auctore

L. EVLERO.

Cum motum Lunae ad centrum Terrae, tanquam fixum ſpectatum, referre conueniat, ante omnia locum Lunae per ternas coordinatas determinare opportet, quarum directiones ſint fixae & inter ſe normales. Tum vero omnes vires ſollicitantes ſecundum easdem directiones ſunt reſoluendae, vt ex principiis motus ternae aequationes differentiales ſecundi gradus obtineri queant. Ita ſi planam tabulae eclipticam referat, in quo punctum T ſit centrum Terrae, recta autem T ♈ ad punctum coeli fixum dirigatur, locus Lunae, qui ſit in Z, determinetur per has ternas coordinatas: $TX = X$, $XY = Y$ et $YZ = Z$; tum vires ſollicitantes, poſito elemento temporis $= dt$, huiusmodi ternas aequationes ſuppeditant:

Tab. XIII. Fig. 1.

$$\frac{ddX}{dt^2} = L, \quad \frac{ddY}{dt^2} = M \text{ et } \frac{ddZ}{dt^2} = N,$$

vbi litterae M et N denotant certas functiones tam ipſarum coordinatarum X, Y, Z, quam quantitatum locum Solis definientium. Hic igitur, quoniam Luna nunquam

vltra

vltra certos terminos ab ecliptica diuagatur, quantitas Z perpetuo intra limites ſatis arctos continebitur; binae vero reliquae coordinatae X et Y per totam orbitam lunarem variari poterunt; quam ob rem eas ita ad alium axem reduci conueniet, vt earum variatio certos limites transgredi nequeat. Hanc ob rem ducatur recta T M, Lunae longitudinem mediam exhibens, ad quam ex Y agatur normalis Y x, ita vt nunc locus Lunae per iſtas coordinatas T x, x Y, Y Z definiatur, quarum variatio vtique intra limites ſatis arctos coërcebitur. Nam ſi longitudo Lunae media, ſeu angulus ♈ T M vocetur $= \theta$, qui ergo tempori erit proportionalis, tum erit T $x = $ X coſ. $\theta +$ Y ſin. θ et x Y $=$ Y coſ. $\theta -$ X ſin. θ; tertia autem coordinata manebit Z. Quod ſi iam a denotet diſtantiam Lunae mediam a Terra, poſita diſtantia Terrae media a Sole $= 1$, ita vt a ſit fractio valde parua, ſcilicet $a = \frac{1}{390}$, ac ponatur recta T $x = a(1+x)$, x Y $= ay$ et Y Z $= az$, euidens eſt has nouas quantitates x, y, z ſemper fore ſatis exiguas; ita vt termini, in quibus ea ad plures dimenſiones aſſurgunt, mox pro nihilo haberi queant. His igitur in calculum introductis, ſiquidem per eas erit

$$\mathrm{X} = a(1+x)\,\text{coſ.}\,\theta - ay\,\text{ſin.}\,\theta \text{ et}$$
$$\mathrm{Y} = a(1+x)\,\text{ſin.}\,\theta + ay\,\text{coſ.}\,\theta \text{ et } \mathrm{Z} = az,$$

totum negotium perducitur ad inueſtigandos valores quantitatum exiguarum x, y, z, et facta euolutione omnium formularum, quae in calculum ingrediuntur, ternae aequationes fundamentales ad ſeries terminorum maxime convergentes reuocabuntur. Deinde, hoc calculo expedito, praeter quantitatem conſtantem a inſuper introducantur: 1°. excentricitas orbitae lunaris $=$ K; 2°. excentricitas orbitae ſolaris $= \kappa$; 3°. fractio i ab inclinatione orbitae lunaris

naris pendens; tum vero ternae noſtrae quantitates incognitae ita referantur, vt ſit

$$x = \mathfrak{O} + K\mathfrak{P} + K^2\mathfrak{Q} + K^3\mathfrak{R} + a\mathfrak{S} + aK\mathfrak{T} + \varkappa\mathfrak{U}$$
$$+ \varkappa K\mathfrak{V} + \varkappa K^2\mathfrak{W} + a\varkappa\mathfrak{w}$$
$$+ ii\mathfrak{X} + iiK\mathfrak{Y} + iiK^2\mathfrak{Z}$$
$$y = O + KP + K^2Q + K^3R + aS + aKT + \varkappa U$$
$$+ \varkappa KV + \varkappa K^2W + a\varkappa w$$
$$+ i^2X + i^2KY + i^2K^2Z$$
$$z = i\mathfrak{p} + iK\mathfrak{q} + iK^2\mathfrak{r} + i\varkappa\mathfrak{s} + i^3\mathfrak{t}$$

et, facta ſubſtitutione, ternae aequationes differentiales ſecundi gradus in totidem partes diſcerpantur, quot hic occurrunt diuerſi coefficientes K, K^2, K^3, $\varkappa$ etc. dum ſcilicet termini iisdem affecti coefficientibus ſeorſim inter ſe aequantur. Hoc modo loco ternarum aequationum fundamentalium totidem ordines aequationum particularium obtinebuntur, quas ſingulas haud difficulter integrare licebit.

Hac ſcilicet methodo vſus, omnes inaequalitates motus Lunae olim ſum perſecutus, in tractatu: *Theoria motuum Lunae noua methodo pertractata*, edito Petropoli 1772, vnde ſimul tabulas conſtruxi, quarum ope locus Lunae ad quoduis tempus multo commodius et accuratius determinari poſſe videbatur, quam per alias tabulas vſu receptas, ſi modo ſingula elementa, quibus innituntur, ex obſeruationibus exquiſitiſſimis rite determinentur. Interim tamen nonnullas inaequalites non ſatis accurate definire licuit, cuius autem defectus cauſſa non ipſi Theoriae eſt imputanda, ſed potius difficultati calculi numerici, quem non vltra ſextam figuram in fractionibus decimalibus ſum proſecutus, cum eum vsque ad octauam figuram extendere oportuiſſet.

Poſtquam autem deinceps ſingula momenta, quibus haec methodus erat ſuperſtructa, accuratius perpendiſſem, primo quidem ſtatim perſpexi, hanc methodum adhiberi non potuiſſe, ſi inclinatio orbitae lunaris ad eclipticam multo maior fuiſſet quam reuera deprehenditur; haec autem circumſtantia parui aeſtimanda eſt momenti, cum in vero motu Lunae locum non habeat. Verum ſi quis eandem methodum ad motum ſatellitum Jovis vel etiam Saturni accommodare voluerit, tum vtique maior inclinatio, quae forte in orbitis horum ſatellitum occurreret, omnem ſucceſſum impedire poſſet. Praeterea vero, quia hic ſtatim Lunae motum ad planum eclipticae reduxi, hoc ipſo non nullae inaequalitates ſe immiſcere debuerunt, quas fere penitus euitaſſem, ſi motum Lunae quouis tempore ſaltem ad planum orbitae eius mediae reuocaſſem; hoc autem modo non ſolum calculus prolixior euaderet, ſed etiam ipſa determinatio Lunae, ex valoribus x, y, z petenda, maiorem calculi apparatum requireret. At vero ſi adeo omnes inaequalitates ſimpliciores fierent et ad minorem numerum redigerentur, hoc modo totus labor largiter compenſaretur; quam ob rem vſu non cariturum fore arbitror, ſi hanc ideam motum Lunae repraeſentandi accuratius expoſuero.

SECTIO PRIMA.

De reductione coordinatarum principalium ad planum orbitae Lunaris mediae.

§. 1. Conſtitutis vt ante ternis coordinatis principalibus $TX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$, ad quas principia motus ſunt accommodanda, ducamus primo rectam

Tab. XIII. Fig. 2.

T ☊

T ☊, quae ad tempus propositum referat lineam nodorum, ac vocetur longitudo media nodi ascendentis, seu angulus ♈ T ☊ = ☊; tum vero ducta ex Y normali $Y X'$, vocentur coordinatae ad istum axem relatae $T X' = X'$, $X' Y = Y'$ manente $Y Z = Z$, eritque $X' = X$ cos. ☊ + Y sin. ☊ et $Y' = Y$ cos. ☊ − X sin. ☊. Iam concipiatur planum secundum rectam T ☊ ad eclipticam inclinatum sub angulo $= \iota$, (qui aequetur inclinationi mediae orbitae lunaris, aestimata circiter $= 5°. 9'$) quod planum secet rectam Y Z in O; tum ad rectam $X' O$, productam ex Z, demittatur perpendiculum $Z Y''$, et nunc in hoc plano vocemus coordinatas $T X' = X'' = X'$; $X' Y'' = Y''$ et $Y'' Z = Z''$. Hinc erit $Y'' = Y' \cos. \iota + Z \sin. \iota$ et $Z'' = Z \cos. \iota - Y' \sin. \iota$; sicque habebimus $X'' = X$ cos ☊ + Y sin. ☊; $Y'' = Y$ cos. ☊ cos. ι − X sin. ☊ cos. $\iota + Z \sin. \iota$; $Z'' = Z \cos. \iota - Y$ cos. ☊ sin. ι + X sin. ☊ sin. ι.

§. 2. Referat nunc tabula planum orbitae lunaris, in quo habentur ternae coordinatae modo inuentae $T X' = X''$, $X' Y'' = Y''$ et $Y'' Z = Z''$; tum vero in eodem plano ducatur recta T M, motum Lunae medium referens, quam pro axe assumamus, in quem ex Y'' ducatur perpendiculum $Y'' x$; et quia iam istae coordinatae $T x$, $x Y''$, $Y'' Z$ satis exiguis variationibus sunt obnoxiae, statuamus distantiam Lunae mediam a Terra $= 1$, atque $T x = 1 + x$, $x Y'' = y$ et $Y'' Z = z$. Nunc igitur angulus ☊ T M designat argumentum latitudinis Lunae medium, quod vocemus r, ita vt sit ☊ T M $= r$, iamque habebimus $1 + x = X''$ cos. r + Y'' sin. r; $y = Y''$ cos. $r - X''$ sin. r et $z = Z''$. Quare, si valores ante inuenti substituantur, habebimus sequentes formulas:

Tab. XIII. Fig. 3.

$1 + x$

$$1 + x = X(\text{cof.}\ \Omega\ \text{cof.}\ r - \text{cof.}\ \iota\ \text{fin.}\ \Omega\ \text{fin.}\ r)$$
$$+ Y(\text{fin.}\ \Omega\ \text{cof.}\ r + \text{cof.}\ \iota\ \text{cof.}\ \Omega\ \text{fin.}\ r) + Z\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ r$$
$$y = -X(\text{cof.}\ \iota\ \text{fin.}\ \Omega\ \text{cof.}\ r + \text{cof.}\ \Omega\ \text{fin.}\ r)$$
$$+ Y(\text{cof.}\ \iota\ \text{cof.}\ \Omega\ \text{cof.}\ r - \text{fin.}\ \Omega\ \text{fin.}\ r) + Z\ \text{fin.}\ \iota\ \text{cof.}\ r$$
$$z = X\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ \Omega - Y\ \text{fin.}\ \iota\ \text{cof.}\ \Omega + Z\ \text{cof.}\ \iota.$$

§. 3. Praeterea vero etiam necesse est vt coordinatae X, Y, Z etiam per nostras quantitates exiguas x, y, z exprimantur, quem in finem primo habebimus

$$X'' = (1 + x)\ \text{cof.}\ r - y\ \text{fin.}\ r,$$
$$Y'' = (1 + x)\ \text{fin.}\ r + y\ \text{cof.}\ r \quad \text{et} \quad Z'' = z.$$

Deinde ex paragr. 1°. colligimus

$$Y''\ \text{cof.}\ \iota - Z''\ \text{fin.}\ \iota = -X\ \text{fin.}\ \Omega + Y\ \text{cof.}\ \Omega$$

Cum igitur sit $X'' = X\ \text{cof.}\ \Omega + Y\ \text{fin.}\ \Omega$ erit

$$X''\ \text{cof.}\ \Omega - Y''\ \text{cof.}\ \iota\ \text{fin.}\ \Omega + Z''\ \text{fin.}\ \iota\ \text{cof.}\ \Omega = X$$

Porro

$$X''\ \text{fin.}\ \Omega + Y''\ \text{cof.}\ \iota\ \text{cof.}\ \Omega - Z''\ \text{fin.}\ \iota\ \text{cof.}\ \Omega = Y$$

Denique $Y''\ \text{fin.}\ \iota + Z''\ \text{cof.}\ \iota = Z$. Quare si hic valores ante inuenti substituantur, reperietur:

$$X = (1 + x)(\text{cof.}\ r\ \text{cof.}\ \Omega - \text{cof.}\ \iota\ \text{fin.}\ r\ \text{fin.}\ \Omega)$$
$$-y(\text{fin.}\ r\ \text{cof.}\ \Omega + \text{cof.}\ \iota\ \text{cof.}\ r\ \text{fin.}\ \Omega + z\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ \Omega$$
$$Y = (1 + x)(\text{cof.}\ r\ \text{fin.}\ \Omega + \text{cof.}\ \iota\ \text{fin.}\ r\ \text{cof.}\ \Omega)$$
$$-y(\text{fin.}\ r\ \text{fin.}\ \Omega - \text{cof.}\ \iota\ \text{cof.}\ r\ \text{cof.}\ \Omega) - z\ \text{fin.}\ \iota\ \text{cof.}\ \Omega$$
$$Z = (1 + x)\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ r + y\ \text{fin.}\ \iota\ \text{cof.}\ r + z\ \text{cof.}\ \iota.$$

§. 4. Quo has formulas simpliciores reddamus ponamus breuitatis gratia:

$$\text{cof.}\ r\ \text{cof.}\ \Omega - \text{cof.}\ \iota\ \text{fin.}\ r\ \text{fin.}\ \Omega = m$$
$$\text{cof.}\ r\ \text{fin.}\ \Omega + \text{cof.}\ \iota\ \text{fin.}\ r\ \text{cof.}\ \Omega = n$$
$$\text{fin.}\ r\ \text{fin.}\ \Omega - \text{cof.}\ \iota\ \text{cof.}\ r\ \text{cof.}\ \Omega = \mu$$
$$\text{fin.}\ r\ \text{cof.}\ \Omega + \text{cof.}\ \iota\ \text{cof.}\ r\ \text{fin.}\ \Omega = \nu$$

qui-

quibus valoribus introductis habebimus:

$$1 + x = m X + n Y + Z \sin. \iota \sin. r$$
$$y = -\nu X - \mu Y + Z \sin. \iota \cos. r$$
$$z = X \sin. \iota \sin. \Omega - Y \sin. \iota \cos. \Omega + Z \cos. \iota$$

deinde

$$X = m(1 + x) - \nu y + z \sin. \iota \sin. \Omega$$
$$Y = n(1 + x) - \mu y - z \sin. \iota \cos. \Omega$$
$$Z = (1 + x) \sin. \iota \sin. r + y \sin. \iota \cos. r + z \cos. \iota$$

vbi notasse iuuabit sequentes relationes

I. $m m + \nu \nu + \sin. \iota^2 \sin. \Omega^2 = 1$

II. $n n + \mu \mu + \sin. \iota^2 \cos. \Omega^2 = 1$

III. $m m + n n + \sin. \iota^2 \sin. r^2 = 1$

IV. $\nu \nu + \mu \mu + \sin. \iota^2 \cos. r^2 = 1$

tum vero etiam

V. $m n + \mu \nu - \sin. \iota^2 \sin. \Omega \cos. \Omega = 0$

VI. $- m \nu - n \mu + \sin. \iota^2 \sin. r \cos. r = 0$

VII. $m \sin. \iota \sin. r - \nu \sin. \iota \cos. r + \sin. \iota \cos. \iota \sin. \Omega = 0$

VIII. $n \sin. \iota \sin. r - \mu \sin. \iota \cos. r - \sin. \iota \cos. \iota \cos. \Omega = 0$

IX. $m \sin. \iota \sin. \Omega - n \sin. \iota \cos. \Omega + \sin. \iota \cos. \iota \sin. r = 0$

X. $- \nu \sin. \iota \sin. \Omega + \mu \sin. \iota \cos. \Omega + \sin. \iota \cos. \iota \cos. r = 0$

Ratio harum comparationum in eo est sita, quod duplici modo sit quadratum distantiae Lunae a Terra

$$T Z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = (1 + x)^2 + y^2 + z^2.$$

SECTIO II.

De differentiatione nouarum coordinatarum x, y, z.

§. 5. Cum principia mechanica huiusmodi ternas formulas suppeditent:

$$d d X = L d t^2; \quad d d Y = M d t^2; \quad d d Z = N d t^2$$

vbi

vbi litterae L, M, N sunt certae functiones ipsarum X, Y, Z, hinc valores differentio-differentialium ddx, ddy, ddz elici opportet. Hic igitur tenendum est angulos ☊ et r esse variabiles, inclinationem vero ι esse constantem; vnde formularum m, n, μ, ν differentialia sunt quaerenda, scilicet cum sit:

$$m = \text{cos.}\, r\, \text{cos.}\, ☊ - \text{cos.}\, \iota\, \text{sin.}\, r\, \text{sin.}\, ☊$$
$$n = \text{cos.}\, r\, \text{sin.}\, ☊ + \text{cos.}\, \iota\, \text{sin.}\, r\, \text{cos.}\, ☊$$
$$\mu = \text{sin.}\, r\, \text{sin.}\, ☊ - \text{cos.}\, \iota\, \text{cos.}\, r\, \text{cos.}\, ☊$$
$$\nu = \text{sin.}\, r\, \text{cos.}\, ☊ + \text{cos.}\, \iota\, \text{cos.}\, r\, \text{sin.}\, ☊$$

differentiando reperietur

$$dm = -n\, d☊ - \nu\, dr;\quad dn = m\, d☊ - \mu\, dr$$
$$d\mu = \nu\, d☊ + n\, dr;\quad d\nu = -\mu\, d☊ + m\, dr.$$

§. 6. His differentialibus inuentis sumamus primam nostram aequationem:

$$1 + x = m\text{X} + n\text{Y} + \text{Z}\, \text{sin.}\, \iota\, \text{sin.}\, r$$

quae differentiata dat

$$dx = md\text{X} + nd\text{Y} + d\text{Z}\, \text{sin.}\, \iota\, \text{sin.}\, r - dr(\nu\text{X} + \mu\text{Y} - \text{Z}\, \text{sin.}\, \iota\, \text{cos.}\, r)$$
$$- d☊(n\text{X} - m\text{Y})$$

Est vero

$$\nu\text{X} + \mu y - \text{Z}\, \text{sin.}\, \iota\, \text{cos.}\, r = -y$$

et ex posterioribus formulis

$$n\text{X} - m\text{Y} = y(m\mu - n\nu) + z\, \text{sin.}\, \iota (m\, \text{cos.}\, ☊ + n\, \text{sin.}\, ☊)$$

vbi cum sit

$$m\mu - n\nu = -\text{cos.}\, \iota \quad \text{et} \quad m\, \text{cos.}\, ☊ + n\, \text{sin.}\, ☊ = \text{cos.}\, r$$

habebimus

$$dx = m\, d\text{X} + n\, d\text{Y} + d\text{Z}\, \text{sin.}\, \iota\, \text{sin.}\, r + y\, dr$$
$$+ d☊(y\, \text{cos.}\, \iota - z\, \text{sin.}\, \iota\, \text{cos.}\, r)$$

vnde vicissim colligitur

$$m\, d\text{X} + n\, d\text{Y} + d\text{Z}\, \text{sin.}\, \iota\, \text{sin.}\, r = dx - y(dr + d☊\, \text{cos.}\, \iota)$$
$$+ z\, d☊\, \text{sin.}\, \iota\, \text{cos.}\, r$$

§. 7.

§. 7. Eodem modo tractetur secunda aequatio

$$y = -\nu X - \mu Y + Z \sin. \iota \cos. r$$

quae differentiata praebet

$$dy = -\nu dX - \mu dY + dZ \sin. \iota \cos. r - dr(mX + nY + Z \sin. \iota \sin. r) + d\Omega(\mu X - \nu Y).$$

Est vero

$$mX + nY + Z \sin. \iota \sin. r = 1 + x$$

et ex posterioribus formulis

$$\mu X - \nu Y = (m\mu - n\nu)(1 + x) + z \sin. \iota(\mu \sin. \Omega + \nu \cos. \Omega)$$

siue ob

$$m\mu - n\nu = -\cos. \iota \text{ et } \mu \sin. \Omega + \nu \cos. \Omega = \sin. r$$

erit

$$\mu X - \nu Y = -(1 + x)\cos. \iota + z \sin. \iota \sin. r$$

vnde prodit

$$dy = -\nu dX - \mu dY + dZ \sin. \iota \cos. r - dr(1 + x) - d\Omega((1 + x)\cos. \iota - z \sin. \iota \sin. r)$$

hincque viciſſim colligitur

$$\nu dX + \mu dY - dZ \sin. \iota \cos. r = -dy - (1 + x)(dr + d\Omega \cos. \iota) + z\, d\Omega \sin. \iota \sin. r$$

§. 8. Tertia vero aequatio:

$$z = X \sin. \iota \sin. \Omega - Y \sin. \iota \cos. \Omega + Z \cos. \iota$$

differentiata dat

$$dz = dX \sin. \iota \sin. \Omega - dY \sin. \iota \cos. \Omega + dZ \cos. \iota + d\Omega(X \sin. \iota \cos. \Omega + Y \sin. \iota \sin. \Omega)$$

est vero

$$X \sin. \iota \cos. \Omega + Y \sin. \iota \sin. \Omega = (1 + x)(m \sin. \iota \cos. \Omega + n \sin. \iota \sin. \Omega) - y(\mu \sin. \iota \sin. \Omega + \nu \sin. \iota \cos. \Omega).$$

Cum igitur sit

$$m \sin. \iota \cos. \Omega + n \sin. \iota \sin. \Omega = \sin. \iota \cos. r \text{ et}$$

$$\mu \sin. \iota \sin. \Omega + \nu \sin. \iota \cos. \Omega = \sin. \iota \sin. r \text{ erit}$$

$$X \sin. \iota \cos. \Omega + Y \sin. \iota \sin. \Omega = (1 + x)\sin. \iota \cos. r - y \sin. \iota \sin. r$$

 qui-

quibus substitutis prodibit

$$dz = dX \sin.\iota \sin.\Omega - dY \sin.\iota \cos.\Omega + dZ \cos.\iota$$
$$+ d\Omega((1+x)\sin.\iota \cos.r - y \sin.\iota \sin.r)$$

vnde viciffim colligitur

$$dX \sin.\iota \sin.\Omega - dY \sin.\iota \cos.\Omega + dZ \cos.\iota = dz$$
$$-(1+x)\, d\Omega \sin.\iota \cos.r + y\, d\Omega \sin.\iota \sin.r.$$

§. 9. Ante autem quam ad differentialia secunda descendamus conducet differentialia dX, dY, dZ per literas minusculas exprimere. Cum igitur sit

$$X = m(1+x) - \nu y + z \sin.\iota \sin.\Omega$$

erit differentiando

$$dX = m\,dx - \nu\,dy + dz \sin.\iota \sin.\Omega$$
$$+ d\Omega(z \sin.\iota \cos.\Omega + \mu y - n(1+x)) - dr(my + \nu(1+x)).$$

Eodem modo secunda aequatio

$$Y = n(1+x) - \mu y - z \sin.\iota \cos.\Omega$$

differentiata praebet

$$dY = n\,dx - \mu\,dy - dz \sin.\iota \cos.\Omega$$
$$+ d\Omega(z \sin.\iota \sin.\Omega - \nu y + m(1+x)) - dr(ny + \mu(1+x)).$$

Denique tertia aequatio

$$Z = (1+x) \sin.\iota \sin.r + y \sin.\iota \cos.r + z \cos.\iota$$

differentiata dat

$$dZ = dx \sin.\iota \sin.r + dy \sin.\iota \cos.r + dz \cos.\iota$$
$$+ dr \sin.\iota((1+x)\cos.r - y \sin.r).$$

§. 10. His praeparatis progrediamur ad differentio-differentialia; vbi primo notandum est: quia anguli r et Ω sunt tempori proportionales, eorum differentialia dr et $d\Omega$ pariter esse constantia, perinde atque elementum temporis dt. Hinc primam euoluamus aequationem §. 6. datam, quae erat:

$dx -$

$$d\,x - y\,(d\,r + d\,\Omega\;\text{cof.}\;\iota) + z\,d\,\Omega\;\text{fin.}\;\iota\;\text{cof.}\;r$$
$$= m\,d\,X + n\,d\,Y + d\,Z\;\text{fin.}\;\iota\;\text{fin.}\;r$$

quae differentiata dat

$$d\,d\,x - d\,y\,(d\,r + d\,\Omega\;\text{cof.}\;\iota) + d\,z\,d\,\Omega\;\text{fin.}\;\iota\;\text{cof.}\;r - z\,d\,r\,d\,\Omega\;\text{fin.}\;\iota\;\text{fin.}\;r$$
$$= m\,d\,d\,X + n\,d\,d\,Y + d\,d\,Z\;\text{fin.}\;\iota\;\text{fin.}\;r$$
$$- d\,r\,(\nu\,d\,X + \mu\,d\,Y - d\,Z\;\text{fin.}\;\iota\;\text{cof.}\;r)$$
$$- d\,\Omega\,(n\,d\,X - m\,d\,Y)$$

eſt vero

$$\nu\,d\,X + \mu\,d\,Y - d\,Z\;\text{fin.}\;\iota\;\text{cof.}\;r = -\,d\,y$$
$$-(1+x)(d\,r + d\,\Omega\;\text{cof.}\;\iota) + z\,d\,\Omega\;\text{fin.}\;\iota\;\text{fin.}\;r \quad \text{et}$$

$$n\,d\,X - m\,d\,Y = +\,d\,y\,(m\,\mu - n\,\nu) + d\,z\;\text{fin.}\;\iota\,(n\;\text{fin.}\;\Omega + m\;\text{cof.}\;\Omega)$$
$$+ (1+x)\,(d\,r\,(m\,\mu - n\,\nu) - d\,\Omega\,(m\,m + n\,n))$$
$$+ y\,d\,\Omega\,(\mu\,n + \nu\,m) + z\,d\,\Omega\;\text{fin.}\;\iota\,(n\;\text{cof.}\;\Omega - m\;\text{fin.}\;\Omega)$$

pro cuius formulae vlteriori reductione reperitur fore:

I. $m\,\mu - n\,\nu = -\;\text{cof.}\;\iota$

II. $n\;\text{fin.}\;\Omega + m\;\text{cof.}\;\Omega = \text{cof.}\;r$

III. $m\,m + n\,n = 1 - \text{fin.}\;\iota^2\;\text{fin.}\;r^2$

IV. $\mu\,n + \nu\,m = \text{fin.}\;\iota^2\;\text{fin.}\;r\;\text{cof.}\;r$

V. $n\;\text{cof.}\;\Omega - m\;\text{fin.}\;\Omega = \text{cof.}\;\iota\;\text{fin.}\;r$

ita vt ſit

$$n\,d\,X - m\,d\,Y = -\,d\,y\;\text{cof.}\;\iota + d\,z\;\text{fin.}\;\iota\;\text{cof.}\;r$$
$$-\,(1+x)\,(d\,r\;\text{cof.}\;\iota + d\,\Omega\,(1 - \text{fin.}\;\iota^2\;\text{fin.}\;r^2))$$
$$+ y\,d\,\Omega\;\text{fin.}\;\iota^2\;\text{fin.}\;r\;\text{cof.}\;r + z\,d\,\Omega\;\text{fin.}\;\iota\;\text{cof.}\;\iota\;\text{fin.}\;r$$

quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra erit

$$d\,d\,x - d\,y\,d\,r - d\,y\,d\,\Omega\;\text{cof.}\;\iota + d\,z\,d\,\Omega\;\text{fin.}\;\iota\;\text{cof.}\;r$$
$$- z\,d\,r\,d\,\Omega\;\text{fin.}\;\iota\;\text{fin.}\;r = m\,d\,d\,X + n\,d\,d\,Y$$
$$+ d\,d\,Z\;\text{fin.}\;\iota\;\text{fin.}\;r + d\,y\,d\,r + d\,r^2\,(1+x)$$
$$- z\,d\,\Omega\,d\,r\;\text{fin.}\;\iota\;\text{fin.}\;r + d\,\Omega\,d\,y\;\text{cof.}\;\iota$$
$$- d\,\Omega\,d\,z\;\text{fin.}\;\iota\;\text{cof.}\;r + d\,\Omega^2\,(1+x)$$
$$- d\,\Omega^2\,(1+x)\;\text{fin.}\;\iota^2\;\text{fin.}\;r^2 - y\,d\,\Omega^2\;\text{fin.}\;\iota^2\;\text{fin.}\;r\;\text{cof.}\;r$$
$$- z\,d\,\Omega^2\;\text{fin.}\;\iota\;\text{cof.}\;\iota\;\text{fin.}\;r + 2\,(1+x)\,d\,r\,d\,\Omega\;\text{cof.}\;\iota$$

 quae

quae porro ob

$$ddX = L\,dt^2\,,\quad ddY = M\,dt^2,\quad ddZ = N\,dt^2,$$

reliquis terminis a dextra ad sinistram transpositis, induet hanc formam:

$$\begin{aligned} ddx - 2dr\,dy \quad &+ 2d☊\,dz \sin.\iota \cos.r - 2(1+x)dr\,d☊ \cos.\iota \\ -2d☊\,dy\cos.\iota \quad &- d☊^2(1+x) + d☊^2(1+x)\sin.\iota^2 \sin.r^2 \\ &- dr^2(1+x) \\ &+ y\,d☊^2 \sin.\iota^2 \sin.r \cos.r + z\,d☊^2 \sin.\iota \cos.\iota \sin.r \\ = dt^2\,(m\mathrm{L} &+ n\mathrm{M} + \mathrm{N} \sin.\iota \sin.r). \end{aligned}$$

§. 11. Secunda aequatio §. 7. inuenta ita se habet:

$$dy + (1+x)(dr + d☊\cos.\iota) - z\,d☊\sin.\iota\sin.r$$
$$= -\nu\,dX - \mu\,dY + dZ\sin.\iota\cos.r$$

quae differentiata praebet

$$\begin{aligned} ddy + dx\,(dr + d☊\cos.\iota) - dz\,d☊\sin.\iota\sin.r \\ - z\,dr\,d☊\sin.\iota\cos.r = -\nu\,ddX - \mu\,ddY \\ + ddZ\sin.\iota\cos.r - dr\,(m\,dX + n\,dY + dZ\sin.\iota\sin.r) \\ + d☊\,(\mu\,dX - \nu\,dY). \end{aligned}$$

Ex praecedentibus autem patet esse

$$m\,dX + n\,dY + dZ\sin.\iota\sin.r$$
$$= dx - y\,(dr + d☊\cos.\iota) + z\,d☊\sin.\iota\cos.r$$

tum vero reperitur

$$\begin{aligned} \mu\,dX - \nu\,dY = dx\,(m\mu - n\nu) + dz\sin.\iota(\mu\sin.☊ + \nu\cos.☊) \\ -(1+x)\,d☊\,(n\mu + m\nu) + y\,(d☊\,(\mu\mu + \nu\nu) - dr\,(m\mu - n\nu)) \\ + z\,d☊\sin.\iota(\mu\cos.☊ - \nu\sin.☊) \end{aligned}$$

pro cuius formulae reductione vlteriori notetur esse

I. $m\mu - n\nu = -\cos.\iota$

II. $\mu\sin.☊ + \nu\cos.☊ = \sin.r$

III. $n\mu + m\nu = \sin.\iota^2\sin.r\cos.r$

IV.

IV. $\mu\mu + \nu\nu = 1 - \text{ſin.}\,\iota^2\,\text{coſ.}\,r^2$

V. $\mu\,\text{coſ.}\,☊ - \nu\,\text{ſin.}\,☊ = -\,\text{coſ.}\,\iota\,\text{coſ.}\,r$

vnde fiet

$$\begin{aligned}\mu\,dX - \nu\,dY = &- dx\,\text{coſ.}\,\iota + dz\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{ſin.}\,r\\ &- (1+x)\,d☊\,\text{ſin.}\,\iota^2\,\text{ſin.}\,r\,\text{coſ.}\,r\\ &+ y\,(d☊\,(1 - \text{ſin.}\,\iota^2\,\text{coſ.}\,r^2) + dr\,\text{coſ.}\,\iota)\\ &- z\,d☊\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{coſ.}\,\iota\,\text{coſ.}\,r\end{aligned}$$

et ſubſtitutis his valoribus aequatio noſtra fiet:

$$\begin{aligned}ddY &+ dx\,dr + dx\,d☊\,\text{coſ.}\,\iota - dz\,d☊\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{ſin.}\,r\\ &- z\,dr\,d☊\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{coſ.}\,r = -\nu\,ddX - \mu\,ddY\\ &+ ddZ\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{coſ.}\,r - dx\,dr + y\,dr^2\\ &+ y\,d☊\,dr\,\text{coſ.}\,\iota - z\,d☊\,dr\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{coſ.}\,r\\ &- dx\,d☊\,\text{coſ.}\,\iota + dz\,d☊\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{ſin.}\,r\\ &- (1+x)\,d☊^2\,\text{ſin.}\,\iota^2\,\text{ſin.}\,r\,\text{coſ.}\,r + y\,d☊^2\\ &- y\,d☊^2\,\text{ſin.}\,\iota^2\,\text{coſ.}\,r^2 + y\,dr\,d☊\,\text{coſ.}\,\iota\\ &- z\,d☊^2\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{coſ.}\,\iota\,\text{coſ.}\,r.\end{aligned}$$

Quod ſi iam loco ddX, ddY, ddZ valores dati ſubſtituantur et reliqui membri a dextra ad ſiniſtram transferantur, prodibit iſta aequatio:

$$\begin{aligned}&ddy + 2dx\,dr - 2dz\,d☊\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{ſin.}\,r + (1+x)\,d☊^2\,\text{ſin.}\,\iota^2\,\text{ſin.}\,r\,\text{coſ.}\,r - y\,dr^2\\ &+ 2dx\,d☊\,\text{coſ.}\,\iota \qquad - y\,d☊^2\\ &\qquad - 2y\,d☊\,dr\,\text{coſ.}\,\iota\\ &\qquad + y\,d☊^2\,\text{ſin.}\,\iota^2\,\text{coſ.}\,r^2\\ &+ z\,d☊^2\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{coſ.}\,\iota\,\text{coſ.}\,r\\ &= -\,dt^2\,(\nu L + \mu M - N\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{coſ.}\,r).\end{aligned}$$

§. 12. Tertia denique aequatio differentianda, ex §. 8. ſumta eſt:

$$\begin{aligned}dz - (1+x)\,d☊\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{coſ.}\,r + y\,d☊\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{ſin.}\,r\\ = dX\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{ſin.}\,☊ - dY\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{coſ.}\,☊ + dZ\,\text{coſ.}\,\iota\end{aligned}$$

vnde colligitur

$$dd z - dx d\Omega \sin.\iota \cos.r + dy d\Omega \sin.\iota \sin.r$$
$$+ (1+x) dr d\Omega \sin.\iota \sin.r + y dr d\Omega \sin.\iota \cos.r$$
$$= dd X \sin.\iota \sin.\Omega - dd Y \sin.\iota \cos.\Omega + dd Z \cos.\iota$$
$$+ d\Omega (dX \sin.\iota \cos.\Omega + dY \sin.\iota \sin.\Omega)$$

vbi est

$$dX \cos.\Omega + dY \sin.\Omega = dx (m \cos.\Omega + n \sin.\Omega)$$
$$- dy (\nu \cos.\Omega + \mu \sin.\Omega) + (1+x) d\Omega (m \sin.\Omega - n \cos.\Omega)$$
$$- (1+x) dr (\nu \cos.\Omega + \mu \sin.\Omega) + y d\Omega (\mu \cos.\Omega - \nu \sin.\Omega)$$
$$- y dr (m \cos.\Omega + n \sin.\Omega) + z d\Omega \sin.\iota.$$

Supra autem iam obseruauimus esse:

1°. $m \cos.\Omega + n \sin.\Omega = \cos.r$

2°. $\nu \cos.\Omega + \mu \sin.\Omega = \sin.r$

3°. $m \sin.\Omega - n \cos.\Omega = -\cos.\iota \sin.r$

4°. $\mu \cos.\Omega - \nu \sin.\Omega = -\cos.\iota \cos.r$

sicque erit

$$dX \cos.\Omega + dY \sin.\Omega = dx \cos.r - dy \sin.r$$
$$- (1+x) d\Omega \cos.\iota \sin.r - (1+x) dr \sin.r$$
$$- y d\Omega \cos.\iota \cos.r - y dr \cos.r + z d\Omega \sin.\iota$$

vnde tandem obtinetur sequens aequatio:

$$ddz - 2dxd\Omega \sin.\iota \cos.r + 2(1+x) drd\Omega \sin.\iota \sin.r + 2ydrd\Omega \sin.\iota \cos.r$$
$$+ 2dyd\Omega \sin.\iota \sin.r + (1+x) d\Omega^2 \sin.\iota \cos.\iota \sin.r + yd\Omega^2 \sin.\iota \cos.\iota \cos.r$$
$$- z d\Omega^2 \sin.\iota^2$$
$$= dt^2 (L \sin.\iota \sin.\Omega - M \sin.\iota \cos.\Omega + N \cos.\iota).$$

§. 13. Quoniam hae euolutiones summam attentionem postulant, quo de harum formularum veritate magis conuincamur alia easdem methodo inuestigemus, vtramque scilicet differentiationem simul peragamus. Cum igitur in genere sit:

$$dd.pq = p ddq + 2 dp dq + q ddp$$

supra

supra autem inuenerimus

$$dm = -n\,d\Omega - \nu\,dr;\quad dn = m\,d\Omega - \mu\,dr;\quad d\mu = \nu\,d\Omega + n\,dr;\quad d\nu = -\mu\,d\Omega + m\,dr$$

erit denuo differentiando:

$$ddm = -m\,dr^2 + 2\mu\,dr\,d\Omega - m\,d\Omega^2$$
$$ddn = -n\,dr^2 + 2\nu\,dr\,d\Omega - n\,d\Omega^2$$
$$dd\mu = -\mu\,dr^2 + 2m\,dr\,d\Omega - \mu\,d\Omega^2$$
$$dd\nu = -\nu\,dr^2 + 2n\,dr\,d\Omega - \nu\,d\Omega^2.$$

§. 14. Cum igitur prima nostrarum formularum sit

$$1 + x = mX + nY + Z\,\text{sin.}\,\iota\,\text{sin.}\,r$$

erit statim bis differentiando

$$\begin{aligned} ddx = {} & m\,ddX + n\,ddY + ddZ\,\text{sin.}\,\iota\,\text{sin.}\,r \quad - - - - \text{(I)} \\ & + 2\,dX\,dm + 2\,dY\,dn + 2\,dZ\,dr\,\text{sin.}\,\iota\,\text{cos.}\,r \quad - - \text{(II)} \\ & + X\,ddm + Y\,ddn - Z\,dr^2\,\text{sin.}\,\iota\,\text{sin.}\,r \quad - - - - \text{(III)} \end{aligned}$$

quas ternas partes seorsim euoluamus, ac primo quidem erit, vt supra vidimus

$$\text{(I)} \quad - - \quad dt^2(mL + nM + N\,\text{sin.}\,\iota\,\text{sin.}\,r)$$

(II) in haec duo membra resoluitur:

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad & + 2\,dr(-\nu\,dX - \mu\,dY + dZ\,\text{sin.}\,\iota\,\text{cos.}\,r) \\ & + 2\,d\Omega(-n\,dX + m\,dY) \end{aligned}$$

at vero tertia pars in haec tria membra discerpitur

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad - - \quad & + dr^2(-mX - nY - Z\,\text{sin.}\,\iota\,\text{sin.}\,r) \\ & + 2\,dr\,d\Omega(\mu X - \nu Y) \\ & + d\Omega^2(-mX - nY) \end{aligned}$$

supra autem vidimus esse:

$$\begin{aligned} -\nu\,dX - \mu\,dY + dZ\,\text{sin.}\,\iota\,\text{cos.}\,r = {} & dy + (1 + x)(dr + d\Omega\,\text{cos.}\,\iota) \\ & - z\,d\Omega\,\text{sin.}\,\iota\,\text{sin.}\,r \end{aligned}$$

$-n\,d$

$$-n\,dX+m\,dY=dy\cos\iota-dz\sin\iota\cos r$$
$$+(1+x)\left(dr\cos\iota+d\text{☊}\,(1-\sin\iota^2\sin r^2)\right)$$
$$-y\,d\text{☊}\sin\iota^2\sin r\cos r-z\,d\text{☊}\sin\iota\cos\iota\sin r$$

pro tertia autem parte pariter iam supra inuenimus:

$$-mX-nY-Z\sin\iota\sin r=-(1+x)$$
$$\mu X-\nu Y=-(1+x)\cos\iota+z\sin\iota\sin r$$
$$-mX-nY=-(1+x)+Z\sin\iota\sin r=-(1+x)(1-\sin\iota^2\sin r^2)$$
$$+y\sin\iota^2\sin r\cos r+z\sin\iota\cos\iota\sin r$$

His igitur colligendis erit

$$(II)+(III)=\begin{matrix}+2dr\,dy\\+2d\text{☊}\,dy\cos\iota\end{matrix}\quad-2d\text{☊}\,dz\sin\iota\cos r+(1+x)dr^2$$
$$+2(1+x)dr\,d\text{☊}\cos\iota$$
$$+(1+x)d\text{☊}^2$$
$$-(1+x)d\text{☊}^2\sin\iota^2\sin r^2$$
$$-y\,d\text{☊}^2\sin\iota^2\sin r\cos r-z\,d\text{☊}^2\sin d\iota\cos\iota\cos r$$

his igitur terminis ad sinistram translatis aequatio prodit:

$$ddx-2dr\,dy+2d\text{☊}\,dz\sin\iota\cos r-(1+x)dr^2$$
$$-2d\text{☊}\,dy\cos\iota\qquad-2(1+x)dr\,d\text{☊}\cos\iota$$
$$-(1+x)d\text{☊}^2$$
$$+(1+x)d\text{☊}^2\sin\iota^2\sin r^2+y\,d\text{☊}^2\sin\iota^2\sin r\cos r$$
$$+z\,d\text{☊}^2\sin\iota\cos\iota\sin r=(mL+nM+N\sin\iota\sin r)\,dt^2$$

quae cum praecedente §. 10. exhibita prorsus congruit.

§. 15. Deinde cum altera nostra aequatio fuerit

$$y=-\nu X-\mu Y+Z\sin\iota\cos r$$

erit pariter bis differentiando

$$ddy=-\nu\,ddX-\mu\,ddY+ddZ\sin\iota\cos r\;\ldots\;(I)$$
$$-2dX\,d\nu-2dY\,d\mu-2dZ\,dr\sin\iota\sin r\;(II)$$
$$-X\,dd\nu-Y\,dd\mu-Z\,dr^2\sin\iota\cos r\;\ldots\;(III)$$

quae singulae partes euolutae praebent

(I) $dt^2(-\nu L-\mu M+N\sin\iota\cos r$

(II) $2dr(-m\,dX-n\,dY-dZ\sin\iota\sin r)$
$+2d\text{☊}(+\mu\,dX-\nu\,dY)$

(III)

$$(III)\; dr^2(+\nu X+\mu Y-Z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,r)$$
$$+2\,dr\,d\Omega(nX-mY)$$
$$+d\Omega^2(\nu X+\mu Y)$$

noti autem funt fequentes valores:

$$-m\,dX-n\,dY-dZ\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,r=-dx+y(dr+d\Omega\,\text{cof.}\,\iota)$$
$$-z\,d\Omega\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,r$$

$$\mu\,dX-\nu\,dY=-dx\,\text{cof.}\,\iota+dz\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,r-(1+x)d\Omega\,\text{fin.}\,\iota^2\,\text{fin.}\,r\,\text{cof.}\,r$$
$$+y(d\Omega(1-\text{fin.}\,\iota^2\,\text{cof.}\,r^2)+dr\,\text{cof.}\,\iota)-z\,d\Omega\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\iota\,\text{cof.}\,r$$

$$\nu X+\mu Y-Z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,r=-y$$

$$nX-mY=-y\,\text{cof.}\,\iota+z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,r$$

$$\nu X+\mu Y=-y+Z\,\text{fin.}\,\text{cof.}\,r=(1+x)\,\text{fin.}\,\iota^2\,\text{fin.}\,r\,\text{cof.}\,r$$
$$-y(1-\text{fin.}\,\iota^2\,\text{cof.}\,r^2)+z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\iota\,\text{cof.}\,r)$$

quibus collectis erit

$$(II)+(III)=\begin{matrix}-2dr\,dx\\-2d\Omega\,dx\,\text{cof.}\,\iota\end{matrix}\;+2d\Omega\,dz\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,r-(1+x)d\Omega^2\,\text{fin.}\,\iota^2\,\text{fin.}\,r\,\text{cof.}\,r+y\,dr^2$$
$$+2y\,dr\,d\Omega\,\text{cof.}\,\iota$$
$$+y\,d\Omega^2$$
$$-y\,d\Omega^2\,\text{fi.}\,\iota^2\,\text{cf.}\,r^2$$
$$-z\,d\Omega^2\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\iota\,\text{cof}\,r$$

quibus ad finiftram translatis prodit:

$$ddy+2dr\,dx\;-2d\Omega\,dz\,\text{fi.}\,\iota\,\text{fi.}\,r+(1+x)d\Omega^2\,\text{fi.}\,\iota^2\,\text{fi.}\,r\,\text{cf.}\,r-y\,dr^2$$
$$+2d\Omega\,dx\,\text{cof.}\,\iota\qquad -2y\,dr\,d\Omega\,\text{cof.}\,\iota$$
$$-y\,d\Omega^2$$
$$+y\,d\Omega^2\,\text{fi.}\,\iota^2\,\text{cf.}\,r^2$$
$$+z\,d\Omega^2\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\iota\,\text{cof.}\,r$$
$$=-dt^2(\nu L+\mu M-N\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,r)$$

quae cum praecedente §. 11. exhibita pariter congruit.

§. 16. Tertia aequatio erat

$$z=X\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\Omega-Y\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\Omega+Z\,\text{cof.}\,\iota,$$

quae bis differentiata dat

$$ddz = ddX\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\Omega - ddY\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\Omega + ddZ\,\text{cof.}\,\iota \quad - \quad (\text{I})$$
$$+ 2\,dX\,d\Omega\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\Omega + 2\,dY\,d\Omega\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\Omega \quad - \; - \quad (\text{II})$$
$$- X\,d\Omega^2\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\Omega + Y\,d\Omega^2\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\Omega \quad - \; - \quad (\text{III})$$

quae partes facile ita reducuntur:

$$(\text{I}) \quad - \; - \quad dt^2(L\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\Omega - M\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\Omega + N\,\text{cof.}\,\iota$$
$$(\text{II}) \quad - \; - \quad 2\,d\Omega\,\text{fin.}\,\iota(dX\,\text{cof.}\,\Omega + dY\,\text{fin.}\,\Omega)$$
$$(\text{III}) \quad - \; - \quad d\Omega^2\,\text{fin.}\,\iota(-X\,\text{fin.}\,\Omega + Y\,\text{cof.}\,\Omega).$$

Eſt vero

$$dX\,\text{cof.}\,\Omega + dY\,\text{fin.}\,\Omega = dx\,\text{cof.}\,r - dy\,\text{fin.}\,r - (1+x)d\Omega\,\text{cof.}\,\iota\,\text{fin.}\,r$$
$$-(1+x)\,dr\,\text{fin.}\,r - y\,d\Omega\,\text{cof.}\,\iota\,\text{cof.}\,r - y\,dr\,\text{cof.}\,r + z\,d\Omega\,\text{fin.}\,\iota$$
$$-X\,\text{fin.}\,\Omega + Y\,\text{cof.}\,\Omega = (1+x)\,\text{cof.}\,\iota\,\text{fin.}\,r + \text{cof.}\,\iota\,\text{cof.}\,r - z\,\text{fin.}\,\iota$$

quibus ſubſtitutis colligimus

$$(\text{II}) + (\text{III}) = 2\,d\Omega\,dx\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,r - 2\,d\Omega\,dy\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,r$$
$$-(1+x)\,d\Omega^2\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\iota\,\text{fin.}\,r - y\,d\Omega^2\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\iota\,\text{cof.}\,r$$
$$+ z\,d\Omega^2\,\text{fin.}\,\iota^2 - 2(1+x)\,dr\,d\Omega\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,r$$
$$- 2\,y\,dr\,d\Omega\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,r$$

quibus ad ſiniſtram translatis aequatio ita ſe habebit:

$$ddz - 2d\Omega\,dx\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,r + 2d\Omega\,dy\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,r + (1+x)d\Omega^2\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\iota\,\text{fin.}\,r$$
$$+ y\,d\Omega^2\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\iota\,\text{cof.}\,r - z\,d\Omega^2\,\text{fin.}\,\iota^2 =$$
$$= dt^2(L\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\Omega - M\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\Omega + N\,\text{cof.}\,\iota)$$
$$+ 2(1+x)\,dr\,d\Omega\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,r + 2\,y\,dr\,d\Omega\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,r$$

quae etiam congruit cum illa §. 12. exhibita.

§. 17. Ternae ergo aequationes differentio-differentiales, ex quibus motum Lunae determinari oportet, ſequenti modo aſpectui exponantur:

$$\text{I}\quad ddx - 2dy(dr + d\Omega\,\text{cof.}\,\iota) + 2\,d\Omega\,dz\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,r$$
$$-(1+x)(dr^2 + 2\,dr\,d\Omega\,\text{cof.}\,\iota) + d\Omega^2(1 - \text{fin.}\,\iota^2\,\text{fin.}\,r^2)$$
$$+ y\,d\Omega^2\,\text{fin.}\,\iota^2\,\text{fin.}\,r\,\text{cof.}\,r + z\,d\Omega^2\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\iota\,\text{fin.}\,r$$
$$= dt^2(mL + nM + N\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,r$$

II

$$\left.\begin{array}{l} \text{II. } ddy + 2dx(dr + d☊ \cos.\iota) - 2☊ dz \sin.\iota \sin. r \\ \quad - y(dr^2 + 2dr\,d☊ \cos.\iota + d☊^2(1 - \sin.\iota^2 \cos. r^2) \\ \quad + (1+x) d☊^2 \sin.\iota^2 \sin. r \cos. r + z\,d☊^2 \sin.\iota \cos.\iota \cos. r \end{array}\right\}$$
$$= - dt^2(\nu L + \mu M - N \sin.\iota \cos. r)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{III } ddz - 2d☊ dx \sin.\iota \cos. r + 2d☊ dy \sin.\iota \sin. r - z d☊^2 \sin.\iota^2 \\ \quad + (1+x)(2dr\,d☊ \sin.\iota \sin. r + d☊^2 \sin.\iota \cos.\iota \sin. r) \\ \quad + y(2dr\,d☊ \sin.\iota \cos r + d☊^2 \sin.\iota \cos.\iota \cos. r) \end{array}\right\}$$
$$= dt^2(L \sin.\iota \sin. ☊ - M \sin.\iota \cos. ☊ + N \cos.\iota)$$

vbi meminiſſe iuuabit breuitatis gratia nos poſuiſſe

$$m = \cos. r \cos. ☊ - \cos.\iota \sin. r \sin. ☊$$
$$n = \cos. r \sin. ☊ + \cos.\iota \sin. r \cos. ☊$$
$$\mu = \sin. r \sin. ☊ - \cos.\iota \cos. r \cos. ☊$$
$$\nu = \sin. r \cos. ☊ + \cos.\iota \cos. r \sin. ☊$$

Praeterea vero formulae principales, vnde has aequationes deduximus, erant:

$1+x = mX + nY + Z\sin.\iota\sin. r$	$X = m(1+x) - \nu y + z\sin.\iota\sin. ☊$
$y = -\nu X - \mu Y + Z\sin.\iota\cos. r$	$Y = n(1+x) - \mu y - z\sin.\iota\cos. ☊$
$z = X\sin.\iota\sin. ☊ - Y\sin.\iota\cos. ☊ + Z\cos.\iota$	$Z = (1+x)\sin.\iota\sin. r + y\sin.\iota\cos. r + z\cos.\iota$

SECTIO III.

De valoribus litterarum L, M, N, ex principiis motus deducendis.

Tab. XIII Fig. 4.

§. 18. Denotent ſigna ♁, ☉, ☾ maſſas Terrae, Solis et Lunae, quas, poſita maſſa Terrae ♁ = 1, ex nouiſſimis obſeruationibus concludimus fore ☉ = 360000; at vero maſſam Lunae ☾ = $\frac{1}{55}$ propemodum. Parum autem intereſt quanta ſit maſſa Lunae, quandoquidem *Newtonus* eam ſtatuit = $\frac{1}{45}$, Illuſtris *Daniel Bernoulli* eam reduxit ad $\frac{1}{70}$ tantum. His poſitis ſit, vti initio, Z locus

 Lunae

Lunae per ternas coordinatas $TX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$ determinatus, exiſtente T centro Terrae et recta $T\,♈$ directione fixa ad aequinoctium vernum tendente; tum vero, vocetur diſtantia Lunae a Terra $TZ = v$, ita vt ſit $vv = X^2 + Y^2 + Z^2$. Nouimus autem per nouas coordinatas $1 + x$, y, z eſſe etiam

$$v^2 = (1 + x)^2 + yy + zz.$$

Praeterea vero ſit centrum Solis in S, pro quo binae coordinatae ſint $TU = \mathfrak{x}$ et $US = \mathfrak{y}$, ipſa autem Solis a Terra diſtantia vocetur $TS = u$, ita vt ſit $uu = \mathfrak{x}\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\mathfrak{y}$; vnde ſi ponatur longitudo Solis vera, ſeu angulus $♈TS = \Phi$ erit $\mathfrak{x} = u \operatorname{cof.} \Phi$ et $\mathfrak{y} = u \operatorname{fin.} \Phi$. Porro vero vocetur diſtantia Solis a Luna, ſeu recta $SZ = w$ eritque

$$ww = (\mathfrak{x} - X)^2 + (\mathfrak{y} - Y)^2 + ZZ = uu - 2\mathfrak{x}X - 2\mathfrak{y}Y + vv$$

ſiue

$$w^2 = uu - 2uX \operatorname{cof.} \Phi - 2uY \operatorname{fin.} \Phi + vv.$$

§. 19. Quod ſi iam $d\tau$ denotet elementum temporis indefinitum, cui coefficientum Δ adiungamus, huius valor ſtatim determinabitur ac menſuram temporis ideoneam ſtabiliuerimus. His poſitis ex principiis motus facile deducuntur ſequentes tres aequationes ſecundi gradus:

$$\text{I.} \quad \frac{ddX}{\Delta d\tau^2} = -\frac{(♁ + ☾)X}{v^3} + \frac{⊙(\mathfrak{x} - X)}{w^3} - \frac{⊙\mathfrak{x}}{u^3}$$

$$\text{II.} \quad \frac{ddY}{\Delta dt^2} = -\frac{(♁ + ☾)Y}{v^3} + \frac{⊙(\mathfrak{y} - Y)}{w^3} - \frac{⊙\mathfrak{y}}{u^3}$$

$$\text{III.} \quad \frac{ddZ}{\Delta d\tau^2} = -\frac{(♁ + ☾)Z}{v^3} - \frac{⊙Z}{w^3}.$$

Ante autem quam has aequationes ad noſtrum inſtitutum accommodare queamus, certam temporis menſuram ſtabilire oportet, id quod ſequenti modo praeſtabimus.

§. 20.

§. 20. Consideremus solum Solem circa Terram quasi fixam in circulo reuolui, cuius radius sit distantia Solis media a Terra $= a$, ac formulae eius motum determinantes erunt

$$\frac{dd\mathfrak{x}}{\Delta d\tau^2} = -\frac{(\odot + ♁)\mathfrak{x}}{u^3} \text{ et } \frac{dd\mathfrak{y}}{\Delta d\tau^2} = -\frac{(\odot + ♁)\mathfrak{y}}{u^3}.$$

Ponamus nunc tempore τ a Sole describi anomaliam mediam $= t$, et cum sit $u = a$, ponere licebit

$$\mathfrak{x} = a \operatorname{cos.} t \text{ et } \mathfrak{y} = a \operatorname{sin.} t$$

vnde fit

$$dd\mathfrak{x} = -a\,dt^2 \operatorname{cos.} t \text{ et } dd\mathfrak{y} = -a\,dt^2 \operatorname{sin.} t$$

quibus valoribus substitutis prior aequatio euadit

$$\frac{a\,dt^2 \operatorname{cos.} t}{\Delta d\tau^2} = + \frac{(\odot + ♁) \operatorname{cos.} t}{aa} \text{ vnde fit}$$

$$\Delta d\tau^2 = + \frac{a^3\,dt^2}{\odot + ♁} \text{ hincque } \frac{1}{\Delta d\tau^2} = \frac{\odot + ♁}{a^3\,dt^2}$$

altera vero aequatio sponte idem praebet. Nunc autem motum Lunae ita inuestigemus, quasi a sola Terra attracta in circulo reuolueretur ad distantiam mediam $= 1$, ac tempore τ angulum circa Terram describeret $= \theta$, qui scilicet longitudinem Lunae mediam designabit. Pro hoc ergo motu, quem in ecliptica fieri concipiamus, habebimus has aequationes:

$$\frac{ddX}{\Delta d\tau^2} = -\frac{(♁ + ☾)X}{v^3} \text{ et } \frac{ddY}{\Delta d\tau^2} = -\frac{(♁ + ☾)Y}{v^3}$$

quare, cum in hac hypothesi sit $v = 1$, $X = \operatorname{cos.} \theta$ et $Y = \operatorname{sin.} \theta$ erit

$$ddX = -d\theta^2 \operatorname{cos.} \theta \text{ et } ddY = -d\theta^2 \operatorname{sin.} \theta$$

quibus valoribus substitutis vtraque aequatio praebet

$$\frac{d\theta^2}{\Delta d\tau^2} = ♁ + ☾,$$

vnde si loco $\Delta d\tau^2$ valor modo inuentus substituatur, prodibit

dibit $\frac{d\theta^2(\odot + \female)}{a^3 dt^2} = \female + ☾$. Cum igitur ratio inter motum medium Lunae ac ſolis vt cognita ſpectari poſſit, ſtatuamus $\frac{d\theta}{dt} = \lambda$, fietque $\frac{\lambda\lambda(\odot + \female)}{a^3} = \female + ☾$, vnde concludimus $a^3 = \frac{\lambda\lambda(\odot + \female)}{\female + ☾}$ hincque $\frac{1}{\Delta d\tau^2} = \frac{\female + ☾}{\lambda\lambda dt^2}$.

§. 21. Hos igitur valores in noſtras aequationes principales introducamus ac reperiemus

$$\text{I.}\quad \frac{(\female + ☾)ddX}{\lambda\lambda dt^2} = -\frac{(\female + ☾)X}{v^3} + \frac{\odot(\mathfrak{x} - X)}{w^3} - \frac{\odot \mathfrak{x}}{u^3}$$

$$\text{II.}\quad \frac{(\female + ☾)ddY}{\lambda\lambda dt^2} = -\frac{(\female + ☾)Y}{v^3} + \frac{\odot(\mathfrak{y} - Y)}{w^3} - \frac{\odot \mathfrak{y}}{u^3}$$

$$\text{III.}\quad \frac{(\female + ☾)ddZ}{\lambda\lambda dt^2} = -\frac{(\female + ☾)Z}{v^3} - \frac{\odot Z}{w^3}.$$

Cum igitur ſumſerimus

$$\frac{ddX}{dt^2} = L, \quad \frac{ddY}{dt^2} = M, \quad \frac{ddZ}{dt^2} = N$$

hinc reperiemus has litteras L, M, N ſequenti modo

$$1°.\quad L = -\frac{\lambda\lambda X}{v^3} + \frac{\lambda\lambda\odot(\mathfrak{x} - X)}{(\female + ☾)w^3} - \frac{\lambda\lambda\odot\mathfrak{x}}{(\female + ☾)u^3}$$

$$2°.\quad M = -\frac{\lambda\lambda Y}{v^3} + \frac{\lambda\lambda\odot(\mathfrak{y} - Y)}{(\female + ☾)w^3} - \frac{\lambda\lambda\odot\mathfrak{y}}{(\female + ☾)u^3}$$

$$3°.\quad N = -\frac{\lambda\lambda Z}{v^3} - \frac{\lambda\lambda\odot Z}{(\female + ☾)w^3}.$$

In

In posterioribus autem terminis signo $\odot$ affectis pro λ scribamus eius valorem $\lambda\lambda = \frac{a^3(\text{♁}+\text{☾})}{\odot+\text{♁}}$, vnde fit $\frac{\lambda\lambda\odot}{\text{♁}+\text{☾}} = \frac{a^3\odot}{\odot+\text{♁}} = a^3$, quandoquidem Terrae massa est quasi infinite parua respectu massae Solis hinc igitur habebimus

$$L = -\frac{\lambda\lambda X}{v^3} + \frac{a^3(\mathfrak{x}-X)}{w^3} - \frac{a^3\mathfrak{x}}{u^3}$$

$$M = -\frac{\lambda\lambda Y}{v^3} + \frac{a^3(\mathfrak{y}-Y)}{w^3} - \frac{a^3\mathfrak{y}}{u^3}$$

$$N = -\frac{\lambda\lambda Z}{v^3} - \frac{a^3 Z}{w^3}$$

§. 22. Hos valores secundum litteras $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ et X, Y, Z partiamur, et obtinebimus sequentes valores:

$$L = -X\left(\frac{\lambda\lambda}{v^3} + \frac{a^3}{w^3}\right) + \mathfrak{x}\left(\frac{a^3}{w^3} - \frac{a^3}{u^3}\right)$$

$$M = -Y\left(\frac{\lambda\lambda}{v^3} + \frac{a^3}{w^3}\right) + \mathfrak{y}\left(\frac{a^3}{w^3} - \frac{a^3}{u^3}\right)$$

$$N = -Z\left(\frac{\lambda\lambda}{v^3} + \frac{a^3}{w^3}\right).$$

Hic igitur breuitatatis gratia statuamus $\frac{\lambda\lambda}{v^3} + \frac{a^3}{w^3} = F$ et $\frac{a^3}{w^3} - \frac{a^3}{u^3} = G$, ita vt habeamus

$$L = -FX + G\mathfrak{x},\ M = -FY + G\mathfrak{y},\ N = -FZ.$$

§. 23. Hinc igitur facile formulas in principalibus nostris aequationibus in fine sectionis praecedentis exhibitis, quae ad dextram partem erant dispositae, euoluemus: reperiemus enim

$$mL + nM + N\sin.\iota\sin.r = -F(1+x) + G(m\mathfrak{x}+n\mathfrak{y})$$

$$\nu L + \mu M - N\sin.\iota\cos.r = +Fy + G(\nu\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y})$$

$$L\sin.\iota\sin.\text{☊} - M\sin.\iota\cos.\text{☊} + N\cos.\iota = -Fz + G(\mathfrak{x}\sin.\iota\sin.\text{☊} - \mathfrak{y}\sin.\iota\cos.\text{☊}).$$

§. 24.

§. 24. Operae igitur pretium erit, hos valores in aequationibus nostris fundamentalibus substituere, vt in posterum nulla amplius mentio literarum L, M, N occurrat:

$$\left.\begin{array}{l} ddx - 2dy(dr + d\Omega \text{ cos. } \iota) + 2d\Omega dz \text{ sin. } \iota \text{ cos. } r \\ \quad -(1+x)(dr^2 + 2drd\Omega \text{ cos. } \iota + d\Omega^2(1 - \text{sin. } \iota^2 \text{ sin. } r^2)) \\ \quad + y d\Omega^2 \text{ sin. } \iota^2 \text{ sin. } r \text{ cos. } r + z d\Omega^2 \text{ sin. } \iota \text{ cos. } \iota \text{ sin. } r \end{array}\right\}$$

$$= -F(1+x)dt^2 + G(m\mathfrak{x} + n\mathfrak{y})dt^2$$

$$\left.\begin{array}{l} ddy + 2dx(dr + d\Omega \text{ cos. } \iota) - 2d\Omega dz \text{ sin. } \iota \text{ sin. } r \\ \quad -y(dr^2 + 2drd\Omega \text{ cos. } \iota + d\Omega^2(1 - \text{sin. } \iota^2 \text{ cos. } r^2)) \\ \quad + (1+x)d\Omega^2 \text{ sin. } \iota^2 \text{ sin. } r \text{ cos. } r + z d\Omega^2 \text{ sin. } \iota \text{ cos. } \iota \text{ cos. } r \end{array}\right\}$$

$$= -Fydt^2 - G(\nu\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y})dt^2$$

$$\left.\begin{array}{l} ddz - 2d\Omega dx \text{ sin. } \iota \text{ cos. } r + 2d\Omega dy \text{ sin. } \iota \text{ sin. } r - z d\Omega^2 \text{ sin. } \iota^2 \\ \quad + (1+x)(2drd\Omega \text{ sin. } \iota \text{ sin. } r + d\Omega^2 \text{ sin. } \iota \text{ cos. } \iota \text{ sin. } r) \\ \quad + y(2drd\Omega \text{ sin. } \iota \text{ cos. } r + d\Omega^2 \text{ sin. } \iota \text{ cos. } \iota \text{ cos. } r) \end{array}\right\}$$

$$= -Fzdt^2 + G(\mathfrak{x} \text{ sin. } \iota \text{ sin. } \Omega - \mathfrak{y} \text{ sin. } \iota \text{ cos. } \Omega)dt^2.$$

SECTIO IV.

De exstirpatione literarum $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, et X, Y.

§. 25. Introducendo longitudinem Solis veram ♈ T S $= \Phi$, cum eius distantia a Terra T S $= u$, vidimus esse $\mathfrak{x} = u \text{ cos. } \Phi$ et $\mathfrak{y} = u \text{ sin. } \Phi$, vnde sequentes formulae euoluendae occurrunt:

$$\text{I. } m\mathfrak{x} + n\mathfrak{y} = u(m \text{ cos. } \Phi + n \text{ sin. } \Phi)$$

cum igitur sit

$$m = \text{cos. } r \text{ cos. } \Omega - \text{cos. } \iota \text{ sin. } r \text{ sin. } \Omega \text{ et}$$

$$n = \text{cos. } r \text{ sin. } \Omega + \text{cos. } \iota \text{ sin. } r \text{ cos. } \Omega \text{ erit}$$

$$m \text{ cos. } \Phi + n \text{ sin. } \Phi = \text{cos. } r \text{ cos. } (\Phi - \Omega) + \text{cos. } \iota \text{ sin. } r \text{ sin. } (\Phi - \Omega)$$

hinc igitur erit

$$m\mathfrak{x} + n\mathfrak{y} = u(\text{cos. } r \text{ cos. } (\Phi - \Omega) + \text{cos. } \iota \text{ sin. } r \text{ sin. } (\Phi - \Omega)).$$

§. 26.

§. 26. Deinde in secunda aequatione occurrit ista formula: $\nu\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}$; quia igitur est

$$\nu\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}=u(\nu\cos.\Phi+\mu\sin.\Phi),\text{ ob}$$
$$\mu=\sin.r\sin.\text{☊}-\cos.\iota\cos.r\cos.\text{☊}\text{ et}$$
$$\nu=\sin.r\cos.\text{☊}+\cos.\iota\cos.r\sin.\text{☊}\text{ erit}$$
$$\nu\cos.\Phi+\mu\sin.\Phi=\sin.r\cos.(\Phi-\text{☊})-\cos.\iota\cos.r\sin.(\Phi-\text{☊})$$

vnde nostra formula reducenda erit

$$\nu\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}=u(\sin.r\cos.(\Phi-\text{☊})-\cos.\iota\cos.r\sin.(\Phi-\text{☊})).$$

§. 27. In tertia tandem aequatione occurrit:

$$\mathfrak{x}\sin.\text{☊}-\mathfrak{y}\cos.\text{☊}=u(\cos.\Phi\sin.\text{☊}-\sin.\Phi\cos.\text{☊})$$

quae manifesto abit in $-u\sin.(\Phi-\text{☊})$, ita vt sit

$$\mathfrak{x}\sin.\text{☊}-\mathfrak{y}\cos.\text{☊}=-u\sin.(\Phi-\text{☊}).$$

§. 28. Quodsi ergo breuitatis gratia ponamus $\Phi-\text{☊}=\psi$, ternae formulae hic reductae erunt:

$$m\mathfrak{x}+n\mathfrak{y}=u(\cos.r\cos.\psi+\cos.\iota\sin.r\sin.\psi)$$
$$\nu\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}=u(\sin.r\cos.\psi-\cos.\iota\cos.r\sin.\psi)$$
$$\mathfrak{x}\sin.\text{☊}-\mathfrak{y}\cos.\text{☊}=-u\sin.\psi.$$

Cum igitur porro sit

$$\cos.r\cos.\psi=\tfrac{1}{2}\cos.(r-\psi)+\tfrac{1}{2}\cos.(r+\psi)\text{ et}$$
$$\sin.r\sin.\psi=\tfrac{1}{2}\cos.(r-\psi)-\tfrac{1}{2}\cos.(r+\psi),$$

tum vero

$$\sin.r\cos.\psi=\tfrac{1}{2}\sin.(r-\psi)+\tfrac{1}{2}\sin.(r+\psi),\text{ et}$$
$$\cos.r\sin.\psi=-\tfrac{1}{2}\sin.(r-\psi)+\tfrac{1}{2}\sin.(r+\psi)$$

his valoribus substitutis binae formulae priores fient

$$m\mathfrak{x}+n\mathfrak{y}=\tfrac{1}{2}u(1+\cos.\iota)\cos.(r-\psi)+\tfrac{1}{2}u(1-\cos.\iota)\cos.(r+\psi)$$
$$\nu\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}=\tfrac{1}{2}u(1+\cos.\iota)\sin.(r-\psi)+\tfrac{1}{2}u(1-\cos.\iota)\sin.(r+\psi).$$

§. 29. Quia denique est

$$\frac{1+\cos.\iota}{2}=\cos.\tfrac{1}{2}\iota^2\text{ et }\frac{1-\cos.\iota}{2}=\sin.\tfrac{1}{2}\iota^2$$

tres noſtrae formulae reductae ita ſuccincte exprimentur:

$$\text{I.}\quad m\mathfrak{x}+n\mathfrak{y}=u\,\text{cof.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{cof.}(r-\psi)+u\,\text{fin.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{cof.}(r+\psi)$$

$$\text{II.}\quad \nu\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}=u\,\text{cof.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{fin.}(r-\psi)+u\,\text{fin.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{fin.}(r+\psi)$$

$$\text{III.}\quad \mathfrak{x}\,\text{fin.}\,\Omega-\mathfrak{y}\,\text{cof.}\,\Omega=-u\,\text{fin.}\,\psi.$$

§. 30. Praeterea vero etiam literae X et Y inſunt in valore $w^2=uu-2u\text{X}\,\text{cof.}\,\Phi-2u\text{Y}\,\text{fin.}\,\Phi+vv$; quare, ſi earum loco valores ſupra dati ſubſtituantur, prodibit:

$$\text{X}\,\text{cof.}\,\Phi+\text{Y}\,\text{fin.}\,\Phi=m(1+x)\,\text{cof.}\,\Phi-\nu y\,\text{cof.}\,\Phi+z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\Omega\,\text{cof.}\,\Phi$$
$$+n(1+x)\,\text{fin.}\,\Phi-\mu y\,\text{fin.}\,\Phi-z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,\Omega\,\text{fin.}\,\Phi$$

at vero erit ex praecedentibus reductionibus

$$m\,\text{cof.}\,\Phi+n\,\text{fin.}\,\Phi=\text{cof.}\,r\,\text{cof.}\,\psi+\text{cof.}\,\iota\,\text{fin.}\,r\,\text{fin.}\,\psi=$$
$$\text{cof.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{cof.}(r-\psi)+\text{fin.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{cof.}(r+\psi).$$

Eodem modo pro terminis y et z habebimus

$$\nu\,\text{cof}\,\Phi+\mu\,\text{fin.}\,\Phi=\text{cof.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{fin.}(r-\psi)+\text{fin.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{fin.}(r+\psi)\quad\text{et}$$
$$\text{fin.}\,\Omega\,\text{cof.}\,\Phi-\text{cof.}\,\Omega\,\text{fin.}\,\Phi=-\text{fin.}(\Phi-\Omega)=-\text{fin.}\,\psi$$

quibus valoribus ſubſtitutis erit

$$\text{X}\,\text{cof.}\,\Phi+\text{Y}\,\text{fin.}\,\Phi=(1+x)\left(\text{cof.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{cof.}(r-\psi)+\text{fin.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{cof.}(r+\psi)\right)$$
$$-y\left(\text{cof.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{fin.}(r-\psi)+\text{fin.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{fin.}(r+\psi)\right)$$
$$-z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\psi$$

§. 31. Quo has formulas ad calculum adhuc commodiores reddamus, ponamus breuitatis gratia

$$\text{A}=\text{cof.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{cof.}(r-\psi)+\text{fin.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{cof.}(r+\psi)\quad\text{et}$$
$$\text{B}=\text{cof.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{fin.}(r-\psi)+\text{fin.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{fin.}(r+\psi)$$

eruntque omnes noſtrae formulae reductae

$$m\mathfrak{x}+n\mathfrak{y}=\text{A}u,\quad \nu\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}=\text{B}u,\quad \mathfrak{x}\,\text{fin.}\,\Omega-\mathfrak{y}\,\text{cof.}\,\Omega=-u\,\text{fin.}\,\psi$$
$$\text{X}\,\text{cof.}\,\Phi+\text{Y}\,\text{fin.}\,\Phi=\text{A}(1+x)-\text{B}y-z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\psi$$

ſicque tandem habebimus

$$w^2=uu-2u(\text{A}(1+x)-\text{B}y-z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\psi)+vv.$$

SECTIO

SECTIO V.

De euolutione formulae $\frac{1}{v^3}$.

§. 32. Cum ſit $vv = (1+x)^2 + yy + zz$, erit

$$\frac{1}{v^3} = ((1+x)^2 + yy + zz)^{-\frac{3}{2}}$$

vnde, quia quantitates yy et zz ſunt tam paruae reſpectu primae partis $(1+x)^2$, vt earum quadrata et altiores poteſtates ſine errore negligi queant, erit pro noſtro inſtituto ſatis exacte:

$$\frac{1}{v^3} = \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{3(yy+zz)}{2(1+x)^4}.$$

§. 33. Cum vero etiam quantitas x ſit valde parua prae vnitate, erit

$\frac{1}{(1+x)^3} = 1 - 3x + 6xx - 10x^3$ atque $\frac{1}{(1+x)^4} = 1 - 4x$; hi ergo valores ſubſtituantur et ſecundum dimenſiones quantitatum exiguarum x, y, z diſponantur, hocque facto obtinebitur ſequens expreſſio:

$$\frac{1}{v^3} = 1 - 3x - \tfrac{3}{2}yy - \tfrac{3}{2}zz + 6xx - 10x^3 + 6xyy + 6xzz$$

vbi vltimum membrum tres continens dimenſiones iam tam exiguum deprehendetur, vt tuto negligi queat.

SECTIO VI.

De euolutione formulae $\frac{1}{w^3}$.

§. 34. Cum, vti inuenimus, ſit

$$ww = uu - 2u(A(1+x) - By - z\,\text{ſin.}\,\iota\,\text{ſin.}\,\psi) + vv$$

ante omnia obſeruandum eſt, literam u, quae diſtantiam Solis a Terra deſignat, prae vnitate, qua diſtantia media Lunae a Terra exprimitur, eſſe valde magnam, ſiquidem pro-

 pemo-

pemodum erit $u = 400$; tum vero etiam nouimus literas x, y, z denotare fractiones prae vnitate valde paruas, vnde postremum membrum erit $vv = 1 + 2x + xx + yy + zz$.

§. 35. His perpensis si breuitatis gratia statuatur

$$\Pi = A(1 + x) - By - z \sin.\iota \sin.\psi$$

vt habeamus

$$ww = uu - 2\Pi u + vv$$

vnde fit

$$\frac{1}{w^3} = (uu - 2\Pi u + vv)^{-\frac{3}{2}}$$

hinc euoluendo prodit:

$$\frac{1}{w^3} = \frac{1}{u^3} + \frac{3\Pi}{u^4} - \frac{3vv}{2u^5} + \frac{15\Pi\Pi}{2u^5}$$

neque vero opus erit hanc seriem vlterius continuare.

§. 36. Disponamus nunc membra huius expressionis secundum dimensiones quantitatum exiguarum x, y, z, eritque $\Pi = A + Ax - By - z \sin.\iota \sin.\psi$, pro membro secundo; pro membro autem tertio, quia diuisum est per u^5, termini x, y, z inuoluentes tuto omitti poterunt, vnde erit $vv = 1$ et $\Pi\Pi = AA$. His igitur substitutis reductio ita se habebit:

$$\frac{1}{w^3} = \frac{1}{u^3} + \frac{3A}{u^4} + \frac{3(Ax - By - z \sin.\iota \sin.\psi)}{u^4} - \frac{3 + 15AA}{2u^5}.$$

§. 37. Hinc igitur iam poterimus valores litterarum F et G, sublata omni irrationalitate, sequenti modo exhibere:

$$\text{I}^{\circ}.\ F = \lambda\lambda - 3\lambda\lambda x + 6\lambda\lambda xx - \tfrac{3}{2}\lambda\lambda yy - \tfrac{3}{2}\lambda\lambda zz$$
$$- 10\lambda\lambda x^3 + 6\lambda\lambda xyy + 6\lambda\lambda xzz$$
$$+ \frac{a^3}{u^3} + \frac{3Aa^3}{u^4} + \frac{3a^3(Ax - By - z \sin.\iota \sin.\psi)}{u^4} - \frac{(3 - 15AA)a^3}{2u^5},$$

II. G

II. $G = \frac{3a^3 A}{u^4} + \frac{3a^3(Ax - By - z\,\text{fin.}\,i\,\text{fin.}\,\psi)}{u^4} - \frac{a^3(3 - 15AA)}{2u^5}$

vbi meminiſſe oportet eſſe

$$A = \text{cof.}\,\tfrac{i^2}{2}\,\text{cof.}\,(r - \psi) + \text{fin.}\,\tfrac{i^2}{2}\,\text{cof.}\,(r + \psi) \text{ et}$$

$$B = \text{cof.}\,\tfrac{i^2}{2}\,\text{fin.}\,(r - \psi) + \text{fin.}\,\tfrac{i^2}{2}\,\text{fin.}\,(r + \psi).$$

SECTIO VII.

De eliminatione literarum u et Φ.

§. 38. Iam diximus, literam x denotare diſtantiam Solis a Terra, et angulum t anomaliam Solis mediam, vnde ſi excentricitas orbitae ſolaris vocetur $= \varepsilon$, cuius valor circiter eſt $\frac{1}{59}$, ex theoria Planetarum notum eſt fore diſtantiam Solis a Terra veram $u = a(1 + \varepsilon\,\text{cof.}\,t)$. Tum vero ſi ζ denotet longitudinem Solis mediam, erit eius longitudo vera ſatis exacte $\Phi = \zeta - 2\,\varepsilon\,\text{fin}\,t$. His notatis literam u eliminabimus ope harum formularum:

$$\frac{1}{uu} = \frac{1 - 2\,\varepsilon\,\text{cof.}\,t}{aa}, \quad \frac{1}{u^3} = \frac{1 - 3\,\varepsilon\,\text{cof.}\,t}{a^3},$$

$$\frac{1}{u^4} = \frac{1 - 4\,\varepsilon\,\text{cof.}\,t}{a^4}, \quad \frac{1}{u^5} = \frac{1 - 5\,\varepsilon\,\text{cof.}\,t}{a^5}.$$

§. 39. Primo autem litera u occurrebat in valore $F = \frac{\lambda\lambda}{v^3} + \frac{a^3}{w^3}$ cuius pars poſterior $\frac{a^3}{w^3}$ ita reducetur, vt ſit:

$$\frac{a^3}{w^3} = 1 + \frac{3A}{a} + \frac{3Ax}{a} - \frac{3By}{a} - \frac{3Z\,\text{fin.}\,i\,\text{fin.}\,\psi}{a} - \frac{3}{2aa} + \frac{15AA}{2aa}$$
$$- 3\,\varepsilon\,\text{cof.}\,t - \frac{12A\varepsilon\,\text{cof.}\,t}{a} - \frac{12A\varepsilon x\,\text{cof.}\,t}{a} + \frac{12B\varepsilon y\,\text{cof.}\,t}{a}$$
$$+ \frac{12\varepsilon z\,\text{fin.}\,i\,\text{fin.}\,\psi\,\text{cof.}\,t}{a} + \frac{15\varepsilon\,\text{cof.}\,t}{2aa} - \frac{75AA\varepsilon\,\text{cof.}\,t}{2aa}.$$

Hic autem pro noſtro inſtituto non ſolum terminos per aa diuiſos, ſed etiam eos qui continent $\frac{\varepsilon}{a}$, tuto ob paruitatem negligere licet, ita vt ſit:

$$F = \lambda\lambda - 3\lambda\lambda x + 6\lambda\lambda xx - \tfrac{3}{2}\lambda\lambda yy - \tfrac{3}{2}\lambda\lambda zz$$
$$- 10\lambda\lambda x^3 + 6\lambda\lambda xyy + 6\lambda\lambda xzz$$
$$+ 1 + \frac{3A}{a} + \frac{3Ax}{a} - \frac{3By}{a} - \frac{3z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\psi}{a} - 3\varepsilon\,\text{cof.}\,t.$$

Vbi partes poſteriores per a diuiſas, pariter ac terminum litera ε affectum, probe a reliquis diſtingui conueniet.

§. 40. Cum deinde ſit $G = \frac{a^3}{w^3} - \frac{a^3}{u^3}$, factis iisdem ſubſtitutionibus et praetermiſſis terminis tam per $\frac{1}{aa}$ quam per $\frac{\varepsilon}{a}$ affectis quia litera G vbique multiplicatur per u, tum vero pro prima aequatione ſit:

$$G(m\mathfrak{x} + n\mathfrak{y}) = AGu$$

pro ſecunda vero

$$G(\nu\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y}) = BGu$$

et pro tertia

$$G\,\text{fin.}\,\iota\,(\mathfrak{x}\,\text{fin.}\,\Omega - \mathfrak{y}\,\text{cof.}\,\Omega) = -Gu\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\psi)$$

habebitur:

$$Gu = 3A + 3Ax - 3By - 3z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\psi - \frac{3}{2a} + \frac{15AA}{2a}$$
$$- 9A\varepsilon x\,\text{cof.}\,t + 9B\varepsilon y\,\text{cof.}\,t + 9\varepsilon z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\psi\,\text{cof.}\,t.$$

§. 41. Vt autem etiam angulum ϕ ex formulis noſtris elidamus, cum ſit

$$\phi = \zeta - 2\varepsilon\,\text{fin.}\,t \text{ erit } \psi = \zeta - \Omega - 2\varepsilon\,\text{fin.}\,t;$$

breuitatis gratia autem ponamus $\zeta - \Omega = \eta$, ita vt η denotet diſtantiam loci medii Solis a nodo aſcendente, ſicque angulus hic η etiam tempori ſit proportionalis. Quare cum ſit $\psi = \eta - 2\varepsilon\,\text{fin.}\,t$, vbi pars poſterior tanquam angulus vehementer paruus ſpectari poteſt, cuius ſinus ipſi $2\varepsilon\,\text{fin.}\,t$, coſinus vero vnitati aequalis cenſeri queat, hoc obſeruato erit

$$\text{fin.}\,\psi = \text{fin.}\,\eta - 2\varepsilon\,\text{fin.}\,t\,\text{cof.}\,\eta \text{ et}$$
$$\text{cof.}\,\psi = \text{cof.}\,\eta + 2\varepsilon\,\text{fin.}\,t\,\text{fin.}\,\eta$$

pro

pro angulis autem $r - \psi$ et $r + \psi$ habebimus:

$$\text{fin.}(r-\psi) = \text{fin.}(r-\eta) + 2\varepsilon\,\text{fin.}\,t\,\text{cof.}(r-\eta)$$
$$\text{cof.}(r-\psi) = \text{cof.}(r-\eta) - 2\varepsilon\,\text{fin.}\,t\,\text{fin.}(r-\eta)$$
$$\text{fin.}(r+\psi) = \text{fin.}(r+\eta) - 2\varepsilon\,\text{fin.}\,t\,\text{cof.}(r+\eta)$$
$$\text{cof.}(r+\psi) = \text{cof.}(r+\eta) + 2\varepsilon\,\text{fin.}\,t\,\text{fin.}(r+\eta).$$

§. 42. Hinc igitur ambas literas A et B ad institutum noftrum magis accommodatas exprimere poterimus, quibus per analogiam adiungamus pro tertia aequatione literam $C = \text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\psi$. Nancifcemur igitur hos valores:

$$A = \text{cof.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{cof.}(r-\eta) + \text{fin.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{cof.}(r+\eta)$$
$$- 2\varepsilon\,\text{cof.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{fin.}\,t\,\text{fin.}(r-\eta) + 2\varepsilon\,\text{fin.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{fin.}\,t\,\text{fin.}(r+\eta)$$

$$B = \text{cof.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{fin.}(r-\eta) + \text{fin.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{fin.}(r+\eta)$$
$$+ 2\varepsilon\,\text{cof.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{fin.}\,t\,\text{cof.}(r-\eta) - 2\varepsilon\,\text{fin.}\tfrac{\iota}{2}^2\,\text{fin.}\,t\,\text{cof.}(r+\eta)$$

$$C = \text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,\eta - 2\varepsilon\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,t\,\text{cof.}\,\eta.$$

§. 43. In his formulis potiffimum occurrit angulus $r - \eta$, qui reperitur, fi ab argumento latitudinis Lunae r fubtrahatur diftantia Solis a Nodo media $\eta = \zeta - \Omega$. Cum igitur angulus r reperiatur, fi a loco Lunae medio in orbita θ fubtrahatur locus nodi Ω, vt fit $r = \theta - \Omega$, fiet ifte angulus $r - \eta = \theta - \zeta$, qui ergo habebitur, fi a loco lunae medio θ fubtrahatur longitudo Solis media ζ. Ponamus igitur breuitatis gr. hunc angulum $r - \eta = \theta - \zeta = p$, eritque $\eta = r - p$ et hinc $r + \eta = 2r - p$. Porro fit etiam breuitatis ergo $\text{cof.}\tfrac{\iota}{2}^2 = \mu$ et $\text{fin.}\tfrac{\iota}{2}^2 = \nu$, ita vt fit $\mu + \nu = 1$ et $\mu - \nu = \text{cof.}\,\iota$; vbi notaffe iuuabit, ob angulum ι fatis exiguum, fore $\mu = 1$ et ν fractionem valde paruam. His igitur denominationibus introductis habebimus:

A =

$$A = \mu \operatorname{cof.} p + \nu \operatorname{cof.} (2r - p) - 2\mu\varepsilon \operatorname{fin.} t \operatorname{fin.} p + 2\nu\varepsilon \operatorname{fin.} t \operatorname{fin.} (2r - p)$$

$$B = \mu \operatorname{fin.} p + \nu \operatorname{fin.} (2r - p) + 2\mu\varepsilon \operatorname{fin.} t \operatorname{cof.} p - 2\nu\varepsilon \operatorname{fin.} t \operatorname{cof.} (2r - p)$$

$$C = \operatorname{fin.} \iota \operatorname{fin.} (r - p) - 2\varepsilon \operatorname{fin.} \iota \operatorname{fin.} t \operatorname{cof.} (r - p).$$

§. 44. Quia in formulis F et G u adhuc occurrit fin. ψ, eius loco fubftituatur valor fupra inuentus

$$\operatorname{fin.} \psi = \operatorname{fin.} (r - p) - 2\varepsilon \operatorname{fin.} t \operatorname{cof.} (r - p)$$

quo valore fubftituto obtinebimus fcribendo literam C loco fin. ι fin. ψ:

$$F = \lambda\lambda - 3\lambda\lambda x + 6\lambda\lambda xx - \tfrac{3}{2}\lambda\lambda yy - \tfrac{3}{2}\lambda\lambda zz - 10\lambda\lambda x^3 + 6\lambda\lambda xyy + 6\lambda\lambda xzz + 1 + \tfrac{3A}{a} + \tfrac{3Ax}{a} - \tfrac{3By}{a} - \tfrac{3Cz}{a} - 3\varepsilon \operatorname{cof.} t$$

$$Gu = 3A + 3Ax - 3By - 3Cz - \tfrac{3}{2a} + \tfrac{15AA^{?}}{2a} - 9A\varepsilon x \operatorname{cof.} t + 9B\varepsilon y \operatorname{cof.} t + 9C\varepsilon z \operatorname{cof.} t$$

hocque modo omnes quantitates peregrinas ex calculo expulimus, ita vt praeter ternas noftras incognitas x, y, z aliae quantitates variabiles cognitae non occurrant praeter ternos angulos p, r et t.

§. 45. His igitur valoribus ita definitis tres noftrae aequationes principales pro motu Lunae fequenti modo referentur:

$$\text{I.}\quad \left.\begin{aligned} &ddx - 2dy(dr + d\Omega \operatorname{cof.} \iota) + 2dz\, d\Omega \operatorname{fin.} \iota \operatorname{cof.} r \\ &- (1 + x)(dr^2 + 2dr\, d\Omega \operatorname{cof.} \iota + d\Omega^2 (1 - \operatorname{fin.} \iota^2 \operatorname{fin.} r^2)) \\ &+ y\, d\Omega^2 \operatorname{fin.} \iota^2 \operatorname{fin.} r \operatorname{cof.} r + z\, d\Omega^2 \operatorname{fin.} \iota \operatorname{cof.} \iota \operatorname{fin.} r \end{aligned}\right\} = -F(1 + x)\, dt^2 + A\, Gu\, dt^2$$

II.

$$\text{II.}\quad \left.\begin{aligned} & ddy + 2dx(dr + d\Omega \,\text{cof.}\, \iota) - 2dz d\Omega \,\text{fin.}\, \iota \,\text{fin.}\, r \\ & - y(dr^2 + 2dr d\Omega \,\text{cof.}\, \iota + d\Omega^2 (1 - \text{fin.}\, \iota^2 \,\text{cof.}\, r^2)) \\ & + (1 + x) d\Omega^2 \,\text{fin.}\, \iota^2 \,\text{fin.}\, r \,\text{cof.}\, r + z d\Omega^2 \,\text{fin.}\, \iota \,\text{cof.}\, \iota \,\text{cof.}\, r \end{aligned}\right\} \\ = - F y dt^2 - B G u dt^2$$

$$\text{III.}\quad \left.\begin{aligned} & ddz - 2dx . d\Omega \,\text{fin.}\, \iota \,\text{cof.}\, r + 2dy . d\Omega \,\text{fin.}\, \iota \,\text{fin.}\, r - z d\Omega^2 \,\text{fin.}\, \iota^2 \\ & + (1 + x)(2dr d\Omega \,\text{fin.}\, \iota \,\text{fin.}\, r + d\Omega^2 \,\text{fin.}\, \iota \,\text{cof.}\, \iota \,\text{fin.}\, r) \\ & + y(2dr d\Omega \,\text{fin.}\, \iota \,\text{cof.}\, r + d\Omega^2 \,\text{fin.}\, \iota \,\text{cof.}\, \iota \,\text{cof.}\, r) \end{aligned}\right\} \\ = - F z dt^2 - C G u dt^2.$$

SECTIO VIII.

De reductione differentialium ad elementum anomaliae mediae Solis dt.

§. 46. Cum omnes anguli, qui in noſtras aequationes ingrediuntur, ſint tempori proportionales, eorum differentialia ad elementum temporis dt, ex anomalia media Solis deſumtum, datas tenebunt rationes, quas ex tabulis mediorum motuum Lunae et Solis depromere licet. Quanquam enim motus lineae nodorum ex ipſa Theoria definiri poteſt: tamen iam ſatis eſt euictum, motum nodorum ex obſeruationibus concluſum perfecte cum Theoria conſentire; quam ob rem ſtatuamus vt ſequitur: $dr = l dt$, $dp = m dt$, ita vt hi valores l et m ex tabulis colligi queant; vbi quidem, quia nulli logarithmi vsquam occurrent, litera l ſine ambiguitate vtor. Deinde quia linea nodorum in antecedentia promouetur, valor rationis $\frac{d\Omega}{dt}$ erit negatiuus, quam ob rem ſtatuamus

$$d\Omega \,\text{cof.}\, \iota = -\alpha dt \quad \text{et} \quad d\Omega \,\text{fin.}\, \iota = -\beta dt$$

vbi manifeſtum eſt literam β multo minorem eſſe quam α.

§. 47. His igitur rationibus mere numericis constitutis erit pro nostris binis prioribus aequationibus

$$dr + d\Omega \cos. \iota = (l - \alpha)\, dt,$$

deinde vero quia

$$dr^2 + 2\, dr\, d\Omega \cos. \iota + d\Omega^2 = (dr + d\Omega \cos. \iota)^2 + d\Omega^2 \sin. \iota^2$$

erit haec formula

$$dr^2 + 2\, dr\, d\Omega \cos. \iota + d\Omega^2 = (l - \alpha)^2\, dt^2 + \beta\beta\, dt^2.$$

Quare si nostras aequationes per dt^2 diuidamus, eae sequentes induent formas:

$$\text{I.}\ \left\{\begin{array}{l} \frac{ddx}{dt^2} - \frac{2dy}{dt}(l-\alpha) - 2\beta\frac{dz}{dt}\cos. r \\ -(1+x)((l-\alpha)^2 + \beta\beta\cos. r^2) \\ +\beta\beta y \sin. r \cos. r + \alpha\beta z \sin. r \end{array}\right\} = -F(1+x) + AGu$$

$$\text{II.}\ \left\{\begin{array}{l} \frac{ddy}{dt^2} + \frac{2dx}{dt}(l-\alpha) + 2\beta\frac{dz}{dt}\sin. r \\ -y((l-\alpha)^2 + \beta\beta\sin. r^2) \\ +\beta\beta(1+x)\sin. r \cos. r + \alpha\beta z \cos. r \end{array}\right\} = -Fy - BGu$$

$$\text{III.}\ \left\{\begin{array}{l} \frac{ddz}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt}\cos. r - 2\beta\frac{dy}{dt}\sin. r - \beta\beta z \\ -(1+x)(2\beta l \sin. r - \alpha\beta\sin. r) \\ -y(2\beta l \cos. r - \alpha\beta\cos. r) \end{array}\right\} = -Fz - CGu$$

§. 48. Totum ergo negotium iam huc est reductum, vt tres istae aequationes differentio-differentiales per duplicem integrationem rite resoluantur, vnde pro quouis tempore proposito valores trium nostrarum incognitarum x, y, z assignari queant. Ante autem quam hunc laborem suscipiamus, operae pretium erit ostendere, quemadmodum ex inuentis quantitatibus x, y, z verum Lunae locum in coelo determinare oporteat.

Tab. XIII. Fig. 5.

§. 49. Referat igitur tabula planum orbitae lunaris mediae pro tempore proposito, in quo sit T centrum Terrae

Terrae et recta T☊ linea nodorum, cuius longitudo in ecliptica ſit $=$ ☊; tum vero in eodem plano ducatur recta TM ad locum Lunae medium in ſua orbita, ita vt ſit angulus ☊TM $= r$, locus autem Lunae verus ſit ſupra hoc planum in z; vnde demiſſo perpendiculo zy, et yx ad TM normali, erit vti ſtatuimus: $Tx = 1 + x$, $xy = y$ et $yz = z$ quos ergo valores vt cognitos ſpectabimus. Hinc ductis rectis Ty et Tz vocentur anguli $xTy = \varrho$ et $yTz = \omega$, eritque tang. $\varrho = \frac{y}{1+x}$, hincque diſtantia $Ty = (1+x)\,\text{sec.}\,\varrho$; vnde porro reperitur tang. $\omega = \frac{z}{1+x}\,\text{sec.}\,\varrho$; ac denique vera diſtantia Lunae a Terra $Tz = Ty\,\text{sec.}\,\omega$, cui parallaxis Lunae horizontalis reciproce eſt proportionalis. His angulis definitis erit argumentum Lunae verum, ſeu angulus ☊$Ty = r + \varrho$ et declinatio Lunae ab hoc plano $= \omega$.

§. 50. Transferamus nunc has determinationes in coelum, in quo ſit circulus maximus ♈☊p, in eoque punctum ♈ aequinoxium vernum et ſignum ☊ nodus Lunae aſcendens; vnde ducatur arcus ☊y cum ecliptica faciens angulum p☊$y = \iota$, inclinationi conſtanti aequalem, et capiatur arcus ☊$y = r + \varrho$; tum vero fiat arculus $yz = \omega$, eritque z verus Lunae locus in coelo ex centro Terrae viſus. Vnde ſi ad eclipticam normaliter ducatur arcus zq hic exhibebit latitudinem Lunae veram: longitudo vero eius vera erit arcus ♈☊q = ☊ + ☊q.

Tab. XIII. Fig. 6.

§. 51. Quo autem iſte calculus facilior reddatur, primo ex y ad eclipticam demittatur arcus yp; vnde, ſi more ſolito pro angulo inclinationis ι conſtruatur tabula, pro ſingulis argumentis latitudinis exhibens tam reductionem ad eclipticam quam latitudinem, ex ea reperietur arcus ☊p, ac deinde arcus py, quibus inuentis, quia arculus $yz = \omega$ ſemper eſt quam minimus, propterea quod Luna ab orbita

 media

media nunquam notabiliter deflectere potest, ex hoc arculo $zy = \omega$ facile colligentur correctionas in longitudine oriundae. Hunc in finem ducatur ex y ad zq perpendiculum yr et quia in triangulo zyr habetur latus $yz = \omega$ et angulus $zyr =$ angulo $☊ yp$, qui angulus si vocetur $= \sigma$, erit $yr = \omega \cos. \sigma$ et $zr = \omega \sin. \sigma$, quae posterior particula zr manifesto dabit correctionem arcus yp, quippe quae ad yp addita dabit arcum zq seu latitudinem Lunae veram. Deinde vero pro longitudine notetur esse $pq : yr = 1 : \cos. yp$, vnde fit $pq = \frac{\omega \cos. \sigma}{\cos. yp}$, sicque particula pq ab arcu $☊ p$ subtracta dabit arcum $☊ q$, vnde prodibit longitudo vera $☊ + ☊ q$.

§. 52. Quia angulum $☊ yp$ vocauimus $= \sigma$, ex trigometricis constat fore:

$$\text{tang.}\, \iota \,\text{tang.}\, \sigma = \text{sec.}\, ☊ y = \frac{1}{\cos. (r + \varrho)}, \text{ ideoque}$$

$$\text{tang.}\, \sigma = \frac{\cos. \iota}{\sin. \iota \cos. (r + \varrho)}. \text{ Deinde autem est}$$

$$\sin. yp = \sin. (r + \varrho) \sin. \iota, \text{ vnde fit}$$

$$\cos. yp = \sqrt{1 - \sin. \iota^2 \sin. (r + \varrho)^2}.$$

Ex priori vero formula est

$$\cos. \sigma = \frac{\sin. \iota^2 \cos. (r + \varrho)}{\sqrt{\cos. \iota^2 + (\sin. \iota \cos. (r + \varrho))^2}}$$

vbi manifesto est

$$1 - \sin. \iota^2 \sin. (r + \varrho)^2 = \cos. \iota^2 + \sin. \iota^2 \cos. (r + \varrho)^2$$

hinc igitur fit

$$\frac{\cos. \sigma}{\cos. yp} = \frac{\sin. \iota \cos. (r + \varrho)}{1 - \sin. \iota^2 \sin. (r + \varrho)^2}$$

Praestat autem prioribus formulis vti, postquam angulus σ est exploratus.

§. 53. Cum autem haec correctio calculum non exiguum requirat, hoc negotium multo facilius expediri posse videtur, si, missa omni approximatione, calculum accurate insti-

instituamus. Scilicet ex triangulo sphaerico ☊yz ex datis lateribus ☊$y = r + \varrho$ et $yz = \omega$ quaeratur

$$\text{cos.}\,☊z = \text{cos.}\,☊y\,\text{cos.}\,yz \quad \text{et} \quad \text{tang.}\,y☊z = \frac{\text{tang.}\,yz}{\text{sin.}\,☊y};$$

tum iste angulus y☊z addatur inclinationi q☊$y = \iota$, vt habeatur angulus q☊z; et ex triangulo Sphaerico ☊qz computetur

$$\text{sin.}\,zq = \text{sin.}\,☊z\,\text{sin.}\,q☊z \quad \text{et} \quad \text{tang.}\,☊q = \text{tang.}\,☊z\,\text{cos.}\,q☊z$$

quo facto statim habebitur longitudo Lunae ♈q = ♈☊ + ☊q et latitudo Lunae zq. Hoc igitur modo tabula illa memorata reductionum et latitudinum carere poterimus.

SEXTIO IX.

De prima appropinquatione ad motum Lunae.

§. 54. Quoniam valores nostrarum incognitarum x, y, z aliter nisi per approximationes definiri non licet, initium harum appropinquationum ita faciamus, vt primo in nostris aequationibus remoueamus terminos per a diuisos, quippe qui eas inaequalitates lunares inuoluunt, quae a Parallaxi Solis pendent et *Parallacticae* vocari solent, quippe quae sunt quam minimae. Deinde etiam excludamus omnes terminos excentricitatem Solis ε continentis, vnde nascuntur inaequalitates *Solares* dictae, quae etiam sunt vehementer paruae. Tertio vero etiam in ipso limine excentricitatem orbitae lunaris excludamus, quippe quae singularem inuestigationem postulat; ac denique etiam reiiciamus terminos, in quibus incognitae x, y, z duas pluresue dimensiones occupant, quippe qui prae reliquis sunt valde parui et in hoc negotio tanquam euanescentes spectari poterunt.

§. 55. His igitur obſeruatis pro literis A, B, C hos habebimus valores:

$A = \mu \operatorname{cof.} p + \nu \operatorname{cof.} (2r - p)$; $B = \mu \operatorname{fin.} p + \nu \operatorname{fin.} (2r - p)$;
$C = \operatorname{fin.} \iota \operatorname{fin.} (r - p)$

tum vero pro formulis F & Gu his vtemur valoribus:

$F = \lambda\lambda - 3\lambda\lambda x + 1$ et $Gu = 3A + 3Ax - 3By - 3Cz$

ſiue

$$Gu = 3\mu(1+x)\operatorname{cof.} p + 3\nu(1+x)\operatorname{cof.}(2r-p) - 3\mu y \operatorname{fin.} p - 3\nu y \operatorname{fin.}(2r-p) - 3z \operatorname{fin.} \iota \operatorname{fin.}(r-p).$$

§. 56. Pro prima igitur noſtra aequatione membrum ad dextram poſitum euoluatur, omiſſis terminis, vbi x ad duas dimenſiones aſſurgeret, ac reperietur

$$F(1+x) = 1 + \lambda\lambda + x - 2\lambda\lambda x \text{ et}$$
$$AGu = 3AA + 3AAx - 3ABy - 3ACz$$

vbi producta AA, AB, AC ad ſimplices coſinus reducantur. Reperietur igitur

$$AA = \mu\mu \operatorname{cof.} p^2 + 2\mu\nu \operatorname{cof.} p \operatorname{cof.}(2r-p) + \nu\nu \operatorname{cof.}(2r-p)^2 = \tfrac{1}{2}(\mu\mu + \nu\nu) + \tfrac{1}{2}\mu\mu \operatorname{cof.} 2p + \mu\nu \operatorname{cof.} 2r + \mu\nu \operatorname{cof.}(2r-2p) + \tfrac{1}{2}\nu\nu \operatorname{cof.}(4r-2p)$$

$$AB = \mu\mu \operatorname{fin.} p \operatorname{cof.} p + \mu\nu \operatorname{fin.} p \operatorname{cof.}(2r-p) + \mu\nu \operatorname{cof.} p \operatorname{fin.}(2r-p) + \nu\nu \operatorname{fin.}(2r-p)\operatorname{cof.}(2r-p) =$$
$$\tfrac{1}{2}\mu\mu \operatorname{fin.} 2p + \mu\nu \operatorname{fin.} 2r + \tfrac{1}{2}\nu\nu \operatorname{fin.}(4r-2p)$$

$$AC = \mu \operatorname{fin.} \iota \operatorname{cof.} p \operatorname{fin.}(r-p) + \nu \operatorname{fin.} \iota \operatorname{fin.}(r-p)\operatorname{cof.}(2r-p) = \tfrac{1}{2}\mu \operatorname{fin.} \iota \operatorname{fin.} r - \tfrac{1}{2}\nu \operatorname{fin.} \iota \operatorname{fin.} r + \tfrac{1}{2}\mu \operatorname{fin.} \iota \operatorname{fin.}(r-2p) + \tfrac{1}{2}\nu \operatorname{fin.} \iota \operatorname{fin.}(3r-2p).$$

Hinc igitur pro prima noſtra aequatione colligitur.

Pars dextra.

$$-1 - \lambda\lambda + \tfrac{3}{2}(\mu\mu + \nu\nu) + \tfrac{3}{2}\mu\mu \operatorname{cof.} 2p + 3\mu\nu \operatorname{cof.} 2r + 3\mu\nu \operatorname{cof.}(2r-2p) + \tfrac{3}{2}\nu\nu \operatorname{cof.}(4r-2p)$$
$$-x$$

$$-x(1-2\lambda\lambda)+\tfrac{3}{2}(\mu\mu+\nu\nu)x+\tfrac{3}{2}\mu\mu x\,\text{cof.}\,2p+3\mu\nu x\,\text{cof.}\,2r$$
$$+3\mu\nu x\,\text{cof.}\,(2r-2p)+\tfrac{3}{2}\nu\nu x\,\text{cof.}\,(4r-2p)$$
$$-\tfrac{3}{2}\mu\mu y\,\text{fin.}\,2p-3\mu\nu y\,\text{fin.}\,2r-\nu\nu y\,\text{fin.}\,(4r-2p)$$
$$-\tfrac{3}{2}\mu z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,r+\tfrac{3}{2}\nu z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,r-\tfrac{3}{2}\mu z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,(r-2p)$$
$$-\tfrac{3}{2}\nu z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,(3r-2p)$$

§. 57. Pro parte autem finistra eiusdem aequationis vtamur pariter iisdem reductionibus, fcilicet:

$\text{fin.}\,r^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\text{cof.}\,2r$, $\text{cof.}\,r^2=\frac{1}{2}+\text{cof.}\,2r$ et $\text{fin.}\,r\,\text{cof.}\,r=\frac{1}{2}\text{fin.}\,2r$; tum vero terminos abfolutos, qui nullas incognitas inuoluunt, a reliquis feparemus, ficque pars finiftra hoc modo repraefentabitur:

$$-(l-\alpha)^2-\tfrac{1}{2}\beta\beta-\tfrac{1}{2}\beta\beta\,\text{cof.}\,2r$$
$$+\frac{ddx}{dt^2}-\frac{2dy}{dt}(l-\alpha)-2\beta\frac{dz}{dt}\,\text{cof.}\,r$$
$$-(l-\alpha)^2x-\tfrac{1}{2}\beta\beta x-\tfrac{1}{2}\beta\beta x\,\text{cof.}\,2r+\tfrac{1}{2}\beta\beta y\,\text{fin.}\,2r+\alpha\beta z\,\text{fin.}\,r.$$

Hic vero ante omnia eft obferuandum, membra conftantia, quae in vtraque parte reperiuntur, fe mutuo feorfim deftruere debere, quia alioquin diftantia media non amplius foret $=1$, neque motus medius rite definitus; vnde ex hac conditione ftatim colligimus hanc aequalitatem:

$$-(l-\alpha)^2-\tfrac{1}{2}\beta\beta=-1-\lambda\lambda+\tfrac{3}{2}(\mu\mu+\nu\nu),\ \text{vnde fit}$$
$$\lambda\lambda=(l-\alpha)^2+\tfrac{1}{2}\beta\beta+\tfrac{3}{2}(\mu\mu+\nu\nu)-1.$$

Cum enim λ denotet celeritatem angularem, qua Luna circa Terram ad diftantiam mediam $=1$ in circulo reuolueretur, remota perturbatione a Sole oriunda, eius valor vtique per fe nondum eft cognitus, ideoque eum ex hac conditione determinare neceffe erat, quandoquidem valores literarum λ, α, β, μ et ν ex Phaenomenis funt cogniti. Hoc igitur valore fubftituto pro prima aequatione omnes terminos incognitos ad partem finiftram, cognitos vero

ad

ad dextram exhibeamus, quo facto aequatio prima sequentem induet formam:

$$\frac{ddx}{dt^2} - \frac{2dy}{dt}(l-\alpha) - 2\beta\frac{dz}{dt}\,\text{cos}.\,r - 3\lambda\lambda x$$
$$-\tfrac{1}{2}\beta\beta x\,\text{cos}.2r - \tfrac{3}{2}\mu\mu x\,\text{cos}.2p - 3\mu\nu x\,\text{cos}.2r - 3\mu\nu x\,\text{cos}.(2r-2p)$$
$$-\tfrac{3}{2}\nu\nu x\,\text{cos}.(4r-2p)$$
$$+\tfrac{1}{2}\beta\beta y\,\text{sin}.\,2r + \tfrac{3}{2}\mu\mu y\,\text{sin}.\,2p + 3\mu\nu y\,\text{sin}.\,2r$$
$$+\tfrac{3}{2}\nu\nu y\,\text{sin}.(4r-2p)$$
$$+\alpha\beta z\,\text{sin}.\,r + \tfrac{3}{2}\mu z\,\text{sin}.\,\iota\,\text{sin}.\,r - \tfrac{3}{2}\nu z\,\text{sin}.\,\iota\,\text{sin}.\,r$$
$$+\tfrac{3}{2}\mu z\,\text{sin}.\,\iota\,\text{sin}.(r-2p) + \tfrac{3}{2}\nu z\,\text{sin}.\,\iota\,\text{sin}.(3r-2p)$$
$$= \tfrac{1}{2}\beta\beta\,\text{cos}.\,2r + 3\mu\nu\,\text{cos}.\,2r + \tfrac{3}{2}\mu\mu\,\text{cos}.\,2p + 3\mu\nu\,\text{cos}.(2r-2p)$$
$$+\tfrac{3}{2}\nu\nu\,\text{cos}.(4r-2p).$$

§. 58. Eodem modo tractemus secundam aequationem principalem, pro cuius parte dextra habebimus $Fy = y + \lambda\lambda y$ et $BGu = 3AB + 3ABx - 3BBy - 3BCz$ pro qua formula iam obseruauimus esse

$$AB = \tfrac{1}{2}\mu\mu\,\text{sin}.\,2p + \mu\nu\,\text{sin}.\,2r + \tfrac{1}{2}\nu\nu\,\text{sin}.(4r-2p)$$

tum vero erit

$$BB = \tfrac{1}{2}(\mu\mu + \nu\nu) - \tfrac{1}{2}\mu\mu\,\text{sin}.\,2p - \tfrac{1}{2}\nu\nu\,\text{sin}.(4r-2p)$$
$$+\mu\nu\,\text{cos}.(2r-2p) - \mu\nu\,\text{cos}.\,2r$$
$$BC = \tfrac{1}{2}\mu\,\text{sin}.\,\iota\,\text{cos}.\,r + \tfrac{1}{2}\nu\,\text{sin}.\,\iota\,\text{cos}.\,r + \tfrac{1}{2}\mu\,\text{sin}.\,\iota\,\text{cos}.(r-2p)$$
$$-\tfrac{1}{2}\nu\,\text{sin}.\,\iota\,\text{cos}.(3r-2p)$$

His igitur valoribus substitutis erit

Pars dextra.

$$-\tfrac{3}{2}\mu\mu\,\text{sin}.\,2p - 3\mu\nu\,\text{sin}.\,2r - \tfrac{3}{2}\nu\nu\,\text{sin}.(4r-2p)$$
$$-\tfrac{3}{2}\mu\mu x\,\text{sin}.\,2p - 3\mu\nu x\,\text{sin}.\,2r - \tfrac{3}{2}\nu\nu x\,\text{sin}.(4r-2p)$$
$$-y - \lambda\lambda y + \tfrac{3}{2}(\mu\mu+\nu\nu)y - \tfrac{3}{2}\mu\mu y\,\text{sin}.\,2p - \tfrac{3}{2}\nu\nu y\,\text{sin}.(4r-2p)$$
$$+3\mu\nu y\,\text{cos}.(2r-2p) - \mu\nu y\,\text{cos}.\,2r$$
$$-\tfrac{3}{2}\mu z\,\text{sin}.\,\iota\,\text{cos}.\,r + \tfrac{3}{2}\nu z\,\text{sin}.\,\iota\,\text{cos}.\,r + \tfrac{3}{2}\mu z\,\text{sin}.\,\iota\,\text{cos}.(r-2p)$$
$$-\tfrac{3}{2}\nu z\,\text{sin}.\,\iota\,\text{cos}.(3r-2p).$$

§. 59. Eiusdem aequationis pars finiftra, eodem modo quo fupra difpofita, ita referatur:

$$\tfrac{1}{2}\beta\beta\,\text{fin.}\,2r$$
$$+\frac{ddy}{dt^2}+\frac{2(l-\alpha)dx}{dt}+\frac{2\beta\,\text{fin.}\,r.\,dz}{dt}$$
$$+\tfrac{1}{2}\beta\beta x\,\text{fin.}\,2r-(l-\alpha)^2 y-\tfrac{1}{2}\beta\beta y+\tfrac{1}{2}\beta\beta y\,\text{cof.}\,2r+\alpha\beta z\,\text{cof.}\,r$$

quo circa, fi loco $(l-\alpha)^2$ fcribamus eius valorem

$$1+\lambda\lambda-\tfrac{3}{2}(\mu\mu+\nu\nu)-\tfrac{1}{2}\beta\beta$$

et aequationem vt ante inftruamus, dum fcilicet omnes termini incogniti ad finiftram, cogniti vero ad dextram, difponuntur, aequatio noftra fecunda hanc induet formam:

$$\frac{ddy}{dt^2}+2(l-\alpha)\frac{dx}{dt}+2\beta\,\text{fin.}\,r.\frac{dz}{dt}$$
$$+\tfrac{1}{2}\beta\beta x\,\text{fin.}\,2r+\tfrac{3}{2}\mu\mu x\,\text{fin.}\,2p+3\mu\nu x\,\text{fin.}\,2r+\tfrac{3}{2}\nu\nu x\,\text{fin.}(4r-2p)$$
$$+\tfrac{1}{2}\beta\beta y\,\text{cof.}\,2r+\tfrac{3}{2}\mu\mu\,\text{fin.}\,2p+\tfrac{3}{2}\nu\nu y\,\text{fin.}(4r-2p)-3\mu\nu y\,\text{cof.}(2r-2p)$$
$$+\mu\nu y\,\text{cof.}\,2r+\alpha\beta z\,\text{cof.}\,r+\tfrac{3}{3}\mu z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,r-\tfrac{3}{2}\nu z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,r$$
$$+\tfrac{3}{2}\mu z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}(3r-2p)$$
$$+\tfrac{2}{3}\nu z\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}(3r-2p)$$
$$=-\tfrac{1}{2}\beta\beta\,\text{fin.}\,2r-\tfrac{3}{2}\mu\mu\,\text{fin.}\,2p-3\mu\nu\,\text{fin.}\,2r-\tfrac{3}{2}\nu\nu\,\text{fin.}(4r-2p).$$

§. 60. Pro tertia denique aequatione noftra membra ad dextram partem pofita ita fe habebunt:

$$Fz=z+\lambda\lambda z \text{ et}$$
$$Gu=3AC+3ACx-3BCy-3CCz$$

vbi notetur effe

$$BC=-\tfrac{1}{2}\mu\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,r+\tfrac{1}{2}\nu\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}\,r+\tfrac{1}{2}\mu\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}(r-2p)$$
$$-\tfrac{1}{2}\nu\,\text{fin.}\,\iota\,\text{cof.}(3r-2p)$$
$$AC=\tfrac{1}{2}\mu\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,r+\tfrac{1}{2}\mu\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}(r-2p)+\tfrac{1}{2}\nu\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}(3r-2p)$$
$$-\tfrac{1}{2}\nu\,\text{fin.}\,\iota\,\text{fin.}\,r$$
$$CC=\tfrac{1}{2}\,\text{fin.}\,\iota-\tfrac{1}{2}\,\text{fin.}\,\iota^2\,\text{cof.}(2r-2p)$$

quibus valoribus fubftitutis erit

Pars dextra.

$-\frac{3}{2}\mu\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ r - \frac{3}{2}\mu\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ (r-2p) - \frac{3}{2}\nu\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ (3r-2p)$
$\quad + \frac{3}{2}\nu\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ r$
$-\frac{3}{2}\mu x\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ r - \frac{3}{2}\mu x\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ (r-2p) - \frac{3}{2}\nu x\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ (3r-2p)$
$\quad + \frac{3}{2}\nu x\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ r$
$-\frac{3}{2}\mu y\ \text{fin.}\ \iota\ \text{cof.}\ r + \frac{3}{2}\nu y\ \text{fin.}\ \iota\ \text{cof.}\ r + \frac{3}{2}\mu y\ \text{fin.}\ \iota\ \text{cof.}\ (r-2p)$
$\quad - \frac{3}{2}\nu y\ \text{fin.}\ \iota\ \text{cof.}\ (3r-2p)$
$-z - \lambda\lambda z + \frac{3}{2} z\ \text{fin.}\ \iota^2 - \frac{3}{2}\ \text{fin.}\ \iota^2\ \text{cof.}\ (2r-2p).$

§. 61. Eodem modo quo ante pars finiftra ita referatur:

$-2\beta l\ \text{fin.}\ r + \alpha\beta\ \text{fin.}\ r$
$+\frac{ddz}{dt^2} + 2\beta\ \text{cof.}\ r.\ \frac{dx}{dt} - 2\beta\ \text{fin.}\ r\ \frac{dy}{dt}$
$+2\beta l y\ \text{cof.}\ r + \alpha\beta y\ \text{cof.}\ r - \beta\beta z$
$-2\beta l x\ \text{fin.}\ r + \alpha\beta x\ \text{fin.}\ r$

quocirca aequatio tertia modo ante tradito difpofita erit

$\frac{ddz}{dt^2} + 2\beta\ \text{cof.}\ r.\ \frac{dx}{dt} - 2\beta\ \text{fin.}\ r.\ \frac{dy}{dt}$
$-2\beta l x\ \text{fin.}\ r + \alpha\beta x\ \text{fin.}\ r + \frac{3}{2}\mu x\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ r + \frac{3}{2}\mu x\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ (r-2p)$
$\quad + \frac{3}{2}\nu x\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ (3r-2p) - \frac{3}{2}\nu x\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ r$
$-2\beta l y\ \text{cof.}\ r + \alpha\beta y\ \text{cof.}\ r + \frac{3}{2}\mu y\ \text{fin.}\ \iota\ \text{cof.}\ r - \frac{3}{2}\nu y\ \text{fin.}\ \iota\ \text{cof.}\ r$
$\quad - \frac{3}{2}\mu y\ \text{fin.}\ \iota\ \text{cof.}\ (r-2p) + \frac{3}{2}\nu y\ \text{fin.}\ \iota\ \text{cof.}\ (3r-2p)$
$+z - \beta\beta z + \lambda\lambda z - \frac{3}{2} z\ \text{fin.}\ \iota^2 + \frac{3}{2} z\ \text{fin.}\ \iota^2\ \text{cof.}\ (2r-2p) =$
$\quad = 2\beta l\ \text{fin.}\ r - \alpha\beta\ \text{fin.}\ r - \frac{3}{2}\mu\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ r + \frac{3}{2}\mu\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ (r-2p)$
$\quad - \frac{3}{2}\nu\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ (3r-2p) + \frac{3}{2}\nu\ \text{fin.}\ \iota\ \text{fin.}\ r.$

§. 62. In huius aequationis parte dextra potiffimum confiderari debet terminus $\text{fin.}\ r$, coefficiente:

$$2\beta l - \alpha\beta - \frac{3}{2}\mu\ \text{fin.}\ \iota + \frac{3}{2}\nu\ \text{fin.}\ \iota$$

affectus, qui nifi penitus abfit, id erit indicio, inclinationem orbitae lunaris ι non recte effe affumtam. Tum enim valor literae z neceffario inuolueret huiusmodi terminum:

$k\ \text{fin.}\ r$

k ſin. r; quare cum per hypotheſin inclinatio ι ſit rite aſſumta, neceſſe eſt, vt ille coefficiens euaneſcat, ita vt fiat

$$2\beta l - \alpha\beta - \tfrac{3}{4}(\mu - \nu)\,\text{ſin.}\,\iota = 0.$$

niſi forte euolutione terminorum ſiniſtrae partis pariter eiusmodi termini reſultent, qui cum iſto ſimul ſumti euaneſcere deberent: manifeſtum autem eſt hos terminos ſemper fore quam minimos. Hinc igitur patet, dari certam quandam relationem inter motum lineae nodorum, a qua literae α et β pendent, et ipſam inclinationem ι, quam adeo ex Theoria definire liceat.

SECTIO X.

De valoribus numericis quantitatum conſtantium l, m, α, β, μ, ν, hincque λ cum inclinatione ι.

§. 63. Ante quam euolutionem trium aequationum in ſectione praecedente exhibitarum ſuſcipiamus, conueniet ex tabulis mediorum motuum Lunae valores literarum l, m, α, β, μ, ν cum angulo ι excerpere, quo facilius vera cuiusque quantitas cognoſci et diiudicari posſit, quaenam prae reliquis tam ſint exiguae, vt in calculo negligi queant. Hunc in finem ex tabulis angulorum ζ, θ, r, ☊, et t, qui tempori ſunt proportionales, incrementa, quae certo temporis interuallo accipiunt, depromere neceſſe eſt, quippe quibus eorundem angulorum differentialia ſunt proportionalia.

§. 64. Statuamus interuallum iſtud temporis, pro quo incrementa ſunt definienda, 30 dierum. Ac primo ex tabulis ſolaribus longitudo Solis media ζ hoc tempore capit incrementum $29^\circ.\ 34'.\ 9,\ 9''$, vnde in minutis ſecundis erit

Incrementum longitudinis mediae Solis $\zeta = 106449, 9$
vnde si subtrahatur motus apogaei qui est $= \quad 5, 4$

prodibit incrementum anomaliae mediae $= 106444, 5$
Hinc ergo erit increm. $t = 106444, 5$, ad quod omnia reliqua incrementa deinceps referemus, sicque erit $\frac{d\zeta}{dt} = 1,000051$.

§. 65. Deinde ex tabulis lunaribus pro eodem tempore 30 dierum excerpatur motus Lunae medius, qui est $13^s. 5^\circ. 17'. 31''$, qui angulus in minuta secunda conversus dabit

incr. $\theta = 1422051$, vnde fit $\frac{d\theta}{dt} = 13, 390350$.

Deinde ex eadem tabula motus retrogradus nodi colligitur $1^\circ. 35'.19''$, hincque in minutis secundis incr. $☊ = -5719$ vnde deducitur $\frac{d☊}{dt} = -0, 053851$.

§. 66. Pro quantitate iusta inclinationis mediae, etsi ea per elementa reliqua ex theoria determinetur: tamen, quia nondum constat, quantum partes adhuc neglectae eo conferre queant, eam ex meis tabulis lunaribus derivemus. Hinc igitur ex prima tabula pro quantitate z, cuius argumentum et angulus ι sumto $r = 90^\circ$ erit $z = 896400$ partibus decies millionesimis vnitatis, qui per distantiam mediam Solis a Terra diuisus dat tangentem inclinationis ι quam quaerimus. At vero in iisdem tabulis distantia media supponitur $= 9964129$ partium decies millonesimarum vnitatis, vnde colligitur tang. $\iota = \frac{896400}{9964129}$, hincque $\iota = 5^\circ.8'.26,3''$ hinc erit $\frac{\iota}{2} = 2^\circ. 34'. 13, 1''$. Quare cum posuerimus

$\mu = \text{cos.} \frac{\iota^2}{2}$ et $\nu = \text{sin.} \frac{\iota^2}{2}$

statim habemus valores harum literarum

$\mu = 0,998000 \quad \nu = 0,002000$

$l\mu = 9,9991306 \quad l\nu = 7,3010300$

ex

ex his porro deducitur

$\mu\mu = 0,996004$; $\mu\nu = 0,001996$; $\nu\nu = 0,000004$
$l\mu\mu = 9,9981612$; $l\mu\nu = 7,3001606$; $l\nu\nu = 4,6068596$.

§. 67. Deinde cum inuenerimus

$$\frac{d\Omega}{dt} = -0,053851$$

supra autem posuerimus

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dt}\,\text{cos.}\,\iota \text{ et } \beta = -\frac{d\Omega}{dt}\,\text{sin.}\,\iota,$$

valores harum literarum reperientur sequentes:

$\alpha = 0,053636$; $\beta = 0,004825$
$l\alpha = 8,7294565$; $l\beta = 7,6835079$

ex quibus deducuntur sequentes valores

$\alpha\alpha = 0,002877$; $\alpha\beta = 0,000259$; $\beta\beta = 0,000023$
$l\alpha\alpha = 7,4589130$; $l\alpha\beta = 6,4129644$; $l\beta\beta = 5,3670158$.

Praeterea vero pro sequentibus notasse iuuabit esse

$l\,\text{cos.}\,\iota = 9,9982596$ $l\,\text{sin.}\,\iota = 8,9523110$.

§. 68. His valoribus definitis ad reliquos progrediamur; ac primo quidem, quia posuimus $p = \theta - \zeta$ atque $\frac{dp}{dt} = m$, erit $m = \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\zeta}{dt}$, quare ex valoribus supra inuentis habebimus

$$m = 12,390299 \text{ et } l\,m = 1,0930818.$$

Denique cum sit

$$r = \theta - \Omega \text{ et } l = \frac{dr}{dt} \text{ erit}$$

$$l = \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\Omega}{dt}$$

vnde ex valoribus supra inuentis colligemus

$$l = 13,444201 \text{ et log.}\, l = 1,1285350.$$

§. 69. Ex his iam valoribus inuentis quaeramus etiam valorem literae λ ope huius aequationis:

$$\lambda\lambda = (l-\alpha)^2 + \tfrac{1}{2}\beta\beta + \tfrac{3}{4}(\mu\mu + \nu\nu) - 1.$$

Primo igitur habemus $l-\alpha = 13,390565$, hincque $(l-\alpha)^2 = 179,307250$; deinde vero est

$\tfrac{1}{2}\beta\beta = \quad 0,0000011$; denique

$\tfrac{3}{4}(\mu\mu+\nu\nu) = \quad 0,698004$; quibus inuentis concluditur fore

$$\lambda\lambda = 178,805265$$

hincque

$\lambda = 13,371806$ et $l\lambda = 1,1261901$

vbi notetur λ denotare celeritatem angularem, qua Luna in distantia $= 1$ circa Terram in circulo reuolueretur semota actione Solis.

§. 70. Tandem videamus quam prope valores inuenti conueniant cum conditione circa aequationem tertiam memorata, qua esse debebat

$$2\beta l - \alpha\beta - \tfrac{3}{2}(\mu-\nu)\,\text{fin.}\,\iota = 0 \quad \text{fiue}$$

$$2\,l - \alpha - \tfrac{3}{2}\frac{(\mu-\nu)}{\beta}\,\text{fin.}\,\iota = 0$$

pro qua cum fit

$$\mu - \nu = 0,996000 \quad \text{et} \quad 2\,l - \alpha = 26,034766$$

tum vero

$$\frac{3(\mu-\nu)\,\text{fin.}\,\iota}{2\beta} = 27,743700, \text{ debebat esse}$$

$$26,034766 - 27,743700 = 0 = -1,708934$$

qui quidem error enormis videri posset; verum per β multiplicatus fit tantum $= 0,008246$, qui fatis est exiguus, vt terminis in aequatione neglectis adscribi possit. Ex quo pro sequenti euolutione probe teneatur, omnes terminos formae k fin. r prorsus omitti debere. Praeterea vero etiam meminisse oportet, motum Lunae quoque ab actione Planetarum aliquantillum perturbari, ac fortasse etiam figura Lunae, quatenus a sphaerica discrepat, aliquid conferre potest.

§. 71.

§. 71. Tandem pro sequentibus calculis, vbi excentricitas orbitae lunaris introducetur, statuemus anomaliam mediam Lunae $= q$ et $\frac{dq}{dt} = n$, vnde cum $q = \theta -$ apogaeo, erit $n = \frac{d\theta}{dt} - \frac{d.\,apog.}{dt}$. Tum vero pro interuallo 30 dierum promouetur apogaeum per angulum $3^\circ.\,20'.\,32'' = 12032'$, sicque erit $\frac{d.\,apog.}{dt} = 0,113296$, vnde colligitur

$$n = 13,277054 \text{ et } ln = 1,1221177.$$

§. 72. His omnibus praeparatis totum negotium simili fere modo absolui poterit quo vsus sum in *Theoria* mea *Lunae noua methodo pertractata*, dum scilicet inuestigatio coordinatarum x, y, z in certos ordines distribuitur, ita vt in singulis geminae integrationes accurate expediri queant. Verum hoc opus tantae molis nunc quidem suscipere vix ausim, vnde eius executionem vel in aliud tempus, differre, vel aliis, qui huiusmodi calculis delectantur relinquere cogor. Ceterum ex his iam perspicitur tabulas lunares super hac Theoria exstructas longe aliam faciem esse habituras, quae fortasse ad vsum practicum magis erunt accommodatae.

CON-

CONIECTVRA DE LOCIS COELI, IN QVIBVS COMETA ANNI 1770, IN PROXIMO SVO AD PERIHELIVM REDITV, E TELLVRE NOSTRA CONSPICI DEBET.

Auctore

LEXELL.

§. 1.

Quae in Dissertatione de Tempore Periodico Cometae An. 1773. obseruati, attulimus argumenta, pro stabilienda quantitate huius Temporis Periodici, licet omnino perfectam certitudinem gignere non valerent, insignem tamen verisimilitudinis gradum sententiae a nobis propositae iisdem conciliari, certo persuasi sumus; hinc quum res Astronomorum attentione digna quam maxime sit, vt reditus huius Cometae obseruetur, omnino operae pretium erit, vt disquiramus de illis coeli locis, vbi hunc Cometam quaerere conuenit, dum proxima vice eius reditum ad Perihelium exspectamus. Quia igitur inuentum est tempus Periodicum Cometae nostri 5 annorum cum dimidio, perspicitur hunc Cometam proxima vice An. 1781 mense Augusti iterum per Perihelium transiturum fore, modo hic valor pro tempore Periodico rite se habeat. At tamen facili negotio intelligitur, hac in re tantam exactitudinem exspectari non debere, vt non incertitudo quaedam, aliquot mensium vel adeo dimidii anni admitti debeat; quam ob rem haec disquisitio ita est instituenda, vt pro reditu Cometae huius incertitudinis quoque habeatur ratio.

§. 2.

§. 2. Si autem pro tempore Periodico aliqua admittatur mutatio, illi conuenienter reliqua etiam Elementa forent immutanda, id quod ex Tabulis §. 17. Dissertationis modo citatae allatis, redditur perspicuum; ex priori enim intelligitur, tempore Periodico aucto, Parametrum orbitae augeri, et posterior declarat augmento temporis Periodici etiam augmentum quoddam distantiae Perihelii respondere. Caeterum mutato Tempore reuolutionis, etiam tam Longitudo Nodi, quam inclinatio orbitae aliquas subibunt mutationes. Si vero singularum harum mutationum rationem in proposito negotio habere voluissemus, rem omnino difficillimae indaginis adgressi essemus, quum vix quidem determinari queat, qua ratione omnium Cometae Elementorum variationes inter se combinentur; tum vero eiusmodi disquisitio omnino pro superflua habenda fuisset, siquidem pro instituto sufficit, vt loca Cometae intra praecisionem vnius vel alterius gradus definiantur. In nostro igitur computo constanter vsi sumus, illis Cometae Elementis, quae §. 30. Dissertationis allatae proposuimus, pro habenda autem ratione discriminis in Tempore Periodico, varias constituimus hypotheses respectu temporis, quo Cometa per Perihelium suum transit; quod quum incidere deberet in 13 diem Augusti Anni 1781, si tempus Periodicum propositum rite se habeat, hypothesis principalis est, qua supponitur Tempus Perihelii in 13 Aug. incidere; reliquae autem hypotheses inde formantur, quod tempus Perihelii statuatur incidere in diem 13 reliquarum mensium. Determinationes autem locorum Cometae, his Elementis accommodatae non quidem enormiter a vero aberrare possunt, nisi vbi Cometa valde prope ad tellurem accedit, huiusmodi tamen in casibus ne Elementa quidem exactissime determinata pro locis Cometae Geocentricis exactitudinem praebent

omnimodam, quandoquidem ob actionem telluris in Cometam, loca Cometae e terra conspicua multo aliter se habere possent, ac ex Theoria elicerentur.

§. 3. Dum loca Cometae Geocentrica, pro datis temporibus, ex Elementis cognitis deduci debent, ante omnia requiritur, vt inuestigentur anomaliae Cometae verae, eiusque distantiae a Sole. Haec inuestigatio quemadmodum pro hypothesi orbitarum Parabolicarum directe suscipi potest, tum pro orbitis Eclipticis multo operosior est, et non nisi via indirecta expeditur. Facillima autem ratio, qua istam inuestigationem exsequi liceat, in eo consistit, vt computetur Tabula, quae pro datis angulis anomaliae exhibet, tum tempus quo Cometa hunc angulum a Perihelio conficit, cum etiam distantiam Cometae a Sole; nam si iam dato tempore quaeri debet anomalia et distantia, id per interpolationem huiusmodi Tabulae perficietur. Pro casu igitur praesenti eiusmodi Tabulam construximus, quae pro singulis gradibus vsque ad 90°, exhibet tempus et distantiam, deinde pro angulis 90° gradus superantibus vsque a 110°, interualla angulorum tantum semissis gradus constituimus et denique pro angulis inter 110° et 120° contentis, haec interualla 20 minutorum constituta sunt; quo facto quaestio proposita ope interpolationis haud difficilis instituitur; vltra 120° vero hanc Tabulam persequi non erat necesse, distantiis Cometae a Sole pro angulis Anomaliae maioribus, adeo increscentibus, vt spes non sit Cometam amplius e Terra fore visibilem. Quum Ephemerides Annorum 1780 et 1781 nondum mihi ad manus essent, dum hos institui calculos, valdeque operosum fuisset loca Solis singula ex Tabulis computare, pro inuestigatione locorum Solis datis temporibus respondentium, vsus sum Ephemeridibus Annorum, qui quaternario

rio praecedebant annos propofitos, id eft Ephemeridibus Annorum 1776 et 77, ita tamen vt fimul rationem haberem correctionum, quae pro locis Solis ex his Ephemeridibus deductis, ad fimilia ex Ephemeridibus Annorum 1780 et 1781 deducenda, adplicari debent, quo facto non dubito, quin loca Solis intra dimidium minuti primi rite fe habere debeant, maior autem exactitudo hoc in negotio omnino praeter rem foret.

§. 4. Deinde quum Cometa nofter ob debilitatem luminis non nifi in confiniis Perihelii confpicuus fit, inquirendum erat quanto tempore vel ante, vel poft tranfitum per Perihelium incolis terrae vifibilis effe poffit; qua de re iudicium inde inftitui poteft, quod Anno 1770 vltima Cometae obferuatio fit inftituta die 2 Octobris, exiftente tunc diftantia eius a Sole 1, 0958 et a terra 1, 0079; ita vt interualla Cometae, Solis et terrae tum temporis fere aequalia haberentur. Hinc itaque colligere licet, Cometam eousque in terra vifibilem fore, quovsque eius diftantia a terra, diftantiam mediam Solis a terra non multum excedit, imprimis fi diftantia eius a Sole, hac diftantia media quoque fuerit minor; at fi Cometa aliquanto longius a terra fuerit diffitus, quam Sol, vix e terra confpici poterit, nifi fi proprior Perihelio fuerit.

§. 5. Si Cometae tempus Periodicum conftituatur tale, quale in Differtationis commemoratae §. 30. propofuimus, continget eius Tempus Perihelii die 13 Aug. 1781 ipfo fere meridie. Conftituto igitur hoc tempore pro Epocha, loca Cometarum ex Elementis noftris ita inueniuntur determinata, vti fequens Tabula oftendit:

Temp. Perih. Aug. 13.

Temp.		Long. Com.	Lat. Com.	Dist. a ☉
Maii	1.	$8^s.27^\circ$.	$2^\circ.55'$.Bor.	0, 882
	5.	29	3. 2	0, 813
	10.	9. 0	3. 15	0, 717
	15.	9. 1	3. 29	0, 637
	21.	9. $1\frac{1}{2}$	3. 48	0, 547
	26.	9. $2\frac{1}{3}$	4. 8	0, 471
Iun.	1.	9. 3	4. 41	0, 377
	5.	9. $3\frac{1}{2}$	5. 11	0, 318
	10.	9. 4	5. 55	0, 255
	15.	9. $4\frac{1}{2}$	7. 7	0, 187
	20.	9. 5	9. 28	0, 126
Aug.	2.	3. 6	49 Auſ.	

Hanc autem Tabulam vlterius continuare neceſſe non eſt, ſiquidem facile conſtet, loca Cometae vlteriora vix quicquam differre ab illis, quae A. 1770 fuerunt obſeruata, ſaltem diuerſitas vnum gradum in Longitudine non ſuperabit.

§. 6. Pro conſtituto tempore Periodico die 13 cuiuscunque reliquarum menſium, loca Cometarum erunt, vti ex Tabulis ſequentibus conſtat:

Perih. Iulii 13.

Temp.		Long. Com.	Latit.	Dist. a ☉
Maii	1.	$10^s.5^\circ$.	$2^\circ.7'$.B	0, 823
	15.	10. 26	2. 6	0, 629
Iunii	1.	11. 27	1. 33	0, 524
	15.	1. 0	30	0, 572
Iulii	1.	1. 26	25 A	0, 770

Perih. Iunii 13.

Temp.		Long. Com.	Latit.	Dist. a ☉
April	1.	$10^s.1^\circ$.	$1^\circ.21'$.B	1, 310
	15.	10. 17	1. 13	1, 123
Maii	1.	11. 12	0. 49	0, 991
	15.	0. 5	0. 20	0, 984
Iunii	1.	1. 3	0. 18 A	1, 109

Perih. die 13 Maii.

Temp.		Long. Com.	Latit.	Dist. a ☉
April	1.	10. 28	33 B	1, 401
	15.	11. 18	12	1, 352
Maii	1.	0. 13	14 A	1, 398

Perih. die 13 April.

Temp.		Long. Com.	Latit.	Dist. a ☉
Martii	1.	10. 12	28 B	1, 718
	15.	11. 1	10	1, 622
April	1.	11. 25	12 A	1, 589

Perih.

Perih. die 13. Martii

Temp.	Long. Com	Latit.	Dist. a ♁
Febr. 13.	$10^{s}.14^{\circ}$.	9′ B	1,781
Mart. 1.	11. 6	12 A	1,692
15.	11. 24	29	1,675

Perih. die 13. Ian.

Temp.	Long. Com	Latit.	Dist. a ♁
Ian. 13.	$10^{s}.18^{\circ}$.	31′ A	1,425
Febr. 1.	11. 19	57	1,265
15.	0. 10	1°. 2	1,295

Perih. die 13. Nov.

Temp.	Long. Com	Latit.	Dist. a ♁
Nov. 13.	$9^{s}.\ 6^{\circ}$.	54′ A	0,819
Dec. 1.	10. 20	2°.55	0,406
15.	10. 29	3. 14	0,414
Ian. 1.	0. 13	3. 12	0,431
15.	1. 10	2. 19	0,571

Perih. die 13 Sept.

Temp.	Long. Com	Latit.	Dist. a ♁
Maii 15.	$7^{s}.29^{\circ}$.	3°.13′.B	0,906
Iun. 1.	7. 22	25	0,746
15.	7. 12	18	0,671
Iulii 1.	7. 5	2. 56	0,610
15.	6. 29	29	0,550
Aug. 1.	6. 24	1. 37	0,504
15.	6. 23	51	0,472
Sept. 1.	6. 1	58 A	0,320
15.	5. 10	2. 10	0,339
Oct. 1.	4. 22	2. 27	0,481
15.	4. 21	2. 13	0,600
Nov. 1.	4. 22	1. 58	0,694
15.	4. 20	1. 52	0,717
Dec. 1.	4. 10	1. 37	0,778

Perih. die 13 Febr.

Temp.	Long. Com.	Latit.	Dist. a ♁
Febr. 13.	$11^{s}.\ 8^{\circ}$.	28′. A	1,605
Mart. 1.	0. 3	44	1,564
15.	0. 24	49	1,616

Perih. die 13 Dec.

Temp.	Long. Com.	Latit.	Dist. a ♁
Dec. 13.	$9^{s}.28^{\circ}$.	39′. A	1,150
Ian. 1.	10. 28	1. 16	0,937
15.	11. 23	1. 32	0,874
Febr. 1.	0. 23	1. 26	0,937

Perih. die 13 Octob.

Temp.	Long. Com.	Latit.	Dist. a ♁
Iunii 15.	$7^{s}.\ 3^{\circ}$.	2°.38′.B	1,108
Iulii 1.	7. 0	2. 17	1,110
15.	6. 29	1. 59	1,130
Aug. 1.	7. 1	1. 36	1,119
15.	7. 4	1. 17	1,066
Sept. 1.	7. 10	50	0,965
15.	7. 16	27	0,838
Oct. 1.	7. 24	31 A	0,639
13.	7. 27	1. 34	0,470
Nov. 1.	7. 14	5. 8	0,231
15.	6. 25	6. 1	0,223
Dec. 1.	4. 15	7. 44	0,176
15.	3. 22	4. 31	0,237
Ian. 1.	3. 5	2. 36	0,481
15.	3. 0	1. 42	0,684
Febr. 1.	3. 1	1. 2	0,969
15.	3. 4	40	1,231

§. 7. Ex his Tabulis iam intelligitur, si Cometae transitus per Perihelium contigerit mensibus Iulii, Augusti, Sept., Octob., Nov. et Decembris, Cometam e tellure fore visibilem; at si reliquis sex mensibus contingat, valde dubium esse posse, an Cometa e terra conspici queat. Praeterea quum Tempore Perihelii incidente in 13 Augusti, vel in 13 Novemb. motus Cometae e terra visus sit directus, retrogradus autem fiat si pro tempore Perihelii assumatur 13 Septemb. vel 13 Octob., pro locis Cometae exactius determinandis, adhuc hypotheses quasdam intermedias constitui oportuisset, ponendo tempus Perihelii, diebus 1 Sept. vel 1 Nouemb. contigisse. Tentamine autem facto reperimus, pro diiudicandis veris Cometae locis sufficere si calculus sub hypothesi posteriori, pro diebus 1 et 15 Nov. atque 1 et 15 Decemb. instituatur. Haec igitur loca si coniunctim considerentur cum illis, quae Tabula praecedenti attulimus, emerget sequens Tabula, quae repraesentat loca coeli, vbi Cometam datis Anni temporibus quaerere oportet.

§. 8. Loca quae in Tabula nostra asterisco sunt notata, eius sunt indolis, vt dubium sit, an Cometa in illis videri queat, ob insignem a terra distantiam; hinc intelligitur a medio mensis Februarii vsque ad initium Maii, vix vllam esse spem, vt hunc Cometam videre liceat. Praeterea pro vsu huius Tabulae notetur, quod si supponatur Tempus Periodicum Cometae contineri his limitibus 5 et 6 Annorum, Tempus Perihelii alicubi inter 13 Aug. 1780 et 13 Aug. 1782, reperiri debere in proximo Cometae reditu, hincque interuallum temporis, quo Astronomos huic Cometae imprimis inuigilare oporteret, comprehendi intra 1 Maii 1780 et 1 Maii 1782. Caeterum

...ng. Com.	Latit.	Long. Com.	Latit.
27°.	2°.55'. B		
29	3. 13		
22	3. 25		
3 *	2. 38		
0 *	2. 17		
6	0. 54 A		
20	2. 55		
29	3. 14	9ˢ. 28°.	0°.39'. A
18 *	0. 31		
19 *	0. 57		
14 *	0. 9 B		

Temp.	Long.Com.	Latit.	Long.Com.	Latit.	Long.Com.	Latit.	Long.Com.	Latit.	Long.Com.	Latit.
Maii 1.	0ˢ. 13°. *	0°.14′. A	11ˢ. 12°.	0°.49′. B	10ˢ. 5°.	2°. 7′. B	8ˢ. 27°.	2°.55′. B		
15.	0. 5	0. 20 B	10. 26	2. 6	9. 1	3. 29	7. 29	3. 13		
Iunii 1.	1. 3	0. 18 A	11. 27	1. 23	9. 3	4. 41	7. 22	3. 25		
15.	1. 0	0. 30 B	9. 4	7. 7	7. 12	3. 18	7. 3 *	2. 38		
Iulii 1.	1. 26	0. 25 A	in conj.	cum ⊙	7. 5	2. 56	7. 0 *	2. 17		
15.	in conj.	cum ⊙	6. 29	2. 29	6. 29 *	1. 59				
Aug. 1.	3. 5	0. 49 A	6. 24	1. 37	7. 1 *	1. 36				
15.	3. 12	1. 16	6. 23	0. 51	7. 4 *	1. 17				
Sept. 1.	3. 23	1. 19	6. 1	0. 58 A	7. 10	0. 50				
15.	4. 1	1. 15	5. 8	2. 10	7. 16	0. 27				
Oct. 1.	4. 10	1. 9	4. 22	2. 27	7. 24	0. 31 A				
15.	4. 21	2. 13	7. 27	1. 34	- -	- -				
Nov. 1.	4. 22	1. 58	7. 14	5. 8	8. 22	1. 5				
15.	4. 20	1. 52	6. 25	6. 1	9. 5	2. 43	9. 6	0. 54 A		
Dec. 1.	4. 10	1. 37	4. 15	7. 44	10. 4	5. 42	10. 20	2. 55		
15	4. 0	1. 20	3. 22	4. 31	9. 3	19. 7	10. 29	3. 14	9ˢ. 28°.	0°.39′. A
Ian. 1.	3. 5	2. 36	0. 13	3. 12	10. 28	1. 16				
15	3. 0	1. 42	1. 10	2. 19	11. 23	1. 32	10. 18 *	0. 31		
Febr. 1.	3. 1	1. 2	2. 5	1. 0	0. 23	1. 26	11. 19 *	0. 57		
15.	3. 4 *	0. 40	0. 10 *	1. 2	11. 8 *	0. 28	10. 14 *	0. 9 B		
Mart. 1.	0. 3 *	0. 44	11. 6 *	0. 12	10. 12 *	0. 28 B				
15.	0. 24 *	0. 49	11. 24 *	0. 29	11. 1 *	0. 10				
April 1.	11. 25 *	0. 12	10. 28 *	0. 33 B	10. 1 *	1. 21				
15.	0. 16 *	0. 29	11. 18 *	0. 12	10. 17 *	1. 13				

rum fatemur quidem loca in hac Tabula allata non admodum aequabili tenore procedere; verum primo perpendendum eſt, vt in minus ſpatium Tabula noſtra reduceretur, tranſitum ex vna columna verticali in praecedentem ſaepius eſſe factum. Sic poſito tempore Perihelii Iunii 13, habetur locus Cometae pro 1 Maii in ſecunda columna verticali $11^s. 12^\circ$, at pro 15 Maii eiusdem locus in prima columna, nimirum $0^s. 5^\circ$, allatus eſt. Tum vero inſignes ſaltus alibi non prodeunt, quam pro locis Cometae menſe Decembris, quod inde euenire neceſſe erat, quia tunc Cometa in vicinia telluris reperitur, et huiusmodi quidem in caſu perueſtigatio loci Cometae non niſi operoſo valde labore perficitur.

§. 9. Etiamſi Tempus Periodicum Cometae non intra limites modo commemoratos contineretur, tamen praeſens Tabula vſum habere poterit pro determinandis eius locis Geocentricis, ſaltem intra vnum vel alterum gradum; exceptis tamen caſibus vbi Cometa in telluris vicinia verſatur, verum vti iam monuimus, tum vix quidquam de iſtis locis definiri poteſt. Quod ſi igitur Tempus Periodicum Cometae vt prorſus indefinitum conſideretur, Tabulae huius ope tamen innoteſcet, quibusnam in coeli regionibus, Cometam ſingulis menſibus quaerere oporteat, confidimus igitur Aſtronomorum induſtria veram quantitatem temporis Periodici in poſterum determinatum iri.

§. 10. Licet contra determinationem Temporis Periodici a nobis propoſiti grauiſſimum id proponi queat dubium, quod minime veriſimile videatur, Cometae huius tam breui tempore ad Perihelium reuertentis, non niſi Anno 1770 inſtituere licuiſſe obſeruationes; tamen ex Tabula

bula nostra solutio huius dubii quadantenus adferri potest; quippe quum inde colligatur Tempus Perihelii in ea incidere potuisse momenta, vt Cometa e Terra plane non fuerit visibilis. Deinde tempus Perihelii ita esse potest comparatum, vt etiamsi Cometa in Tellure nostra conspicuus esset, tamen non adeo prope ad terram accedat, ac Ao. 1770 factum est; nam si eo quoque anno Cometa octo tantum diebus ante vel post 13 Augusti ad Perihelium accessisset, duplo longius in proxima distantia a Tellure remotus fuisset, quam A. 1770 erat. Hisce igitur in casibus fieri potest, vt Cometa noster, qui valde debili lumine splendet, vti ex obseruationibus Cel. *Messier* constat, nudis oculis non sit perceptibilis, ideoque Astronomorum attentionem saltem ante hoc Seculum, quo vsus Telescopiorum inualere coepit, plane effugerit. In proximis autem ad terram distantiis, motus Cometae e tellure visus est celerrimus, ideoque tempus quo Cometa nudis oculis videri potest, arctis valde limitibus concludi necesse est. Caeterum si cui videatur his rationibus dubium istud non plane tolli, perpendat quoque necesse est, nostras determinationes argumentis et multitndine et pondere grauissimis inniti, ita vt vix in dubium vocari queant, nisi simul obseruationes in quibus fundantur in dubium vocandae essent. Quicquid autem sit, has determinationes non nisi valde probabiles, vlteriori tamen examine tam calculo, quam per obseruationes instituendo, comprobandas proposui.

§. 11. Quoniam Cometae nostri orbita ita sit comparata, vt per orbitas Planetarum, Saturno et Mercurio excepto, transeat, operae pretium erit, vt inquiramus quam prope ad Planetas accedere queat, dum eorum orbitis quam proximus est. In Dissertatione nostra saepius com-

commemorata iam quidem oſtendimus, Cometam A. 1770 die 1 Iulii ad terram tam prope acceſſiſſe, vt 65 vicibus ipſi eſſet propior, quam Sol in diſtantia media, et caſu quidem maxime ſingulari hoc eueniſſe cenſendum eſt, quum vix tantillum deficeret, quin haec proxima diſtantia eſſet, in qua Cometa reſpectu orbitae telluris verſari poſſit. Quum ſcilicet huius Cometae inclinatio ad Eclipticam tam ſit exigua, proximus Cometae acceſſus ad orbitam telluris reperietur, ſi inquiratur in locum Cometae a Sole aeque diſtantem, ac terra a Sole diſtat; ſaltem hoc modo proximá diſtantia Cometae noſtri ab Ecliptica prope vera inuenitur, quam deinde facili correctione emendare licebit.

§. 12. Si angulus anomaliae pro Cometa ſupponatur 76°.22′, ob elongationem Perihelii a ☋ = 43°. 59′. 40″, erit elongatio Cometae a ☋ = 32°. 22′. 20″ et ſi angulus ad Eclipticam reducatur 32°. 21′. 44″, ideoque Longitudo Cometae heliocentrica 9ˢ. 9°. 58′. 16″, exiſtente eius diſtantia a Sole = 1, 016778; at vero die Iulii 1, 1177 A. 1770, erat Longitudo Solis 9ˢ.9°.58′.16″ et diſtantia a terra = 1,016791, quare quum anomalia 76°.22′ reſpondeat tempori 43,4075 Dier., ſi ſupponamus Tempus Perihelii contigiſſe die 12, 2898 Aug., Cometam et terram e Sole viſos in coniunctione fuiſſe neceſſe eſt, die 1, 1777 Iulii, differentia diſtantiarum a Sole exiſtente = 0, 000013; tum vero reperietur diſtantia inter Cometam et tellurem 0, 014963. Haec igitur diſtantia erit proxima in qua Cometa reſpectu Eclipticae verſari poteſt, et ſi Cometa vno tantum die citius per Perihelium tranſiiſſet, in apparitione Ao. 1770 facta, die 1 Iulii in maxima cum Tellure noſtra vicinia fuiſſet.

§. 13. Tum vero item verſus Nodum Aſcendentem Cometa ad orbitam Telluris prope accedere poteſt, pro angulo enim anomaliae 73°.29′, fiet elongatio a ☊=62°.31′, ideoque Longitudo Cometae e Sole viſa = 2ˢ. 9°. 48′ proxime, exiſtente eius diſtantia a Sole =0,9852. Iam autem die 1 Decembris eſt Longitudo terrae a Sole viſa 2ˢ. 9°. 28′ vel quod excurrit, exiſtente diſtantia a Sole 0,9853; quare quum Sol aeque remotus ſit a terra ac Cometa, proxima diſtantia Cometae ab Ecliptica heic reperietur, quae erit =0,02402 proxime. Hinc colligitur ſi Cometa aliquando tranſierit per Perihelium die 22 Octobris, tum fieri debere, vt Cometa in proxima coniunctione cum Tellure ſit inter 1 et 2 Decembris, minimo interuallo horum corporum exiſtente 0,02402 circiter.

§. 14. Conſideremus nunc, quibus in punctis orbitae ſuae Cometa reperiatur, dum proxime ad Planetam Venerem accedit; quia igitur Longitudo Nodi pro venere ſit 2ˢ. 14°. 42′ et inclinatio orbitae 3°. 23′. 20″, habebitur diſtantia interſectionis planorum Veneris et Cometae, a Nodo Cometae =85°.11′.47″, a nodo Veneris =27°.36′.9″ et angulus inclinationis horum planorum = 2°. 52′. 6″. Porro quia Perihelium Cometae a ☊ diſtat 136°. 0′. 20″, erit elongatio Perihelii a Nodo Cometae in orbita Veneris = 50°. 48′. 33″, breuitatis autem gratia hunc Nodum littera N indicemus. Iam quum diſtantia Veneris a Sole his limitibus 0,7284; 0,7182 contineatur, perſpicitur Cometae diſtantiam a Sole diſtantiae Veneris non fieri poſſe aequalem, niſus angulus anomaliae pro Cometa intra 30 et 34° concludatur. Poſita nunc primum anomalia 32°.15′ a Perihelio verſus N computata, erit elongatio Cometae a puncto N=18°.33′ et tum quidem habebitur diſtantia Cometae ab orbita Veneris = 0,0115, exiſtente Longitudine

tudine Cometae circiter 0ˢ. 28°; Cometa igitur hoc in casu Veneri 90 vicibus vicinior est, quam Soli. Deinde si anomalia capiatur 33°. 30′, in plagam priori oppositam, erit elongatio Cometae a puncto N = 84°. 18′. 33″; distantia vero Cometae ab orbita Veneris inuenietur = 0,0363, existente Longitudine Cometae 10ˢ. 22° ciniter.

§. 15. Pro Marte est Longitudo Nodi 1ˢ. 17°. 56′ et inclinatio orbitae 1°. 51′. 0″, vnde prodibit distantia intersectionis planorum Cometae et Martis, seu puncti N a nodo Cometae = 127°.7′.34″ et a nodo Martis 42°.45′.6″, tum erit inclinatio orbitae Cometae ad orbitam Martis = 2°. 18′. 31″. Hinc vero sequitur elongatio Perihelii Cometae a puncto N = 8°. 52′. 46″. Deinde quum distantia Martis a Sole in aphelio sit 1,666 et in Perihelio 1,382, colligitur distantiam Cometae a Sole distantiae Martis non fieri posse aequalem, nisi angulus anomaliae inter 100° et 111° contineatur. Primum igitur computato angulo anomaliae a Perihelio ad eam plagam vbi punctum N iacet, si ponatur hic angulus 109°. 20′., erit elongatio Cometae a puncto N = 100°. 27′ et a Nodo Cometae = 26°. 41′ circiter, hinc Longitudo Cometae = 3ˢ. 16°, vnde ob Longitudinem aphelii Martis 5ˢ. 2°, fiet anomalia media pro orbita Martis = 1ˢ. 16°, cui respondet distantia Martis a Sole 1,627 aequalis distantiae Cometae a Sole, distantia autem Cometae a Marte hinc inuenietur = 0,0645. Deinde computato angulo anomaliae versus plagam oppositam = 105°. 10′, erit elongatio Cometae a Nodo 241°. 10′, ideoque Longitudo eius 8ˢ.11° circiter, hinc fit distantia tam Martis quam Cometae a Sole 1,515 et distantia Martis a Cometa = 0,0557.

§. 16. Ob Longitudinem Nodi pro orbita Iouis 3ˢ. 18°. 46′ et inclinationem = 1°. 19′. 10″, fiet diſtantia puncti N a nodo Cometae = 56°. 54′. 11″ et a nodo Iovis = 90°. 27′. 34″, tumque angulus interſectionis planorum 52′. 15″, elongatio autem puncti N a Perihelio erit 167°. 5′, ideoque ab Aphelio Cometae = 12°. 55′. Quia igitur diſtantia Cometae in Aphelio proxime aequatur diſtantiae Iouis, proxima coniunctio Iouis et Cometae haud procul ab Aphelio Cometae continget. Suppoſito igitur angulo anomaliae ab Aphelio computate verſus punctum N, 5°. 55′ fiet diſtantia Cometae a Sole 5, 451, tum vero erit Elongatio Cometae a puncto N=7°; quare quum ſit locus nodi Iouis 3ˢ. 8°. 46′, ob diſtantiam puncti N a nodo =90ˢ. 27′. 34″, fiet Longitudo puncti N = 6ˢ 9°. 13′. 35″, quae ſi ſubtrahatur a Longitudine Aphelii Iouis 6ˢ. 10°. 53′. 31″, fiet diſtantia puncti N ab Aphelio Iouis 1°. 39′. 56″ circiter, hinc pro caſu praeſenti eſt anomalia Iouis 8°. 40′ proxime, cui reſpondet diſtantia Iouis a Sole = 5, 451; tum vero fiet diſtantia Cometae a Ioue 0, 01009, ideoque haec diſtantia centeſimam modo partem diſtantiae mediae Solis a terra conſtituit, exiſtente pro hac coniunctione Longitudine Iouis 6ˢ.2°. Porro ſi angulus Anomaliae capiatur 6°, 26′ in plagam oppoſitam, erit elongatio Cometae a puncto N = 19°. 20′, hincque anomalia media Iouis 21°. 0′, quare tam Iouis, quam Cometae diſtantia a Sole exprimetur hoc numero 5,438, denique diſtantia Iouis a Cometa habebitur =0,0273 proxime, exiſtente Longitudine Iouis 5ˢ. 20′.

§. 17. Ex his calculis iudicium formari poteſt, de Planetis quorum actio in Cometam noſtrum ſenſibilem habebit effectum. Conſtat igitur ob actionem Martis, vix quidquam in motu Cometae turbari, tum quia Cometa ab hoc Planeta ſemper remotior eſt, cum quod maſſa huiſu

ius Planetae aestimetur esse satis parua. Quin autem tellus et Venus in Cometam effectus haud negligendos producere valeant, vix dubitare licet, praeprimis in propiore ab his Planetis distantia, quae pro tellure est 0, 01496 et pro Venere 0, 0115. Immo ex obseruationibus huius Cometae A. 1770 institutis, satis liquido mihi patere videtur, Cometae motum a die 29 Iunii ad 3 Iulii, ab actione telluris sensibili perturbatione fuisse affectum, obseruationes enim his diebus institutae, cum reliquis siue antea siue postmodum factis, nulla ratione ad consensum redigi posse arbitror, quaecunque Cometae adhibeantur Elementa. Quod autem huius discrepantiae ratio per effectum Parallaxis reddi non queat, iam satis euictum est, siquidem Parallaxis 9′ parum excedit, in Longitudine autem Cometae occurrant errores, qui pluribus gradibus absoluuntur.

§. 18. Perturbationes autem quibus huius Cometae motus ab actione Iouis afficitur valde magnas esse oportere, perspicuum est; immo dum Cometa in proxima a Ioue distantia = 0, 0100 versatur, actio Iouis in Cometam, ipsam vim Solis multum superare debet; id quod facile intelligitur, si perpendatur has vires tenere inter se rationem, quae componitur ex directa ratione massarum Iouis et Solis et inuersa quadratorum ex distantiis Cometae a Ioue et Sole. Quum igitur massa Iouis sit 340, existente massa Solis 365412, ratio autem distantiarum sit 5, 451 : 0, 01009; colligitur vim Iouis in Cometam ipsam vim Solis 272 vicibus superare. Sin autem retineatur distantia Cometae a Sole, patet eius distantiam a Ioue esse debere 0, 1663 circiter, vt actio Iouis actioni Solis aequetur; vnde concluditur per plures omnino gradus actionem Iouis in Cometam vim Solis fore superaturam; quum itaque motus Cometae in Aphelio sit valde

lentus, si eiusmodi inciderit casus, quo Cometa et Iupiter tam prope ad se inuicem accedunt; dubitari omnino nequit, quin inde Elementa pro orbita Cometae, ipsumque adeo tempus Periodicum, mutationes valde magnas subierint. Neque igitur cum certitudine quidquam de reditu huius Cometae ad Perihelium pronuntiare licet; nisi certo euictum sit Cometam ante hunc reditum tam prope ad Iouem accedere non posse, vt actio Iouis in eum, perturbationes insigniores producat.

§. 19. Immo si supponatur Cometam nostrum aliquando in vicinia Iouis fuisse, fieri potuit vt per actionem Iouis orbita eius ita immutata fuerit, vt ab ea quam antea descripserit, plane diuersa sit, hincque vt Cometa noster antea habuerit tempus Periodicum admodum diuersum ab eo, quod nunc ipsi competit; quo posito facile intelligitur, cur Cometa praeter An. 1770 nondum fuerit obseruatus. Re vera autem perspicitur Cometam Anno 1767 in propiori cum Ioue coniunctione fuisse; scilicet diebus 1 Maii et Iunii huius anni, erat Longitudo Iouis $5^s. 18^\circ. 33'$; $5^s. 21^\circ. 21'$; at Longitudo Cometae diebus 1 et 28 Maii $5^s. 19^\circ. 19'$; $5^s. 20^\circ. 19'$ ex quo manifesto liquet die 14 Maii Longitudinem tam Cometae, quam Iouis haberi $5^s. 19^\circ. 49'$, ideoque haec astra tum in coniunctione fuisse; erit autem anomalia Cometae pro isto tempore $6^\circ. 30'$ circiter; quare per ea quae §. 16. demonstrauimus, distantia Cometae a Ioue fuerit, necesse est, 0,0273 proxime, ideoque vis Iouis in Cometam tum temporis vim Solis 37 vicibus superauit. Vnde si simul perpendatur motum Cometae admodum fuisse lentum, dubitare fas non est, quin per actionem Iouis orbita Cometae mutationes maxime insignes subierit.

OBSER-

OBSERVATIONES CIRCA METHODVM INVENIENDI LONGITVDINEM LOCI, EX OBSERVATA DISTANTIA LVNAE A STELLA FIXA.

Auctore

LEXELL.

§. 1.

Quum ex Tabulis Lunaribus pro dato tempore, locus Lunae, hincque eius diſtantia a ſtella cognita, aſſignari queat; viciſſim quoque ex data diſtantia Lunae a ſtella, tempus inueniri poteſt pro dato Meridiano, cui iſta diſtantia reſpondet. Hinc ſi pro loco quodam, cuius Longitudo nondum determinata eſt, innoteſcat tempus iſti diſtantiae reſpondens, differentia horum temporum dabit differentiam Meridianorum cogniti et incogniti. Quum autem diſtantia vera Lunae a fixa non immediate per obſeruationes detur, in eo praeprimis elaborandum eſt, vt ex obſeruatis altitudinibus Lunae et Sellae fixae, nec non diſtantia apparente inter Lunam et fixam, colligatur diſtantia vera horum Aſtrorum.

§. 2. Sit A zenith loci in quo obſeruationes inſtitutae ſunt, A *b* B circulus verticalis pro Luna, in quo B deſignat locum centri Lunae apparentem et *b* locum eius verum, ſimili ratione in circulo verticali A C *c*, deſignet C locum ſtellae apparentem et *c* locum eius verum, vnde ducendo arcus circulorum maximorum BC et *bc*, erit BC diſtantia apparens centri Lunae a ſtella et *b c* diſtantia vera. Quodſi nunc breuitatis gratia, arcus A B, A *b*, A C,

Tab. XIII. Fig. 7.

A C, A c, B C, $b\,c$ reſpectiue indicentur per a, a', b, b', c, c' et angulus C A B per α, problema noſtrum eo reducitur vt ex datis, a, a', b, b', et c colligatur c'.

§. 3. Prima Methodus quae pro ſolutione huius Problematis ſe offert et rigori Geometrico plane conformis eſt, in eo conſiſtit, vt primum ex datis tribus lateribus trianguli Sphaerici ACB inueſtigetur angulus CAB $= \alpha$, tumque ex datis binis lateribus A $b = a'$, A $c = b'$, cum angulo interiacente α in triangulo A $c\,b$, quaeratur latus $b\,c = c'$. Pro hoc inſtituto variae procedendi rationes adhiberi poſſunt, verum hic non niſi praecipuas recencuiſſe iuuabit. Quum itaque ſit in triangulo A C B,

$$\text{coſ.}\, c = \text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, b + \text{ſin.}\, b\, \text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, \alpha,$$

colligitur

$$\text{coſ.}\, \alpha = \frac{\text{coſ.}\, c - \text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, b}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b}, \text{ hinc}$$

$$1 + \text{coſ.}\, \alpha = \frac{\text{coſ.}\, c - \text{coſ.}\, (a + b)}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b} \text{ et}$$

$$1 - \text{coſ.}\, \alpha = \frac{\text{coſ.}\, (a - b) - \text{coſ.}\, c}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b}, \text{ vnde ſi ponatur}$$

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c), \text{ fiet}$$

$$\text{coſ.}\, c - \text{coſ.}\, (a + b) = 2\, \text{ſin.}\, s\, \text{ſin.}\, (s - c) \text{ et}$$

$$\text{coſ.}\, (a - b) - \text{coſ.}\, c = 2\, \text{ſin.}\, (s - a)\, \text{ſin.}\, (s - b),$$

hincque obtinebimus

$$\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{\text{ſin.}\, (s - a)\, \text{ſin.}\, (s - b)}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b}; \quad \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{\text{ſin.}\, s.\, \text{ſin}\, (s - c)}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b},$$

tumque

$$\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{\text{ſin.}\, (s - a)\, \text{ſin.}\, (s - b)}{\text{ſin.}\, s\, \text{ſin.}\, (s - c)}.$$

§. 4. Porro quum ſit

$$\text{coſ.}\, c' = \text{coſ.}\, a'\, \text{coſ.}\, b' + \text{ſin.}\, a'\, \text{ſin.}\, b'\, \text{coſ.}\, \alpha,$$

colligitur

$$\text{coſ.}\, c' = \text{coſ.}\, a'\, \text{coſ.}\, b' + \text{ſin.}\, a'\, \text{ſin.}\, b' - \text{ſin.}\, a'\, \text{ſin.}\, b'\, (1 - \text{coſ.}\, \alpha)$$
$$= \text{coſ.}\, (a' - b') - 2\, \text{ſin.}\, a'\, \text{ſin.}\, b'\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\alpha^2$$

tumque

tumque

$$\cos. c' = \cos. a' \cos. b' - \sin. a' \sin. b' + \sin. a' \sin. b' (1 + \cos. \alpha)$$
$$= \cos. (a' + b') + 2 \sin. a' \sin. b' \cos. \tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

hinc fiet

$$\sin. \tfrac{1}{2} c'^2 = \frac{1 - \cos. c'}{2} = \frac{1 - \cos. (a' - b')}{2} + \sin. a' \sin. b' \sin. \tfrac{1}{2}\alpha^2$$
$$= \sin. \tfrac{1}{2} (a' - b')^2 + \sin. a' \sin. b' \sin. \tfrac{1}{2}\alpha^2 \text{ siue}$$
$$\sin. \tfrac{1}{2} c'^2 = \sin. \tfrac{1}{2} (a' + b')^2 - \sin. a' \sin. b' \cos. \tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

tumque

$$\cos. \tfrac{1}{2} c'^2 = \frac{1 + \cos. c'}{2} = \frac{1 + \cos. (a' - b')}{2} - \sin. a' \sin. b' \sin. \tfrac{1}{2}\alpha^2$$
$$= \cos. \tfrac{1}{2} (a' - b')^2 - \sin. a' \sin. b' \sin. \tfrac{1}{2}\alpha^2, \text{ siue}$$
$$\cos. \tfrac{1}{2} c'^2 = \cos. \tfrac{1}{2} (a' + b')^2 + \sin. a' \sin. b' \cos. \tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

vbi pro $\sin. \tfrac{1}{2}\alpha^2$, $\cos. \tfrac{1}{2}\alpha^2$, valores eorum ſupra inuenti ſubſtitui poſſunt.

§. 5. Pro commodiori reſolutione harum formularum, in prima poni poteſt

$$\text{tang. } A^2 = \frac{\sin. a' \sin. b' \sin. \frac{1}{2}\alpha^2}{\sin. \frac{1}{2}(a' - b')^2} = \frac{\sin. a' \sin. b'}{\sin. a \sin. b} \cdot \frac{\sin. (s-a) \sin. (s-b)}{\sin. \frac{1}{2}(a' - b')^2},$$

pro ſecunda

$$\cos. B^2 = \frac{\sin. a' \sin. b' \cos. \frac{1}{2}\alpha^2}{\sin. \frac{1}{2}(a' + b')^2} = \frac{\sin. a' \sin. b'}{\sin. a \sin. b} \cdot \frac{\sin. s. \sin. (s-c),}{\sin. \frac{1}{2}(a' + b')^2}$$

pro tertia

$$\cos. C^2 = \frac{\sin. a' \sin. b' \sin. \frac{1}{2}\alpha^2}{\cos. \frac{1}{2}(a' - b')^2} = \frac{\sin. a' \sin. b'}{\sin. a \sin. b} \cdot \frac{\sin. (s-a) \sin. (s-b)}{\cos. \frac{1}{2}(a' - b')^2},$$

pro quarta

$$\text{tang. } D^2 = \frac{\sin. a' \sin. b' \cos. \frac{1}{2}\alpha^2}{\cos. \frac{1}{2}(a' + b')^2} = \frac{\sin. a' \sin. b'}{\sin. a \sin. b} \cdot \frac{\sin. s. \sin. (s-c)}{\cos. \frac{1}{2}(a' + b')^2},$$

 tum-

tumque fiet:

$$\sin.\tfrac{1}{2}c' = \sin.\tfrac{1}{2}(a' - b')\,\sec.\,A;\ \text{siue}$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}c' = \sin.\tfrac{1}{2}(a' + b')\,\sin.\,B,\ \text{nec non}$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}c' = \cos.\tfrac{1}{2}(a' - b')\,\cos.\,C;\ \text{vel}$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}c' = \cos.\tfrac{1}{2}(a' + b')\,\sec.\,D.$$

Hinc quia arcus c' parum differt a c, formulae quae valorem $\sin.\frac{1}{2}c'$ exprimunt, adhiberi debent, si c minor sit $45°$ gradibus vel maior $135°$, contra vero formulae pro $\cos.\,c'$ in vsum vocandae sunt, quoties c continеatur inter $45°$ et $135°$.

§. 6. Quamuis Methodus allata non solum rigori Geometrico plane sit conformis, sed etiam non admodum operoso labore procedat; tamen quum differentia inter c et c', vt satis exigua considerari queat, operae praetium quoque erit mentionem fecisse praecipuarum Methodorum, quibus adhibitis, differentia inter c' et c saltem proxime determinari potest. Quod si igitur in nostra figura ex puncto b in arcum B C demittatur normalis $b\,e$, tumque iungatur b C in quem arcum productum demittatur normalis $c\,g$; erit arcus $C\,b = C\,B - B\,e$ proxime, et $c\,b = C\,b + C\,g$ satis prope, hinc $c\,b = C\,B - B\,e + C\,g$, vnde colligitur $CB - cb = Be + Cg$, est vero ex triangulo bBe, $B\,e = B\,b.\cos.\,ABC$ et ex triangulo Ccg, $Cg = Cc\cos.\,ACb$, siue pro ACb, adhibendo angulum ACB, $Cg = Cc\cos.\,ACB$. Hinc si pro $B\,b$, $C\,c$ adhibeantur eorum valores $a' - a$, $b' - b$, fiet

$$c - c' = (a - a')\cos.\,A\,B\,C + (b - b')\cos.\,A\,C\,B.$$

Vt autem huius formulae vsus adhiberi queat, primum anguli A B C, A C B ope laterum a, b, c inuestigandi sunt, quod ope sequentium formularum praestabitur

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}ABC^2 = \frac{\sin.(s-a)\sin.(s-c)}{\sin.s.\sin.(s-b)}\ \text{et}$$
$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}ACB^2 = \frac{\sin.(s-b)\sin.(s-c)}{\sin.s.\sin.(s-a)}.$$

§. 7.

§. 7. Quamuis haec formula pro $c-c'$, non rigorose vera sit, tamen sine sensibili errore adhiberi potest, imprimis quando arcus C B parum differt a 90° et arcus A C non admodum accedat ad 90°. Scilicet dum C B parum differt a quadrante circuli, arcus C b a C e sensibiliter non differet, deinde quo minor est A C, eo minor erit arcus C c ex refractione stellae oriundus, vnde omnino perinde erit, siue adhibeatur C c cos. A C b, vel C c cos. A C B. Quotiescunque igitur correctiones, quae pro formula supra allata locum haberent intra aliquot partes decimales scrupuli secundi contineantur, formula ista contenti esse poterimus; verum si correctiones vsque ad minutum secundum vel vltra increscant, certe illarum quoque ratio habenda erit, id quod sequenti ratione praestabitur. Si polo C interuallo C b describatur arcus circuli minoris $b\,f$, fiet C b = C f, ideoque C e = C $b - f\,e$. Est vero

Tab XIII. Fig. 8.

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2} f\,e = \frac{\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\, b\,e^2}{\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\,(C\,b + C\,e)},$$

et quum arcus $b\,e$, $f\,e$ sint arcus valde parui,

$$f\,e = \frac{b\,e\ \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\, b\,e}{\text{Tang. C}\, b},$$

vbi etiam pro C b adhiberi potest C B. Tum vero porro si λ exprimat sinum vnius secundi, pro

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\, b\,e = \tfrac{1}{2}\ \text{Tang.}\ b\,e = \tfrac{1}{2}\ \text{sin.}\ b\,e$$

adhiberi potest $\lambda .\, b\,e$, vnde fiet $f\,e = \frac{\lambda .\, b\,e^2}{2\ \text{tang. C B}}$; est vero ex triangulo b B e; $b\,e^2 = \text{B}\,b^2.\ \text{sin. B}^2$; hincque

$$f\,e = \tfrac{1}{2}\lambda\,(a - a')^2\ \text{sin. B}^2.\ \text{cot.}\ c.$$

Fiet igitur

$$C\,b = C\,B - B\,e + e\,f = C\,B - (a - a')\ \text{cos. B}$$
$$+ \tfrac{\lambda}{2}(a - a')^2\ \text{sin. B}^2\ \text{cot.}\ c.$$

Porro ob angulum

$$A\,C\,b = A\,C\,B - B\,C\,b, \text{ et fin. } B\,C\,b = \frac{\text{fin.}\, b\,e}{\text{fin.}\, b\,C},$$

colligitur fatis prope

$$B\,C\,b = \frac{b\,e}{\text{fin.}\, B\,C} = \frac{B\,b.\text{fin.}\, B}{\text{fin.}\, B\,C} = \frac{(a - a')\,\text{fin.}\, B}{\text{fin.}\, B\,C'},$$

tumque fiet $C\,g = (b' - b)\,\text{cof.}\, A\,C\,b$; deinde fi $C\,c$ non tam fit exiguus, vt arcus $b\,c$ ipfi $b\,g$ proxime aequalis haberi queat, fimilis correctiuncula heic adhibenda eft, ac fupra dum differentia ipforum $B\,C$, $b\,C$ quaerebatur. Caeterum quia ang. $A\,C\,b = A\,C\,B - B\,C\,b$, erit proxime:

$$\text{cof.}\, A\,C\,b = \text{cof.}\, A\,C\,B + \lambda.\, B\,C\,b.\,\text{fin.}\, A\,C\,B, \text{ hinc}$$

$$\text{cof.}\, A\,C\,b = \text{cof.}\, C + \lambda\,(a - a)\,\frac{\text{fin.}\, B\,\text{fin.}\, C}{\text{fin.}\, B\,C}, \text{ ideoque}$$

$$C\,g = C\,c\,\text{cof.}\, A\,C\,b = (b' - b)\,\text{cof.}\, C + \lambda\,(b' - b)\,(a - a')\,\frac{\text{fin.}\, B\,\text{fin.}\, C}{\text{fin.}\, c},$$

denique fiet

$$b\,c - b\,g = \lambda\,(b' - b)^2\,\text{fin.}\, C^2\,\text{cot.}\, c,$$

ideoque habebimus

$$C\,B - c\,b = C\,B - C\,e + C\,e - C\,b + C\,b - b\,g + b\,g$$
$$- c\,b = (a - a')\,\text{cof.}\, B - \tfrac{1}{2}\lambda\,(a - a')^2\,\text{fin.}\, B^2\,\text{cot.}\, c$$
$$+ \lambda\,(a - a')\,(b - b')\,\frac{\text{fin.}\, B\,\text{fin.}\, C}{\text{fin.}\, C} + (b - b')\,\text{cof.}\, C$$
$$- \tfrac{1}{2}\lambda\,(b - b')^2\,\text{fin.}\, C^2\,\text{cot.}\, c,$$

quae formula certe pro adeo exacta haberi poteft, vt omni in cafu, faltem nifi arcus $c = B\,C$ valde euadat paruus, adhiberi queat; fin vero fit $c = 90°$, exacte erit

$$C\,B - c\,b = (a - a')\,\text{cof.}\, B + (b - b')\,\text{cof.}\, C.$$

§. 8. Ex confideratione triangulorum $A\,C\,B$, $A\,c\,b$, deduximus

$$\text{cof.}\, c = \text{cof.}\, a\,\text{cof.}\, b + \text{fin.}\, a\,\text{fin.}\, b\,\text{cof.}\, \alpha \text{ et}$$
$$\text{cof.}\, c' = \text{cof.}\, a'\,\text{cof.}\, b' + \text{fin.}\, a'\,\text{fin.}\, b'\,\text{cof.}\, \alpha,$$

vnde colligitur

$$(\text{cof.}\, c - \text{cof.}\, a\,\text{cof.}\, b)\,\text{fin.}\, a'\,\text{fin.}\, b' = (\text{cof.}\, c' - \text{cof.}\, a'\,\text{cof.}\, b')\,\text{fin.}\, a\,\text{fin.}\, b.$$

Vt

Vt ex hac aequatione valor ipsius c' saltem proxime determinari queat, ponamus:

$$\sin. a' = \sin. a - \delta \cos. a;\ \cos. a' = \cos. a + \delta \sin. a;$$
$$\sin. b' = \sin. b + \varepsilon \cos. b;\ \cos. b' = \cos. b - \varepsilon \sin. b;$$

vbi $\delta = \lambda(a - a')$ et $\varepsilon = \lambda(b' - b)$, suppositis praeterea cosinibus arcuum $a - a'$, $b' - b$ vnitati aequalibus. His igitur valoribus substitutis, fiet

$$\cos. c(1 - \delta \cot. a + \varepsilon \cot. b) + \frac{\delta \cos. b}{\sin. a} - \frac{\varepsilon \cos. a}{\sin. b} = \cos. c'.$$

Tumque si pro $\cos. c' - \cos. c = 2 \sin. (\frac{c - c'}{2}) \sin. (\frac{c + c'}{2})$, adhibeatur $\lambda(c - c') \sin. c$, obtinebimus:

$$c - c' = (a - a')\left(\frac{\cos. b - \cos. c \cos. a}{\sin. c \sin. a}\right) + (b - b')\left(\frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. c \sin. b}\right),$$

iam vero est

$$\cos. B = \frac{\cos. b - \cos. c \cos. a}{\sin. c \sin. a} \text{ et } \cos. C = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. c \sin. b},$$

hinc erit $c - c' = (a - a') \cos. B + (b - b') \cos. C$, plane vt antea. Caeterum correctiones, quae producta $(a - a')^2$, $(b - b')^2$ et $(a - a')(b - b')$ inuoluunt, nunc quoque ratiocinio analytico erui possent, verum quum calculus hunc in finem instituendus, aliquanto prolixior euadat, eum heic missum faciamus.

§. 9. Regrediamur igitur ad formulam:

$$c - c' = (a - a')\left(\frac{\cos. b - \cos. c \cos. a}{\sin. c \sin. a}\right) - (b' - b)\left(\frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. c \sin. b}\right),$$

pro qua ponamus

$$a - a' + b' - b = \mu \text{ et } a - a' + b - b' = \nu,$$

eritque

$$c - c' = \tfrac{1}{2}\mu\left(\frac{\cos. b \sin. b - \cos. a \sin. a - \cos. c(\sin. b \cos. a - \sin. a \cos. b)}{\sin. a \sin. b \sin. c}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\nu\left(\frac{\cos. b \sin. b + \sin. a \cos. a - \cos. c(\sin. b \cos. a + \sin. a \cos. b)}{\sin. a \sin. b \sin. c}\right).$$

Quum nunc sit,

$$2 \sin. b \cos. b = \sin. 2b,\ 2 \sin. a \cos. a = \sin. 2a,$$
$$\sin. b \cos. a - \sin. a \cos. b = \sin. (b - a)$$
$$\sin. b \cos. a + \sin. a \cos. b = \sin. (b + a),\ \text{fiet}$$

 (c —

$$(c-c')\,\text{fin.}\,a\,\text{fin.}\,b\,\text{fin.}\,c = \tfrac{1}{4}\mu\,(\text{fin.}\,2\,b - \text{fin.}\,2\,a - 2\,\text{cof.}\,c\,\text{fin.}(b-a))$$
$$+\tfrac{1}{4}\nu\,(\text{fin.}\,2\,b + \text{fin.}\,2\,a - 2\,\text{cof.}\,c\,\text{fin.}(a+b)),$$

vnde ob

$$\text{fin.}\,2\,b - \text{fin.}\,2\,a = 2\,\text{cof.}\,(b+a)\,\text{fin.}\,(b-a) \text{ et}$$
$$\text{fin.}\,2\,b + \text{fin.}\,2\,a = 2\,\text{fin.}\,(b+a)\,\text{cof.}\,(b-a),$$

colligitur

$$(c-c')\,\text{fin.}\,a\,\text{fin.}\,b\,\text{fin.}\,c = \tfrac{1}{2}\mu\,\text{fin.}\,(b-a)\,(\text{cof.}\,(b+a) - \text{cof.}\,c)$$
$$+\tfrac{1}{2}\nu\,\text{fin.}\,(b+a)\,(\text{cof.}\,(b-a) - \text{cof.}\,c)$$
$$= \mu\,\text{fin.}\,(a-b)\,\text{fin.}\,s\,\text{fin.}\,(s-c)$$
$$+\nu\,\text{fin.}\,(a+b)\,\text{fin.}\,(s-a)\,\text{fin.}\,(s-b)$$

existente $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Haec igitur formula inferviet pro inueniendo valore ipfius $c - c'$, quoties correctiunculas ex $(a-a')^2$, $(b-b')^2$ et $(a-a')(b-b')$ oriundas negligere liceat.

§. 10. Ex aequatione fupra inuenta:

$$(\text{cof.}\,c - \text{cof.}\,a\,\text{cof.}\,b)\,\text{fin.}\,a'\,\text{fin.}\,b' = (\text{cof.}\,c' - \text{cof.}\,a'\,\text{cof.}\,b')\,\text{fin.}\,a\,\text{fin.}\,b,$$

habetur

$$(\text{cof.}\,c - \text{cof.}\,a\,\text{cof.}\,b)\,\frac{\text{fin.}\,a'\,\text{fin.}\,b'}{\text{fin.}\,a\,\text{fin.}\,b} = \text{cof.}\,c' - \text{cof.}\,a'\,\text{cof.}\,b',$$

inde vero colligitur

$$\text{cof.}\,c' - \text{cof.}\,(a'-b') = \text{cof.}\,c' - \text{cof.}\,a'\,\text{cof.}\,b' - \text{fin.}\,a'\,\text{fin.}\,b'$$
$$= (\text{cof.}\,c - \text{cof.}\,(a-b))\,\frac{\text{fin.}\,a'\,\text{fin.}\,b'}{\text{fin.}\,a\,\text{fin.}\,b},$$

hincque

$$\text{cof.}\,(a'-b') - \text{cof.}\,c' = 2\,\text{fin.}\,(s-a)\,\text{fin.}\,(s-b)\,\frac{\text{fin.}\,a'\,\text{fin.}\,b'}{\text{fin.}\,a\,\text{fin.}\,b},$$

fimili ratione inueniemus

$$\text{cof.}\,c' - \text{cof.}\,(a'+b') = (\text{cof.}\,c - \text{cof.}\,(a+b))\,\frac{\text{fin.}\,a'\,\text{fin.}\,b'}{\text{fin.}\,a\,\text{fin.}\,b} \text{ vel}$$
$$\text{cof.}\,c' - \text{cof.}\,(a'+b') = 2\,\text{fin.}\,s\,\text{fin.}\,(s-c)\,\frac{\text{fin.}\,a'\,\text{fin.}\,b'}{\text{fin.}\,a\,\text{fin.}\,b},$$

quae formulae iterum inferuire poterunt ad determinandum $\text{cof.}\,c'$. Prima harum formularum nimirum:

$$\text{cof.}\,(a'-b') - \text{cof.}\,c' = (\text{cof.}\,(a-b) - \text{cof.}\,c)\,\frac{\text{fin.}\,a'\,\text{fin.}\,b'}{\text{fin.}\,a\,\text{fin.}\,b},$$

vfus

vſus eſt Cl. *Dunthorn* in Ephemeridibus Aſtronomicis Londinenſibus *Nautical Almanac* pro Anno 1767, ad conficiendas Tabulas quae pro inueſtigando coſ. c' inſeruire debent. Verum tamen vſus huiusmodi Tabularum non admodum proficuus eſſe videtur, quia ſi pro arcu $a - a'$ rationem Parallaxeos Lunae habere velimus, ob variabilitatem huius Parallaxeos plures Tabulae confici deberent; ſin vero pro arcubus B b, C c (Fig. 7.) tantum ratio refractionis ſit habenda, ſi altitudines Lunae et Stellae capiantur ſaltem maiores quam 5°, vix tantis ambagibus opus eſſe videtur.

§. 11. Formula ſupra allata:

$$c - c' = (a - a')\left(\frac{\text{coſ.}\, b - \text{coſ.}\, c\, \text{coſ.}\, a}{\text{ſin.}\, c\, \text{ſin.}\, a}\right) - (b' - b)\left(\frac{\text{coſ.}\, a - \text{coſ.}\, b\, \text{coſ.}\, c}{\text{ſin.}\, c\, \text{ſin.}\, b}\right),$$

ſi pro arcu B b ratio Parallaxeos non habeatur, in ſequentem abit:

$$c' - c = (a' - a)\left(\frac{\text{coſ.}\, b - \text{coſ.}\, c\, \text{coſ.}\, a}{\text{ſin.}\, c\, \text{ſin.}\, a}\right) + (b' - b)\left(\frac{\text{coſ.}\, a - \text{coſ.}\, b\, \text{coſ.}\, c}{\text{ſin.}\, c\, \text{ſin.}\, b}\right) =$$

$$= \frac{1}{\text{ſin.}\, c}\left((a' - a)\frac{\text{coſ.}\, b}{\text{ſin.}\, a} + (b' - b)\frac{\text{coſ.}\, a}{\text{ſin.}\, b}\right)$$

$$- \text{cot.}\, c\left((a' - a)\,\text{cot.}\, a + (b' - b)\,\text{cot.}\, b\right)$$

hacque formula vſus eſt Cl. *D. Lyons* in Ephemeridibus iam citatis ad conficiendas Tabulas pro inueniendo arcu $c' - c$. Tum vero iſta formula aliquanto compendioſior redditur, ſi primum ſtatuatur vna vel altera altitudo maior quam 20°, pro hac enim altitudine erit refractio ipſi Tangenti diſtantiae a zenith proportionalis, ideoque ſi refractio quae pro diſtantia 45° a zenith locum obtinet, exprimatur per r, erit $b' - b = r$. Tang. b, hinc fiet:

$$c' - c = \frac{1}{\text{ſin.}\, c}\left((a' - a)\frac{\text{coſ.}\, b}{\text{ſin.}\, a} + (b' - b)\frac{\text{coſ.}\, a}{\text{ſin.}\, b}\right)$$

$$- \text{cot.}\, c\left((a' - a)\,\text{cot.}\, a + r\right),$$

tum vero ſi etiam altitudo Lunae $= 90° - a$ tanta ſit, vt ſupponere liceat $a' - a = r$ Tang. a, fiet:

$c' - c$

$$c' - c = \frac{r}{\text{ſin.}\, c}\left(\frac{\text{coſ.}\, b}{\text{coſ.}\, a} + \frac{\text{coſ.}\, a}{\text{coſ.}\, b}\right) - 2\, r \cot.\, c = 2\, r \frac{(1 - \text{coſ.}\, c)}{\text{ſin.}\, c} + \frac{r}{\text{ſin.}\, c} \frac{(\text{coſ.}\, b - \text{coſ.}\, a)^2}{\text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, b} = r \cot.\, \tfrac{1}{2} c + \frac{r}{\text{ſin.}\, c} \frac{(\text{coſ.}\, b - \text{coſ.}\, a)^2}{\text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, b}.$$

Verum de Tabulis, quae huiusmodi Formulae ſuperſtruuntur, tenendum eſt, quod non poſſint eſſe ſatis exactae, ſiquidem ipſa formula principalis quae fundamenti loco adhibita eſt, non niſi valorem approximatum ipſius $c' - c$ contineat. Et parum ſane huiusmodi Tabulis proficietur, ſi nouo et aeque fere operoſo labore correctio ex Parallaxi oriunda inueſtiganda ſit.

§. 12. Si in vſum vocetur formula:

$$(\text{coſ.}\, c - \text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, b) \frac{\text{ſin.}\, a'\, \text{ſin.}\, b}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b} = \text{coſ.}\, c' - \text{coſ.}\, a'\, \text{coſ.}\, b',$$

adhuc alia eius reductio ſatis elegans notari meretur. Ponamus primum per c' indigitari arcum b C, ita vt ſit $b' = b$, fietque

$$\text{coſ.}\, c . \frac{\text{ſin.}\, a'}{\text{ſin.}\, a} + \frac{\text{coſ.}\, b . \text{ſin.}\, (a' - a)}{\text{ſin.}\, a} = \text{coſ.}\, c',$$

tumque

$$\text{coſ.}\, c' - \text{coſ.}\, c = 2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}(c - c')\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}(c' + c) = \frac{\text{coſ.}\, b . \text{ſin.}\, (a' - a)}{\text{ſin.}\, a} - \frac{\text{coſ.}\, c\, (\text{ſin.}\, a - \text{ſin.}\, a')}{\text{ſin.}\, a}$$

$$= \frac{2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}(a' - a)}{\text{ſin.}\, a} \left(\text{coſ.}\, b\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}(a' - a) - \text{coſ.}\, c\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}(a' + a)\right),$$

vnde

$$c - c' = (a' - a) \frac{(\text{coſ.}\, b\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}(a' - a) - \text{coſ.}\, c\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}(a' + a))}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}(c' + c)},$$

in qua formula primum pro $\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}(c' + c)$ adhiberi poteſt $\text{ſin.}\, c$, tum vero inuento proxime $c - c'$, dabitur quoque $\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}(c' + c)$ ſatis exacte. Deinde ſimili formula ex datis arcubus a', b, b' et c' quaeritur $b\, c$, vbi iam arcus b C per c indigitari poteſt, erit enim

$$c' - c = (b' - b) \frac{(\text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}(b' - b) - \text{coſ.}\, c\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}(b' + b))}{\text{ſin.}\, b\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}(c' + c)}.$$

Verum

Verum vtcunque exactae hae formulae esse poterunt, pro illis tamen casibus, vbi correctiunculas secundae potestatis negligere non licet, multum praestabit formulas rigore Geometrico veras adhibuisse.

§. 13. Elegantissima sane est formula, qua Cel. *Maskelyne* effectum refractionis computare docuit, quamuis eadem quoque non nisi proxime veritati sit conformis. Designet iterum A B b circulum verticalem Lunae, in quo B sit locus centri Lunae apparens, et b locus ob refractionem correctus, tumque si A C c sit circulus verticalis per locum Stellae apparentem C et verum c transiens, erit effectus refractionis ad distantiam B C augendam

Tab XIII. Fig. 9.

$$= \mathrm{B}b \operatorname{cos}. \mathrm{ABC} + \mathrm{C}c \operatorname{cos}. \mathrm{ACB}.$$

Hinc si refractio pro distantia apparente a zenith exprimatur per r, tumque supponatur esse

$$\mathrm{B}b = r \operatorname{tang}. a, \text{ et } \mathrm{C}c = r \operatorname{tang}. b,$$

fiet correctio ex refractione oriunda

$$= r(\operatorname{tang}. a \operatorname{cos}. \mathrm{ABC} + \operatorname{tang}. b \operatorname{cos}. \mathrm{ACB}).$$

Quod si nunc ex A in basin B C demittatur normalis A L, erit

$$\operatorname{tang}. \mathrm{BL} = \operatorname{tang}. a \operatorname{cos}. \mathrm{ABC} \text{ et}$$

$$\operatorname{tang}. \mathrm{CL} = \operatorname{tang}. b \operatorname{cos}. \mathrm{ACB},$$

quare correctio quaesita fiet

$$= r(\operatorname{tang}. \mathrm{BL} + \operatorname{tang}. \mathrm{CL}).$$

Ponamus nunc arcum B C esse bisectum in M, et dicatur M L $= e$, hinc ob

$$\mathrm{BL} = \tfrac{1}{2}c + e \text{ et } \mathrm{CL} = \tfrac{1}{2}c - e,$$

fiet correctio ista

$$= r(\operatorname{tang}.(\tfrac{1}{2}c + e) + \operatorname{tang}.(\tfrac{1}{2}c - e)).$$

Tum vero ob

$$\operatorname{cos}. a : \operatorname{cos}. b = \operatorname{cos}. \tfrac{1}{2}(c + e) : \operatorname{cos}. \tfrac{1}{2}(c - e), \text{ fiet}$$

$$\operatorname{tang}. \tfrac{1}{2}(a - b) \operatorname{tang}. \tfrac{1}{2}(a + b) = \operatorname{tang}. \tfrac{1}{2}c \operatorname{tang}. e,$$

 vnde

vnde colligitur

$$\text{tang.}\, e = \text{tang.}\, \tfrac{1}{2}(a-b)\, \text{tang.}\, \tfrac{1}{2}(a+b)\, \text{cot.}\, \tfrac{1}{2} c.$$

Porro ob

$$\text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}c+e\right) = \frac{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c + \text{tang.}\, e}{1 - \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c\ \text{tang.}\, e} \text{ et}$$

$$\text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}c-e\right) = \frac{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c - \text{tang.}\, e}{1 + \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c\ \text{tang.}\, e}, \text{ fiet}$$

$$\text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}c+e\right) + \text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}c-e\right) = \frac{2\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c\,(1+\text{tang.}\, e^2)}{1 - \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c^2\ \text{tang.}\, e^2}$$

$$= \frac{2\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c\ \text{tang.}\, e}{1 - \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c^2\ \text{tang.}\, e^2} \cdot \frac{1+\text{tang.}\, e^2}{\text{tang.}\, e}.$$

Quodsi igitur ponatur esse $\text{tang.}\, f = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c\ \text{tang.}\, e$, fiet

$$\text{tang.}\, 2f = \frac{2\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c\ \text{tang.}\, e}{1 - \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c^2\ \text{tang.}\, e^2}, \text{ tumque erit}$$

$$\frac{1+\text{tang.}\, e^2}{2\,\text{tang.}\, e} = \frac{1}{\text{sin.}\, 2e},$$

quam ob rem demum fiet correctio quaesita $= 2r\,\frac{\text{tang.}\,2f}{\text{sin.}\,2e}$. Hinc ista deducitur regula, vt primum quaeratur $\text{tang.}\, f = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c\ \text{tang.}\, e = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(a-b)\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(a+b)$, tumque

$$\text{tang.}\, e = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(a-b)\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(a+b)\ \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}c,$$

eritque correctio ex refractione oriunda $= 2r\,\frac{\text{tang.}\,2f}{\text{sin.}\,2e}$. De hac formula vero obseruari meretur, quod pro exacta eo minus haberi queat, quia praeterquam quod ista expressio C c cos. A C B + B b cos. A B C non rigorose exprimat effectum refractionis, etiam heic supponitur

$$\text{B}\,b = r\,\text{tang.}\, a \text{ et } \text{C}\,c = r\,\text{tang.}\, b,$$

quod non valet nisi altitudines excedant 20°.

§. 14.

§. 14. Scilicet per obſeruationes compertum eſt, refractionem ſatis exacte eſſe proportionalem Tangenti diſtantiae apparentis a zenith, ipſa triplici refractione minutae; quod ſi igitur vti Celeb. *de la Lande* in ſua Aſtronomia §. 3984. iubet, loco arcuum a, et b adhibeantur hi arcus triplici refractione minuti, habebuntur quidem

$$Bb = r\ \text{tang.}\ a \quad \text{et} \quad Cc = r\ \text{tang.}\ b;$$

verum tum amplius non dici poteſt tang. a coſ. ABC eſſe aequalem tang. BL, nec tang AC coſ. ACB = tang. CL, nam tum ſane correcti iſti arcus a et b, non pertinent ad triangulum ABC, ideoque formulae de his arcubus non adhiberi debent, quae de arcubus AB, AC valent. Immo eo minus correctos iſtos arcus a, b ad hoc triangulum referre licet, quod minime diiudicari queat, an non errores ſatis ſenſibiles inde originem ducere poſſint.

§. 15. Inter formulas, quae valores approximatos pro $c - c'$ exhibent, noſtro quidem iudicio, illa quae §. 6. occurrit reliquis palmam praeripere videtur, ſaltem quando correctiones ex ſecundis poteſtatibus oriundas negligere licet. Primum enim ad inueniendos angulos ABC, ACB, computentur hae fractiones

$$\frac{\sin.(s-c)}{\sin.s} = A \quad \text{et} \quad \frac{\sin.(s-a)}{\sin.(s-b)} = B, \text{ eritque}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}ABC = \sqrt{AB} \quad \text{et} \quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}ACB = \sqrt{\tfrac{A}{B}},$$

deinde vero fiet

$$c - c' = (a - a')\,\text{coſ.}\,ABC + (b - b')\,\text{coſ.}\,ACB,$$

hincque totum negotium per octo Logarithmos abſoluetur. Vt autem de gradu praeciſionis, quem haec formula ſibi vindicat, facilius ſit iudicium, eius adplicationem ad aliquod exemplum faciamus. Ponamus igitur eſſe

$$a = 71^\circ.12'.33'', \quad b = 33^\circ.43'.10'' \quad \text{et} \quad c = 101^\circ.46'.43'',$$

 tumque

tumque

$$a - a' = 51'. 19'' \text{ et } b' - b = 34'';$$

hinc fiet per formulas §. 4. rigore Geometrico veras $c' = 100°. 57'. 58'', 8$. Nunc vero erit per formulas §. 6,

$$ABC = 16°. 24'. 54'' \text{ et } ACB = 28°. 59'. 36'',$$

hinc fiet

$$(a - a') \text{cof. } ABC = 2953'', 50 \text{ et}$$

$$(b' - b) \text{cof. } ACB = 29'', 73,$$

ideoque $c - c' = 2923'', 77$, quare colligitur $c' = 100°. 57'. 59'', 2$ qui valor tantum 4 decimis partibus fecundi a vero aberrat. Interim fi correctionum §. 7. allatarum vfum facere velimus, habebimus

$$-\tfrac{1}{2}\lambda(a - a')^2 \text{ fin. } B^2 \text{ cot. } C = +0'', 38,$$

tumque angulum $BCb = 14'. 49''$, hinc angulus

$ACb = 28°. 44' 47''$, vnde colligitur

$Cg = Cc \text{ cof. } ACb = 29'', 80$, ideoque

$c - c' = 2953'', 88 - 29, 80 = 2924''08,$

ideoque $c' = 100°. 57' 58'', 9$, vbi diffenfus nunc vna tantum parte decima fcrupuli fecundi abfoluitur.

§. 16. Ex iis quae in fuperioribus allata funt, perfpicuum redditur quod circa obferuationes diftantiarum Lunae a ftellis fixis, iftas vtile fit obferuaffe cautelas, vt primum huiusmodi diftantiae capiantur, quae proxime ad 90° accedant, faltem dum formulis vtimur, quae valores tantum approximatos diftantiae verae fuppeditant; deinde vt fi fieri poffit altitudo fiue ftellae feu Lunae, vel vtriusque non admodum fit exigua, ob refractiones prope horizontem aliquanto incertiores et nimium variabiles. Tum vero ante omnia illas ftellas hunc in finem adhibere conuenit, quae fignis zodiacalibus continentur, quo ipfo obtinetur vt variatio pro diftantia Lunae ab huiusmodi fixa certo temporis interuallo fatis euadat fenfibilis.

lis. Si enim per bina loca Lunae interuallo 12 horarum inter ſe diſtantia, deſcribatur circulus maximus, motus Lunae hoc temporis interuallo parum ab hoc circulo recedet, ideoque ſi concipiatur ſtella in polo huius circuli, eius diſtantia a Luna iſto temporis interuallo erit fere inuariabilis, vnde ex obſeruata hac diſtantia nihil de Longitudine locorum concludi poterit. Contra vero ſi locus ſtellae in ipſo hoc circulo maximo reperiatur, acceſſus Lunae ad ſtellam vel receſſus ab ea, erit citiſſimus, hincque eius comparatio cum Luna pro Longitudine certiſſimas dabit concluſiones.

§. 17. Dum diſtantia Lunae a ſtella ex obſeruationibus deducta, adhiberi debet ad Longitudinem loci determinandam, neceſſum eſt, vt pro Meridiano quodam cognito diſtantia Lunae a ſtella ad certa temporis momenta aſſignari queat, id quod facile praeſtabitur modo tam Longitudines quam Latitudines ſtellae et Lunae pro his temporibus innoteſcant. Repraeſentet circulus $N\,l\,s$ Eclipticam ſitque locus Lunae in L, ſtellae in S et polus Eclipticae P, vnde ductis quadrantibus circuli maximi PLl, PSs, dabitur differentia Longitudinum ſtellae et Lunae, ſeu arcus $l\,s$ quem littera λ exprimamus, praeterea etiam cognita erunt complementa Latitudinum, ſeu arcus PL, PS quos litteris L, l indigitemus, hinc itaque fiet

Tab. XIII. Fig. 10.

$$\cos. LS = \cos. L \cos. l + \sin. L \sin. l \cos. \lambda \quad \text{tumque}$$

$$1 - \cos. LS = 2 \sin. \tfrac{1}{2} LS^2 = 1 - \cos. L \cos. l - \sin. L \cos. l$$
$$+ \sin. L \sin. l (1 - \cos. \lambda) = 1 - \cos. (L - l) + 2 \sin. L \sin. l \cos. \tfrac{1}{2}\lambda^2$$
$$= 2 \sin. \tfrac{1}{2}(L - l)^2 + 2 \sin. L \sin l \sin. \tfrac{1}{2}\lambda^2, \quad \text{ideoque}$$
$$\sin. \tfrac{1}{2} LS^2 = \sin. \tfrac{1}{2}(L - l)^2 + \sin. L \sin. l \sin. \tfrac{1}{2}\lambda^2$$

ſimili modo prodibit

$$\sin. \tfrac{1}{2} LS^2 = \sin. \tfrac{1}{2}(L + l)^2 - \sin. L \sin. l \cos. \tfrac{1}{2}\lambda^2, \quad \text{tumque}$$
$$\cos. \tfrac{1}{2} LS^2 = \cos. \tfrac{1}{2}(L - l)^2 - \sin. L \sin. l \sin. \tfrac{1}{2}\lambda^2 \quad \text{et}$$
$$\cos. \tfrac{1}{2} LS^2 = \cos. \tfrac{1}{2}(L + l)^2 + \sin. L \sin. l \cos. \tfrac{1}{2}\lambda^2,$$

 ex

ex quibus modo consimili illi, quem in §. 4. adhibuimus, determinatur siue cos. $\frac{1}{2}$L S, siue sin. $\frac{1}{2}$ L S. Quum vero pro nostro casu arcus L et l proxime ad 90° accedant, sequenti approximatione arcus L S inuestigari quoque poterit. Si arcus L S exprimatur per μ habemus:

$$\cos.\mu = \cos.L\cos.l + \sin.L\sin.l\cos.\lambda = \cos.L\cos.l(1-\cos.\lambda)$$
$$+\cos.\lambda(\cos.L\cos.l+\sin.L\sin.l) = 2\cos.L\cos.l\sin.\tfrac{1}{2}\lambda^2 + \cos.\lambda\cos.(L-l).$$

Hinc si fuerit

$$\cos.\mu' = \cos.\lambda\cos.(L-l),\ \text{obtinebimus}$$
$$\cos.\mu - \cos.\mu' = 2\cos.L\cos.l\sin.\tfrac{1}{2}\lambda^2,\ \text{ideoque}$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}(\mu'-\mu)\sin.\tfrac{1}{2}(\mu'+\mu) = \cos.L\cos.l\sin.\tfrac{1}{2}\lambda^2,$$

et quum μ' parum differat a μ,

$$\sin.\tfrac{1}{2}(\mu'-\mu) = \frac{\cos.L\cos.l\sin.\tfrac{1}{2}\lambda^2}{\sin.\mu'},$$

ex quo dabitur $\mu' - \mu$ et ob μ' cognitum per formulam $\cos.\mu' = \cos.\lambda\cos.(L-l)$, innotescet quoque μ. Verum tamen re rite perpensa facile perspicitur hoc compendium vix vllius esse momenti, et formulis rigore Geometrico veris rem aeque expedite absolui.

DETER-

DETERMINATIO
LONGITVDINIS ET LATITVDINIS QVORVNDAM IMPERII RVSSIAE LOCORVM, DEDVCTA EX OBSERVATIONIBVS A *IOHANNE ISLENIEFF* INSTITVTIS.

Auctore

STEPHANO RUMOVSKI.

Obferuationes, ex quibus pofitionem quorundam Imperii Ruffici locorum Academiae Scientiarum nunc fifto, inftitutae funt Anno 1773 a Viro Cl. *Iohanne Islenieff* cum Moldauia rediret Petropolin. Non eft igitur, quod moneam de inftrumentis ab illo adhibilis; nam iisdem hic, quibus alias, vfus eft inftrumentis, et hac de re confuli poffunt Nov. Comm. Tom. XIV.

De Latitudine Kiouiae.

Sub difceffum tandem Kiouia Cl. obferuator quadrantis fui verificationem ad horizontem inftituit, erroremque ab altitudinibus obferuatis fubtrahendum eundem quam alias reperit, nempe $5'. 42''$.

Die $\frac{8}{19}$ Maii ducta eft in obferuatorio linea meridiana, ad quam fequentibus planum quadrantis methodo ab Aftronomis vfitata applicuit, quotiescunque altitudinibus meridianis Solis fiue ftellarum fixarum capiendis Cl. obferua-

ſeruator incubuit, cum ante hac maximas tantum obſeruauerit altitudines. Longitudinem Kiouiae a meridiano Pariſino computatam, quoties occaſio poſtulabat, ſuppoſui $1^h. 54\frac{1}{2}'$.

Altitudines Solis meridianae.

Dies obſerv.	Alt. limb. ☉ ſuper. corr.	Refr.- parall.	½ Diam. ☉lis.	Declinat. ☉ Bor.	Latitudo.
11/22 Mart.	40°.41′.11″	1′. 0″	16′. 3″	0°.50′.22″	50°.26′.14″
29 -	47. 36. 12	47	15. 58	7. 45. 53	50. 26. 26
2/13 Apr.	49. 4. 4	44	15. 57	9. 13. 40	50. 26. 17
3 -	49. 25. 40	43	- -	9. 35. 14	50. 26. 14
15/26 Maii	61. 2. 54	27	15. 48	21. 12. 53	50. 26. 14
18 -	61. 32. 3	27	15. 47	21. 41. 57	50. 26. 8
21. Maii 1. Iun.	61. 57. 45	26	- -	22. 7. 41	50. 26. 9
25 -	62. 26. 42	-	- -	22. 36. 31	50. 26. 12
26 -	62. 32. 49	-	- -	22. 42. 48	50. 26. 12
27 -	62. 38. 38	25	- -	22. 48. 38	50. 26. 11
28 -	62. 44. 27	-	- -	22. 54. 5	50. 25. 50
2/13 Iun.	63. 5. 25	-	15. 46	23. 15. 15	50. 26. 1

Medium 50. 26. 19.

Alti-

Altitudines Meridianae Stellarum fixarum.

Dies obſerv.	Nomina ſtellar.	Altit·merid. correct.	Refr. Bradl	Decl. med. ad diem obſ.	Aberr.	Nut.	Latitudo.
$\frac{18}{29}$ Apr.	α Virginis.	29°.36′.20″	1′. 39″	9°.58′.15″	+ 6	− 1″	50°.26′.57″
	η Bootis.	59. 6. 55	34	19. 32. 46	− 4	+ 4	50. 26. 25
	Arcturus.	59. 56. 36	33	20. 22. 9	− 4	+ 3	50. 26. 5
$\frac{1}{12}$ Maii	α Virginis.	29. 36. 20	1. 39	9. 58. 15	+ 7	− 2	50. 26. 59
	η Bootis.	59. 6. 45	34	19. 32. 45	− 2	+ 3	50. 26. 35
	Arcturus.	59. 56. 32	33	20. 22. 9	− 2	+ 3	50. 26. 11
	γ Bootis.	78. 52. 45	12	39. 18. 29	0	+ 4	50. 26. 0
25. Maii 5. Iun.	η Urſ. maior.	90. 1. 11		50. 27. 4	+ 10	− 3	50. 26. 6
	Arcturus.	59. 56. 43	33	20. 22. 7	+ 3	+ 3	50. 26. 3
$\frac{2}{13}$ Iun.	η Urſ. maior.	90. 1. 19		50. 27. 4	+ 13	+ 3	50. 26. 1
	Arcturus.	59. 56. 35	33	20. 22. 4	+ 4	+ 3	50. 26. 11
						Medium	50. 26. 19.

Quodſi determinationes ab α Virginis petitas ſeponere velimus, quoniam iuſto plus ab aliis diſſentiunt, prodit Latitudo media reliquarum 50°. 26′. 11″, et parum a veritate aberraturum me confido, ſi Latitudinem Kiouiae 50°. 26′. 10″. ſuppoſuero.

Obſeruationes pro Longitudine Kiouiae inſtitutae.

I. Die $\frac{2}{13}$ Maii Merid. ver. ex alt. ☉lis correſp. 10ʰ.49′.54″.5.
—— Luna limbo lucido tegit ϱ ♒ 14. 39. 33. t. h.
Die $\frac{4}{15}$ Maii Merid. ver. ex alt. ☉lis correſp. 10. 48. 21. 5.
Vnde occultatio ϱ ♒ a Luna 15. 50. 10. t. v.

II. Die $\frac{28}{3}$ Maii/Iun. merid. ver. ex altit. ☉lis corresp. $10^h.35'.41''$.
Eodem die plano Quadrantis ad lineam meridianam dispofito et limbo ☽ Boreali filum horozontale percurrente appulsus θ ♎ ad fil. vert. Quadrantis - - $9^h.27'.36''$. t. h.
Limbi ☽ praecedentis ad idem filum 9. 28. $44\frac{1}{2}$.
Altitudo limbi ☽ Borealis momento appulf. ad fil. vert. errore Quadrantis correcta - - - $23°. 5'. 4''\frac{1}{2}$.
Die $\frac{24}{4}$ Maii/Iun. merid. verus ex altit. ☉lis corr. $10^h.35'. 4'',6$
Vnde retardatio horologii a tempore Solari medio est $46''$, 7 et momenta appulsuum in tempore vero erunt:
Appulsus θ ♎ ad fil. vert. Quadrantis $10^h.52'.11''$.
- - - Limbi ☽ praeced. ad idem filum 10. 53. $19\frac{1}{2}$.

III. Die $\frac{17}{28}$ Iunii Imm. II. Sat. Iouis 15. 5. 39. t. v.
Obferuatio bona.

IV. Die $\frac{19}{30}$ Iunii Imm. I. Sat. Iouis 13. 17. 17. t. v.
Obfernatio intra hiatus nubium inftituta, id circo fub dubia.

Inquifitio in Longitudinem Kiouiae.

Immerfioni II. Satellitis Iouis die 17 Iunii obfervatae correfpondentem non reperio; collata vero illa cum momento e Tabulis de promto Longitudinem Kiouiae a meridiano Parifino praebet $1^h. 53'. 27''$. Immerfio I. Satellitis Iouis die $\frac{19}{30}$ Iulii obferuata eft fimili tubo in vrbe Dmitrewsk $14^h. 14'. 21''$; vnde pofita Longitudine Dmitrewsk a meridiano Parifino $2^h. 52'. 16''$. prodit Longitudo Kiouiae ab eodem meridiano computata $1^h. 55'. 8''$.

Cognita iam proxime Longitudine Kiouiae calculum inii, quanta illa refultet ex occultatione ξ ♒ a Luna.

In

In Catalogo ſtellarum Maieri ad annum 1756 ſtatuitur Aſcenſio ϱ ♒ 331°. 50'. 15''. Declinatio 9°. 2'. 6'' Auſtr. Poſita obliquitate Eclipticae 23°. 28'. 16'' ad idem tempus inueni Longitudinem ſtellae 330°. 37'. 30'' et Latitudinem 2°. 23'. 0''. Bor. Vnde Longitudo ſtellae ad annum 1773 diem 13 Maii prodit 380°. 52'. 3'',4 + 3'',4 Nut. — 2''.9 Aberr. = 330°.52'.3'',7 Latitudine manente eadem 2°.23'.0''.

Momentum Immerſionis ϱ ♒ 15^h. 50'. 10'' per aequationem temporis — 4'. 2'' in medium conuerſum fit 15^h. 46'. 8''; poſita iam Longitudine Kioviae a meridiano Grenovicenſi computata 2^h. 2'. 25'' ex nouiſſimis Tabulis Lunaribus Maieri Londini editis ſequentia elementa obtinui.

Tempus medium Grenouicenſe	13^h.43'.43''
Longitudo ☉lis media	1^s.22°. 5'.42''
Longitudo ☉lis vera	1. 23. 28. 55,8
Obliquitas Eclipticae	23. 27. 58
Longitudo ☽ vera	11. 0. 29. 33,6
Latitudo ☽ Bor.	3. 17. 7,6
Parallaxis ☽ aequatorea Π	56. 8
Diameter ☽ horiz. D.	30. 35,5
Motus horarius in Longit.	31. 30
- - - - - in Latitud.	— 1. 14,7.

In computandis parallaxibus Lunae in Longitudinem et Latitudinem ſecutus ſum methodum Celeber. *Lexell* in Nov. Comment. Tom. XV. expoſitam. Poſita ratione diametri aequatoris ad axem telluris 201 : 200 reperi diſtantiam zenith apparentis a vero 16'. 52'';

$$l\,\varepsilon = 9.9987169 \text{ et } l\,\varepsilon\,\Pi = 3.5260890.$$

 Vt

Vt calculus parallaxium commodius expediri queat, conueniens eſt formare figuram ad ſtatum coeli momento obſeruationis accommodatam. Repraeſentet igitur P M meridianum Kioviae, Q M ♈ aequatorem, prodibit punctum aequatoris M in meridiano Kioviensi 288°. 37′. 27″, in meridiano ex polo P abciſſo arcu P z = 39°. 50′. 42″ punctuctum z erit zenith verum. Per polum P et polum eclipticae Π ducatur circulus P Π ♑, erit is colurus ſolſticiorum, id circo ♈ Q = 90° et M Q ſeu menſura angulu Π P z = 18°. 37′. 27″. Ex polo eclipticae Π et zenith vero z per locum Lunae L eductis circulis Π L *l* et z L λ, erit L λ parallaxis Altitudinis; L *l* parallaxis Latitudinis et λ *l* parallaxis Longitudinis; formulae vero a Celeber. *Lexell* traditae ſunt

Tab. XIV. Fig. 1.

Diam. app. $= \frac{D}{1 - \varepsilon\,\Pi\, cof.\, L z}$. parall. Long. $= \frac{\varepsilon\,\Pi\, fin.\, z K}{cof.\, P' L\, (1 - \varepsilon\,\Pi\, cof.\, L z)}$,

parall. Latitud. $= \frac{\varepsilon\,\Pi\, tang.\, L K\, cof.\, L z}{1 - \varepsilon\,\Pi\, cof.\, L z}$.

Vnde facta reſolutione triangulorum P Π z et z Π L reperi

Parall. in Longit.	+ 6′.37″,4	in Latit.	− 52′.12″
Longit. ☽ apparent.	330°.36. 11	Latit. app.	2°.24. 55,6
Longit. ſtellae eſt	330. 52. 3,7	Lat. ſtell.	2. 23. 0
Different. Longit.	15. 52,8	Latit.	1. 55,6
Diff. Long. × coſ. Lat. app.	15. 51,9.		

Vnde diſtantia ſtellae a centro Lunae 15′. 58″,8 maior ſemidiametro Lunae apparente 15′. 22″,7; ex quo apparet Immerſionem ſtellae non dum eueniſſe, dum Grenovici 13ʰ. 43′. 43″ numerarentur.

Poſita igitur differentia meridianorum 2ʰ. 0′. 25″ tempus medium obſeruationis ad meridianum Grenovicenſem reductum ſit 13ʰ. 45′. 43″, pro quo ope motuum horariorum reperitur

Longit.

Longit. ☽ vera	330°.30′.36″,6	Latit. ☽	3°.17′. 5″,2
Parall. in Longit.	+ 6.38,0	in Latit.	— 52 13,4
Longit. ☽ appar.	330. 37. 14,6	Latit. app.	2. 24. 51,8
Longitudo ſtellae	330. 52. 3,7	Latit. ſtell.	2. 23. 0
Differ. Longit.	14. 49,1	Latit.	1. 51,8
Diff. Long. × coſ. Lat. app.	14. 48,3.		

Vnde diſtantia ſtellae a centro ☽ 14′. 55″,3 et Longitudo Kioviae a meridiano Grenovicenſi computata reperitur $2^h. 1'. 17''$, a meridiano vero Pariſino $1^h. 52'. 1''$.

In tanta diſcrepantia determinationum, in Geographia etiam minime toleranda, medium arithmeticum inter illas ſumere non licet. Maiorem equidem fiduciam meretur determinatio ab obſeruatione I. Satellitis petita, quippe quae innititur directae comparationi inter obſeruationes Kioviae et in Dmitrewsk inſtitutas; verum cum Kiovienſis ſit ſub dubia, determinatio inde reſultans aliis non foret praeferenda, niſi illam confirmaret comparatio Lunae cum θ ♎ die 23 Maii inſtituta. Commode hic euenit, quod eodem die a Celeber. Aſtronomo Regio *Maskelyne* Luna cum diuerſis ſtellis fixis in meridiano Grenovicenſi fuerit comparata, ita vt diſſenſum a coelo Tabularum Lunarium in Aſcenſionem ſaltem rectam eruere ſit in poteſtate. En excerptum ex obſeruationibus Celeberr. *Maskelyne*

Die 21 Maii / 1 Iunii	appulſ. Centri ☉ ad fil merid.	$4^h.35'.22'',6$ t. h.
23 Maii / 3 Iunii	appulſ. - - ☉ - - - - -	4. 43. 33, 4
- - -	appulſ. α Serpentis ad fil. merid.	15. 30. 4, 1
- - -	Limbi ☽ praeced. ad fil. merid.	15. 44. 44, 8
Die 26 Maii / 6 Iunii	appulſ. Centr. ☉ ad fil. merid.	4. 55. 51, 2.

Ex his praececentibusque obſeruationibus patet motum horologii conformem fuiſſe motui ſtellarum fixarum,

 ſc. re-

ſc. retardaſſe illud intra diem Solarem medium $3'.56''$ neglectis partibus decimis ſecundis; hinc differentia Aſcenſionum rectarum ſtellam inter limbumque Lunae praecedentem reperitur $3^\circ. 40'. 10'',5$, et tempus verum appulſus limbi Lunae praecedentis ad filum meridiani $10^h. 59'. 23''$.

Aſcenſio recta media α Serpentis ad initium anni 1750 eſt $7^s. 22^\circ. 59'. 41'',4$ et ad tempus obſeruationis $7^s. 23^\circ. 16'. 55''$. Vnde ob Nut. $+ 3'',8$. Aberr. $+ 14'',2$ habebitur apparens $7^s. 23^\circ. 17'. 13''$. et Aſcenſio recta limbi Lunae praecedentis $7^s. 26^\circ. 57'. 23'',5$.

Ex Tabulis Lunaribus ad $10^h. 59'. 23''$ t. v. ſiue $10^h. 57'. 8''$ t. m. reperitur

Longitudo Lunae vera	$7^s.28^\circ.35'.40'',7$
Latitudo Lunae Bor.	3. 53. 23, 7
Parallaxis aequatorea	61. 12, 1
Diameter horizontalis	33. 21, 2
Poſita iam obliquitate Eclipticae	23. 27. 58
Aſcenſio recta Lunae	7. 27. 14. 43
Declinatio Lunae Auſtr.	16. 4. 22.

Diameter Lunae horizontalis diuiſus per coſinum Declinationis Lunae dat diametrum in Aſcenſionem rectam $34'.42''6$. Hinc Aſcenſio recta limbi Lunae occidentalis prodit $7^s.26^\circ. 57'. 21'',7$, et cum per obſeruationem illa reperta fuerit $7^s. 26^\circ. 57'. 23'',5$ patet tabulas Lunares Maieri a coelo in Aſcenſionem rectam aberrare non niſi $1'',8$ in defectu.

Perſpecto iam conſenſu Tabularum Lunarium in Aſcenſionem rectam cum coelo, accinxi memet ad computum obſeruationis die 23 Maii inſtitutae.

Ex

Ex Catalogo ſtellarum fixarum Tomo VI. Ephemeridum Pariſinarum praefixo Aſcenſio recta media θ ♎ ad annum 1750 eſt $7^s. 25^\circ. 7'. 12'', 1.$ variatione annua exiſtente $+ 50'', 9$: vnde Aſcenſio recta ad annum 1773. diem 23. Maii prodit $7^s. 25^\circ. 14'. 20'', 8$ et ob Nut. $+ 0, 8$. Aberrat. $+ 19'', 5$ Aſcenſio recta ſtellae apparens $7^s. 25^\circ. 14'. 41'', 1.$

Differentia aſcenſionum rectarum ſtellae et limbi Lunae occidentalis $1'. 8'', 5$ in gradus conuerſa prodit $17'. 11''$. Momentum appulſus ſtellae ad filum verticale Quadrantis meridiano proximum $10^h. 52'. 11''$. per aequationem temporis $- 2'. 15'', 5$ in medium conuerſum ſit $10^h. 49'. 55\frac{1}{2}''$. Poſita igitur differentia meridianorum Kiouiam et Grenovicum inter $2^h. 2'. 55\frac{1}{2}''$, ex iisdem Tabulis ad tempus medium Grenouicenſe $8^h. 47'. 0''$ ſequentia Elementa reperiuntur.

Longitudo ☉lis vera - - -	$2^s. 13^\circ. 26'. 10''$.
Longitudo ☽. vera - - -	7. 27. 13. 36, 6.
Latitudo ☽ Bor. - - -	3. 48. 45, 3.
Parallaxis aequatorea - -	61. 12. 2.
Diameter ☽ horizont. - -	30. 21, 2.
Hinc Aſcenſio ☽ recta - -	7. 25. 50. 35.
Declinatio ☽ Auſtr. - -	3. 48. 45, 3.

Diameter ☽ horizont. diuiſus per coſinum Declinationis Lunae dat diametrum in Aſcenſionem rectam $34'. 40'', 3$. Vnde aſcenſio recta limbi Lunae occidentalis correcta habetur $7^s. 25^\circ. 33'. 16'', 2$ et cum Aſcenſio ſtellae ſit $7^s. 25^\circ. 14'. 41'', 1.$ Differentia aſcenſionum ſtellae et limbi Lunae occidentalis prodit $18'. 35'', 1.$ maior quam eſt per obſeruationem inuenta.

Finxi

Finxi igitur differentiam meridianorum quaesitam $2^h. 6'. 55'', 5$ ac denuo ad tempus medium Grenouicense $8^h. 43'. 0''$. inuestigaui

Longitudinem Lunae veram	-	$7^s. 27°. 11'. 6'', 8$
Latitudinem Lunae -	-	3. 48. 34, 2
Ascensionem Lunae rectam	-	7. 25. 48. 2.
Declinationem -	-	15. 50. 30.

Vnde Ascensio recta limbi Lunae occidentalis correcta habetur $7^s. 25°. 30'. 43'', 2$ et differentia Ascensionum stellam inter et eundem limbum Lunae $16'. 2'', 1$. minor differentia Ascensionum obseruata $17'. 11''$. Quam obrem differentia meridianorum Grenovicensis et Kioviensis reperitur $2^h. 5'. 6\frac{1}{2}''$ et Longitudo Kioviae a meridiano Parisino computata $1^h. 55'. 50\frac{1}{2}''$.

Cum determinatio ista innitatur numeris Tabularum correctis, interuallum etenim binarum horarum, quo distant inter se obseruationes Kioviensis et Grenovicensis, notabile discrimen in Tabulis producere non valet, neque enormiter discrepet ab illa, quam praebet obseruatio I. satellitis Iouis, facile concludere est Longitudinem Kioviae non minorem $1^h. 55'. 8''$, nec maiorem $1^h. 55'. 56\frac{1}{2}''$. statui debere, donec obseruationes imposterum instituendae aliud suadere videantur.

Die $\frac{6}{17}$ Maii Declinatio acus magneticae 8 pollices longae obseruata est $9°. 15'$ versus occidentem.

Latitudo Dobriankae.

Per paucos dies commoratus est hic loci Cl. Obseruator et sequentes nactus est maximarum Altitudinum Solis et stellarum fixarum obseruationes.

Die

Die $\frac{7}{18}$ Iulii obſeruata eſt altitudo maxima limbi ☉lis ſuperioris 49°. 17′. 5″. Vnde adhibito errore quadrantis — 5′. 42″, Refr. — parall. 42″ et ½ Diam. ☉lis 15′. 46″ prodit altitudo centri Solis 58°. 55′. 5″. Statuta iam Longitudine huius loci a meridiano Pariſino 1^h. 54′. quam proxime, Declinatio ☉lis tempori obſeruationis competens reperitur 20°. 58′. 52″, ac Latitudo Dobriankae 52°. 3′. 57″.

Die $\frac{8}{19}$ Iulii maxima altitudo limbi ☉lis ſuperioris obſeruata eſt 59°. 6′. 3″. adhibitis iam iisdem reductionibus et Declinatione ☉lis 20°. 48′. 1″. prodit Latitudo quaeſita 52°. 4′. 8″.

Eodem die obſeruata eſt maxima altitudo α Lyrae 76°. 57′. 15″, quae errore quadrantis — 5′. 42″, Refractione — 13″. 5, correcta fit 76°. 31′. 19‴; vnde ob Declinationem ſtellae apparentem, tempori obſeruationis competentem 38°. 35′. 15½″ prodit Latitudo Dobriankae 52°.3′. 56″.

Eodem die maxima altitudo α Aquilae obſeruata eſt 46°. 19′. 39″. quae errore quadrantis – 5′. 42″ et refractione – 54″ correcta ob declinationem ſtellae apparentem 8°. 17′. 9″. dat Latitudinem loci 52°. 3′. 52″.

Die $\frac{9}{20}$ Iulii maxima altitudo limbi ☉lis ſuperioris per obſeruationem inuenta eſt 58°. 54′. 48″; hinc applicatis vt ſupra reductionibus et Declinatione Solis 20°. 36′. 48″ Latitudo Dobriankae reperitur 52°. 3′. 48½″.

Quamobrem ſumto medio Latitudo Dobriankae ſtatui poterit 52°. 3′. 56″ ſiue rotunde 52°. 4′.

Latitudo vrbis Rogatſchew.

Vna tantum capta eſt hic altitudo maxima limbi ☉lis Borealis die $\frac{21\ \text{Iulii}}{1\ \text{Aug.}}$ 55°. 14′. 43″, quae errore quadrantis — 5′. 42″, Refr. — parall. 35″ correcta ob ½ diam. ☉lis 15′. 48″ dat altitudinem centri ☉lis 54°. 52′. 38″. Vnde ob Declinationem ☉lis 17°. 56′. 25″ fit Latitudo Rogatſchew 53°. 3′. 47″.

Poſitio Mohileuiae Geographica.

Diutius hic pro nobilitate loci commoratus eſt Cl. Obſeruator, et pro Longitudine aeque ac pro Latitudine ſtabilienda ſufficientem numerum obſeruationum inſtituit: De Latitudine Mohileuiae primum acturus in anteceſſum moneo Longitudinem huius loci ſuppoſuiſſe me 1^h. $52\frac{1}{2}''$ a meridiano Pariſino.

Latitudo Mohileuiae.

Monente eodem ſtatu quadrantis altitudo meridiana limbi ☉lis ſuperioris die $\frac{30\ \text{Iulii}}{10\ \text{Aug.}}$ obſeruata eſt 51°. 55′. 30″. quae errore quadrantis — 5′. 42″, Refr. — parall. 39″ correcta ob ſemidiametrum ☉lis 15′. 49″ dat altitudinem centri ☉lis 51°. 33′. 20″, et ob Declinationem ☉lis 15°. 27′. 59″ prodit Latitudo Mohileuiae 53°. 54′. 39″.

Die $\frac{1}{12}$ Aug. capta eſt eiusdem limbi altitudo 51°. 19′. 53″. adhibitis igitur ſimilibus correctionibus ob Declinationem ☉lis 14°. 52′. 19″ reperitur Latitudo quaeſita 53°. 54′. 36″.

Die $\frac{3}{14}$ Aug. altitudo meridiana eiusdem limbi ☉lis obſeruata eſt 50°. 43′. 8″. Hinc ob errorem quadrantis — 5′. 42″; Refr. — parall. 41″; ½ diam. ☉lis 15′. 48″,5 et Declinationem 14°. 15′. 23″ fit Latitudo Mohileuiae 53°. 54′. 27″.

Obſer-

Obſeruationi huic Cl. Obſeruator perſicientiae intentus vidit fila, quae in tubo ad angulum rectum ſeſe hucusque decuſſabant, fuiſſe relaxata; id circo demto orbiculo, cui erant annexa, noua eidem applicuit, atque vt certus de ſitu eorum euaderet, die 7. Aug. peracta verificatione quadrantis ad horizontem errorem eius ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendum reperit 4′. 52″. Ex obſeruationibus autem in Iakutsk et Kamenogorsk inſtitutis patuit arcum quadrantis iuſtae eſſe magnitudinis; quare ab altitudinibus poſt diem 3. Aug. captis ſubtracta ſunt 4′. 52″.

Altitudines Solis meridianae.

Dies.	Alt. limb. ☉ ſuper. corr.	Refr. Bradl. — parall.	½ Diam. ☉lis.	Declin. ☉lis Bor.	Latitudo.
5/16 Aug.	49°. 59′. 56″	— 42.	15′. 50″	13°. 37′. 42″	53°. 54′. 18″
6 --	49. 40. 29	43.	- -	13. 18. 28	53. 54. 32
7 --	49. 21. 15	43.	- -	12. 59. 3	53. 54. 21
8/19 Aug.	49. 1. 52	44.	15. 50	12. 39. 27	53. 54. 9

Medium 53. 54. 20.

Altitudines Meridianae Stellarum fixarum.

Dies.	Nomina ſtellarum.	Alt. merid. correct.	Refr.	Decl. med. ad diem obſerv.	Aberr.	Nut.	Latitudo.
4/15 Aug.	α Lyrae	74°. 41′. 9″	15½″	38°. 35′. 0″ B	+ 13″	+ 9″	53°. 54′. 29″
	α Aquilae	44. 23. 51	58	9. 17. 2	+ 7	+ 8	53. 54. 25
7/18 Aug.	α Lyrae	74. 41. 37	- -	- - -	+ 13	+ 9	53. 54. 1
	α Aquilae	44. 24. 1	- -	- - -	+ 7	+ 8	53. 54. 16
8/19 Aug.	α Lyrae	74. 41. 37	- -	- - -	-	-	53. 54. 1
	α Aquilae	44. 24. 9	- -	- - -	-	-	53. 54. 7
	α Sagittae	53. 37. 13	42	17. 30. 28	+ 8	+ 8	53. 54. 14
	α Capric.	22. 53. 57	2′. 14	13. 13. 57 A	— 4	— 8	53 54. 32
	α Cigni	80. 35. 8	9	44. 28. 49	+ 8	+ 7	53. 54. 6

Medium 53. 54. 15.

 Sum-

Sumta omnium determinationum media habebimus Latitudinem Mohileuiae 53°. 54′. 20″.

Longitudo Mohileuiae.

Inter obſeruationes Longitudinem ſpectantes occurrit primum obſeruatio occultationis ſtellae Aldebaran a Lune; verum tantisper ea ſepoſita recenſebo in anteceſſum obſeruationes Satellitum Iouis.

Die $\frac{4}{15}$	Aug.	Imm.	I. Satell. ♃	-	$13^h.33'.6''$.	t. v. bona.
— $\frac{6}{17}$	—	Imm.	II. Satell. ♃	-	9. 26. 28.	ſub dub.
— $\frac{13}{24}$	—	Imm.	I. Satell. ♃	-	9. 57. 30.	ſub dub.
— —	—	Imm.	II. Satell. ♃	-	12. 6. 44.	bon.

Obſeruationibus iſtis ſequentes correſpondentes reperio: Die $\frac{4}{15}$ Aug. Imm. I. Satellitis Petropoli iuxta obſeruationem Celeber. *Lexell* eſt 13^h. 32′. 58″. et iuxta meam 13^h. 32′. 48″. Poſito itaque momento Immerſionis ad Meridianum Petropolitanum 13^h. 32′. 53″. prodit Longitudo Mohileuiae a Petropoli 0^h 0′. 13″. verſus orientem et a Lutetia Pariſiorum 1^h. 52′. 13″.

Immenſioni II. Satellitis Iouis Mohileuiae die $\frac{6}{17}$ Aug. obſeruatae aliam correſpondentem non reperio niſi Pekini eamque coelo vaporoſo inſtitutam 15^h. 10′. 54″, quae per differentiam meridianorum 7^h. 36′. 20″ ad meridianum Pariſinum reducta fit 7^h. 34′. 34″, et collata cum Immerſione Mohileuiae obſeruata dat Longitudinem eiusdem a Lutetia Pariſiorum 1^h. 51′. 54″.

Die $\frac{13}{24}$ Aug. Immerſio I. Satellitis Iouis Petropoli iuxta obſeruationem Celeberr. *Lexell* eſt 9^h. 56′. 51″ et iuxta

iuxta meam $9^h. 56'. 49''$. Hinc posito momento Immersionis ad meridianum Petropolitanum $9^h. 56'. 50''$ prodit Longitudo Mohileuiae $0^h. 0'. 40''$ et a meridiano Parisino $1^h. 52'. 40''$.

Eadem Immersio Stockholmiae obseruata est $9^h. 8'. 24''$. Quare posita Longitudine illius a meridiano Parisino $1^h. 2'. 55''$ reperitur differentia meridianorum Parisiensis et Mohileuiensis $1^h. 52'. 1''$.

Eodem die obseruata est Stockholmiae Immersio II. Satellitis $11^h. 17'. 22''$, Geneuae autem $10^h. 29'. 14''$. Obseruatio Mohileuiensis collata cum Stockholmiensi dat differentiam meridianorum $0^h. 49'. 22''$, et Longitudinem Mohileuiae a meridiano Parisino $1^h. 52'. 17''$; comparata vero cum Geneuensi praebet differentiam meridianorum $1^h. 37'. 30''$. Assumta igitur Longitudine Geneuae a meridiano Parisino $15'. 14''$. prodit differentia meridianorum Parisiensis et Mohileuiensis $1^h. 52'. 44''$.

Hinc sumendo omnium medio Longitudo Mohileuiae a meridiano Parisino computata statuenda foret $1^h. 52'. 18''$, omissa vero determinatione a comparatione obseruationis Pekinensis petita prodit $1^h. 52'. 23''$; Quodsi primae tantum et vltimae obseruationis rationem habere velimus, reperitur Longitudo quaesita $1^h. 52'. 25''$.

Occultatio α Tauri a Luna.

Die $\frac{31. \text{ Iulii}}{11. \text{ Aug.}}$.

Meridies verus ex altit. ☉ correspond.	$0^h. 0'. 6''$
α Tauri limbum ☽ lucidum tangit.	12. 33. 25. t. h.
subterfugit	12. 33. $31\frac{1}{2}$
Emersio eiusdem ad limb. ☽ obscurum	13. 30. $7\frac{1}{2}$.

Die

Die $\frac{1}{12}$ Aug.

Merid. verus ex altit. ☉lis correſpond.	$11^h. 59'. 21''$
Hinc reperitur tempus verum Immerſ.	12. 33. 49
Emerſionis	13. 30. 26.

Pro computanda hinc Longitudine Mohileuiae ex iisdem Tabulis *Maieri* ſequentia elementa obtinui. 1773 $\frac{31.\ Iulii}{11.\ Aug.}$

Temp. med. Grenov.	$10^h. 30'.$	$11^h. 30''.$	$12^h. 30'.$
Longit. ☉ media	$4^s.20°.40'.15''.$	$4^s.20°.42'.42'',7$	$4^s.20°.45'.10'',7$
vera	4. 19. 24. 33.	4. 19. 27. 0, 8	4. 19. 29. 22, 6
Obliquit. Eclipticae	23. 27. 58.		
Aequat. temporis	+ 4. 40.	vt fiat med.	+ 4. 39.
Longit. ☽ vera	2. 5. 55. 23, 2	2. 6. 25. 14, 2	2. 6. 55. 4, 8
Latit. ☽ Auſtr.	4. 37. 18, 9	4. 38. 32, 1	4. 39. 44, 2
Parall. Aequat.	54. 30, 6		54. 31, 7
Diam ☽ horiz.	29. 42, 4		29. 43, 0

Longitudo α Tauri iuxta *Maierum* ad initium anni 1773 eſt $2^s. 6°. 37'. 13'', 7$, Praeceſſio ad diem obſeruationis $+ 30'', 6$, Aberr. $- 6''$, Nut. $+ 1'', 4$; Longitudo igitur ſtellae apparens ad diem obſeruationis eſt $2^s. 6°. 37'. 39'', 7$; Latitudo ſtellae $5°. 29'. 0''$ Auſtr. $- 1'', 8$ Aberr. $= 5°. 28'. 58'', 2$.

Tempus verum Immerſionis in tempus medium conuerſum fit $12^h. 38'. 29''$; poſita igitur differentia meridianorum Grenouienſis et Mohileuienſis $2^h. 1'. 29''$ prodit tempus Immerſionis ad meridianum Grenouicenſem reductum $10^h. 37'. 0''$.

Tem-

Tempus medium obseruationis in gradibus	189°. 37'. 15''.
Longitudo media ☉lis - -	140. 40. 32.
Punctum aequat. in merid. Mohilev.	330. 17. 47.
Complementum - - - -	29. 42. 13.
Longitudo Lunae vera - -	65, 58. 52, 2
Latitudo Lunae Austr. - -	4. 37. 27, 2

Posita ratione diametri Aequatoris ad Axem telluris = 201:200 pro computandis parallaxibus iuxta methodum Celeberr. *Lexell* habetur distantia zenith apparentis a zenith vero 16'. 21''; $l\,\varepsilon = 9.\ 9985904$, et denotante Π parallaxi Lunae aequatorea $l\,\varepsilon\,\Pi = 3.\ 5132178$. Repraesentet M ♈ Q Aequatorem, E ♈ ♋ Eclipticam: sit M punctum Aequatoris in meridiano Mohileuiensi, erit ♈ M = 29°. 42' 13''. Ducatur per M meridianus loci, in quo z sit zenith verum et P polus Aequatoris: id circo habebitur P z = 36°. 22'. 1''; Per polum Aequatoris P, polumque Eclipticae Π ducatur circulus Π P Q, erit is colurus solsticiorum: Quam obrem ang. M P Q, cuius mensura est arcus M Q, erit 119°. 42'. 13'' et Π P z = 60°. 17'. 47'': Cum P Π sit 23°. 27'. 58'', facta resolutione triangulorum P Π z et L Π z reperitur K z = 26°. 43'. 9'', K L = 77°. 56'. 46'', L z = 79°. 15'. 1'', et per formulas a Celeberr. *Lexell* traditas parall. Longit. $= \frac{\varepsilon\,\Pi\ \sin.\,K z}{\cos.\,P'L\,(1 - \varepsilon\,\Pi\,\cos.\,L z)}$; parall. Latitud. $= \frac{\varepsilon\,\Pi\,\tang.\,L K \cos.\,L z}{1 - \varepsilon\,\Pi\,\cos.\,L z}$ reperitur tandem parallaxis in Longitudinem + 24'. 34'', 8, parallaxis in Latitudinem + 47'. 36''. 1: Diameter ☽ apparens 29'. 47'', 4; vnde differentia Longitudinum Stellae et Lunae apparens 14'. 12'', 7 quae ducta in cosinum Latitudinis Lunae apparentis fit 14'. 8''. 8 et differentia Latitudinum apparens = 3'. 54', 7; quare distantia stellae a centro Lunae prodit 14'. 40'', 6 minor semi-

Tab. XIV. Fig. 2.

ſemidiametro Lunae apparente; id circo dum Grenouici $10^h. 37'. 0''$ numerarentur Immerſio ſtellae iam praeterierit neceſſe eſt.

Ponamus igitur differentiam meridianorum $2^h. 2'. 29'$ Momentum Immerſionis ad meridianum Grenouicenſem reductum erit $10^h. 36'. 0''$; pro quo

Longitudo ☉lis media eſt - -	140°. 40'. 30''.
Tempus medium obſeruat. in grad.	189. 37. 15.
Punctum aequat. in merid. Mohilev.	330. 17. 45.
Angulus M P Q - -	119. 42. 15.
Π P z - -	60. 17. 45.
Longitudo Lunae vera - -	65. 58. 22, 3
Latitudo Lunae Auſtr. - -	4. 37. 26, 2

Etſi facile praeuidere erat parallaxes in Longitudinem et Latitudinem in hac hypotheſi easdem fore quam proxime ac in praecedenti, denuo tamen illas computare ideo volui, vt computus hic inſtar repetitionis praecedentis haberetur. Peracto illo ad eandem normam reperi parallaxim Longitudinis + 24'. 34'', 7 parallaxin Latitudinis + 47'. 36'', 2; quare Longitudo apparens eſt 5°. 25'. 2'', 4; differentia Longitudinum ſtellae et Lunae apparens 14'. 42'', 7 ducta in coſinum Latitudinis Lunae apparentis dat 14'. 38''. 7 et differentia Latitudinum apparens 3'. 55'', 8. Vnde diſtantia ſtellae a centro Lunae 15'. 9'', 7 et tandem differentia meridianorum Mohileuiam inter et Grenovicum $2^h. 1'. 56''$.

Cum tempus verum Emerſionis ſit $13^h. 30'. 26''$, habebitur tempus medium eiusdem $13^h. 35'. 6''$. Ponamus

mus differentiam meridianorum Grenouicenſis et Mohileviensis $2^h. 1'. 3''$, momentum Emerſionis ad meridianum Grenouici reductum fit $11^h. 33'. 36''$, pro quo reperitur:

Longitudo media ☉lis	- -	140°. 42'. 52''.
Tempus medium obſeru. in gradus conuerſ.		203. 46. 30.
Punctum Aequat. in merid. Mohilev.		344. 29. 22.
Angulus MPQ	- -	105. 30. 38.
PΠz	- - -	74. 29. 22.
Longitudo ☽ vera	- -	66. 27. 1, 7.
Latitudo ☽ Auſtr.	- -	4. 38. 36, 4.

Calculo parallaxium ad normam praecedentem expedito reperi parall. Longitudinis + 24'. 52''; parall. Latitudinis 45'. 22'', 1. Diametrum Lunae apparentem 29'. 52'', 1. Differentia Longitudinum ſtellae et Lunae apparens 14'. 14''. ducta in coſinum Latitudinis Lunae apparentis eſt 14'. 10'', 2 et differentia Latitudinum apparens 4'. 59'', 7; vnde diſtantia ſtellae a centro Lunae 15'. 1'', 4.

Ex quo apparet Emerſionem iam praeteriiſſe, cum Grenouici numerarentur $2^h. 1'. 30''$: aſſumta igitur differentia meridianorum $2^h. 2'. 30''$ tempus medium obſeruationis ad meridianum Grenouicenſem reductum erit $11^h. 32'. 36''$. pro quo computaui elementa ad eliciendam diſtantiam ſtellae a centro Lunae neceſſaria, ac computo peracto obtinui.

Longitudinem Lunae veram	-	66°. 26'. 31'', 8
Latitudinem Lunae	- -	4. 38. 35, 2
Parallaxin in Longitudinem	-	24. 51, 6
Parallaxin in Latitudinem	- -	45. 22, 5.

Differentia Longitudinum apparens 13'. 43'', 7 ducta in cosinum Latitudinis Lunae apparentis fit 13'. 40'', et differentia Latitudinum apparens 5'. 0'', 5: vnde distantia stellae a centro Lunae prodit 14'. 43'', 3 et Longitudo Mohileuiae a Grenouico 2ʰ. 1'. 48''.

Determinationes istae Longitudinis Mohileuiae procul dubio sufficiunt pro vsu Geographico, et paucis secundis aberraturum me confido, si eam a Grenouico 2ʰ. 1'. 52'' et a Lutetia Parisiorum 1ʰ. 52'. 26''. vel 36''. supposuero non refragantibus quoque obseruationibus Satellitum Iouis.

Positio Geographica Druiae.

Hic binae captae sunt altitudines maximae Solis et quatuor stellarum fixarum. Die $\frac{5}{16}$ Sept. Altitudo maxima limbi ☉lis superioris obseruata est 37°. 2'. 46'', verum illi non immoror, quia dubia obseruatori visa est.

Die $\frac{6}{17}$ Sept. maxima altitudo eiusdem limbi ☉lis obseruata est 36°. 39'. 37'', quae errore quadrantis — 4'. 52'' et Refr. — parall. 1'. 10''. correcta fit 36°. 33'. 35''. et cum $\frac{1}{2}$ Diameter ☉lis fit 15'. 57'', et Declinatio eiusdem 2°. 5'. 12'' quam proxime, prodibit complementum Altitudinis Poli 34°. 12'. 26''. et Latitudo Druiae 55°. 47'. 34''.

Dies.	Nomina stellarum.	Altit. max. correct.	Refr. Bradl.	Decl. med. ad diem observ.	Aberr	Nut.	Latitudo.
$\frac{6}{17}$ Sept.	α Lyrae	72°. 48'. 18''	1'. 18''	38°. 35'. 0''	+ 17''	+ 9''	55°. 47'. 26''
	α Sagittae	51. 44. 1	45	17. 30. 28	+ 12	+ 8	55. 47. 36
	α Aquilae	42. 30. 55	1. 2	8. 17. 3	+ 10	+ 8	55. 47. 28
	α Cygni	78. 42. 1	12	44. 28. 48	+ 15	+ 7	55. 47. 21

Medium ex quinque determinationibus 55. 47. 29.

Quam

Quam obrem Latitudo Druiae statui poterit 55°. 47½′.

Die $\frac{7}{18}$ Sept. obseruata est Immersio II. Satellitis Iouis $9^h. 14'. 26''$. t. v. Eadem Stockholmiae $8^h. 37'. 47''$; vnde differentia meridianorum Stockholmiae et Druiae prodit $0^h. 36'. 39''$, et Longitudo Druiae a meridiano Parisino computata $1^h. 39'. 34''$.

Die $\frac{10}{21}$ Sept. obseruata est declinatio eiusdem acus magneticae 10°. 40′. vers. occidentem.

Latitudo Vrbis Polotsk.

Manente eodem statu quadrantis die $\frac{17}{28}$ Sept. obseruata est altitudo meridiana limbi ☉lis Borealis 32°. 41′. 2″, cui applicata correctione quadrantis — 4′. 52″. Refr. — parall. — 1′. 22″ ob ½ Diam. ☉lis 16′. 0″. prodit altitudo centri ☉lis 32°. 18′. 48″; et cum Declinatio ☉lis sit quam proxime 2°. 12′. 19″.4, habetur Latitudo Polotsk 55°. 28′. 53″.

Die sequenti altitudo meridiana eiusdem limbi ☉lis obseruata est 32°. 17′. 35″; vnde adhibitis iisdem reductionibus et Declinatione ☉lis 2°. 35′. 41″. prodit Latitudo vrbis Polotsk 55°. 28′. 59″.

Ibidem loci die $\frac{17}{28}$ Sept. sequentes captae sunt altitudines stellarum meridianae:

Nomina stellarum.	Altit. stell. correct.	Refr.	Decl. med. ad diem observ.	Aberr	Nut.	Latitudo.
α Aquilae	42°.49′.39″	1′. 2″	8°. 17′. 3″	+ 10″	+ 8″	55°.28′.44″
α Cygni	79. 1. 1	11	44. 28. 49	+ 16	+ 7	55. 28. 22
δ Persei	81. 33. 54	9	47. 2. 41	— 3	— 7	55. 28. 46
ζ Persei	65. 43. 4	26	31. 11. 35	— 0	— 7	55. 28. 50
α Capellae	80. 16. 8	10	45. 44. 45	— 7	— 8	55. 28. 22
α Cygni	79. 0. 55	11	44. 28. 49	-	-	55. 28. 28

Sumta omnium harum determinationum media habebitur Latitudo Polotsk 55°. 28′. 40″.

Latitudo Vrbis Witepsk.

Hic in vniuerſum ſeptem inſtitutae ſunt pro Latitudine obſeruationes, binae Solis et quinque ſtellarum fixarum. Die $\frac{24 \text{ Sept.}}{5 \text{ Oct.}}$ altitudo meridiana limbi Solis Borealis obſeruata eſt 30°. 16′. 41″, quae errore quadrantis — 4′. 52″, et Refr. — parall. 1′. 30″ correcta fit 30°. 9′. 49″; vnde ob ½ Diam. ☉lis 16′. 3″ et Declinationem eiusdem 4°. 55′. 0″. Auſtr. quam proxime, prodit Latitudo vrbis Witepsk 55°. 11′. 4″.

Die ſequenti denuo obſeruata eſt altitudo meridiana eiusdem limbi ☉lis 29°. 53′. 0″, quae adhibitis iisdem correctionibus prodit 29°. 46′. 38″, et ob Declinationem Solis 5°. 18′. 15″ Auſtr. habetur Latitudo Witepsk 55°. 11′. 10″.

Die $\frac{24 \text{ Sept.}}{5 \text{ Oct.}}$ captae ſunt altitudines meridianae ſequentium ſtellarum fixarum.

Nomina ſtellarum.	Altit. ſtell. correct.	Refr.	Decl. med. ad diem obſ.	Aberr	Nut.	Latitudo.
α Sagittae	52°.20′.27″	44″	17°.30′.29″	+ 12″	+ 9″	55°.11′. 7″
α Aquilae	43. 7. 33	1′. 1	8. 17. 4	+ 10	+ 8	55. 10. 50
α Capric.	21. 37. 28	2. 25	13. 13. 55	— 6	— 8	55. 11. 16
α Cygni	79. 18. 43	11	44. 28. 49	+ 17	+ 7	55. 10. 41
β Aquarii	28. 17. 35	1. 45	6. 33. 21 A	— 6	— 6	55. 11. 1

Medium 55. 10. 59.

Omnium vero determinationum media 55. 11. 1. quam obrem Latitudinem vrbis Witepsk tuto ſtatuere poterimus 55°. 11′. 0′.

EPITO-

EPITOME OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXVII. SECVNDVM CALENDARIVM CORRECTVM INSTITVTARVM.

Auctore

IOANNE ALBERTO EVLER.

I. Barometrum.

1. Barometri altitudines maximae, minimae et mediae, vna cum variatione maxima et ftatu medio, pro fingulis menfibus anni 1777.

Menfe	Altitudo maxima Dig. p. c.	Altitudo maxima die hora	Altitudo minima Dig. p. c.	Altitudo minima die hora	Variatio Dig. p. c.	Medium Dig. p. c.	Altitudo media Dig. p. c.
Ianuar.	28. 86	16. Meridie	27. 38	6. VI. a. m.	1. 48	28. 12	28. 33
Februar.	28. 88	6. III. p. m.	27. 12	28. IX p. m.	1. 76	28. 00	28. 20
Mart.	28. 44	25. VI. p. m.	27. 54	8 III. a. m.	0. 90	27. 99	27. 96
April.	28. 61	5. Meridie	27. 45	17. p. m.	1 16	28. 03	28. 06
Maii	28. 41	21. II. p. m.	27. 59	19 IX. a. m.	0. 82	28. 00	28. 11
Iunii	28. 27	5. IX. a. m.	27. 67	28. II. p. m.	0. 60	27. 97	28. 01
Iulii	28. 22	30. IX. a. m.	27. 46	28. V. p. m.	0. 76	27. 84	27. 87
Auguft	28. 33	21. Meridie	27. 71	27. IX. a. m.	0. 62	28. 02	28. 07
Sept.	28. 53	28. Meridie	27. 31	21. IV. a. m.	1. 22	27. 92	27. 96
Octobr.	28. 33	1. I. a. m. 3. Meridie 10. XI. p. m.	27. 08	27. VI p. m.	1. 25	27. 70	27. 94
Nouembr.	28 42	14. VI. a. m	27. 52	7. med. nocte	0. 90	27 97	27. 91
Decembr.	28. 46	9. Meridie	27. 35	4. IX. a. m.	1. 10	27. 91	28 00
Anno 1777.	28. 88	Menfe Februarii.	27. 08	Menfe Octobris.	1. 80	27. 98	28. 03

2. Numerus dierum, quibus altitudo Barometri ſuperabat terminos quosdam circa altitudinem 28. poll.

Menſe	ſupra 28. 20 Dies, horae	ſupra 28. 10 Dies, horae	ſupra 28. 00 Dies, horae	ſupra 27. 90 Dies, horae	ſupra 27. 80 Dies, horae	per dimidium menſis ſupra Dig. p. c.
Ian.	20. 9	25. 0	26. 21	27. 21	28. 15	28. 34
Febr.	14. 6	16. 6	18. 12	19. 18	20. 21	28. 23
Mart.	2. 21	7. 18	14. 18	18. 21	23. 18	27. 98
April.	9. 12	12. 15	18. 12	22. 3	24. 9	28. 07
Maii	11. 21	15. 9	21. 9	27. 18	29. 0	28. 10
Iunii	4 3	8. 0	16. 18	24 0	27. 9	28. 02
Iul	0. 9	2. 18	6 21	13. [illegible]	19. 15	27. 88
Aug.	8. 0	15. 12	21. 9	25. 6	27. 21	28. 10
Sept.	5. 21	9. 0	13. 0.	17. 15	19. 15	27. 97
Oct.	4. 3	10. 0	15. 0	21. 3	24. 0	28. 01
Nou.	1. 15	4. 12	9. 3	15. 18	22. 3	27. 92
Dec.	4. 21	9. 9	17. 9	24. 18	26. 18	28. 03
Anno 1777	87. 21	136. 3	200. 12	257 21	294. 0	28. 03

Duae priores figurae altitudinum barometricarum pollices integros deſignant, quorum duodecim pedem regium pariſinum conſtituunt, poſteriores vero partes centeſimas vnius pollicis. Tum vero monendum eſt a m. ſignificare *ante meridiem*, p. m. vero *poſt meridiem*.

Colligitur ex his binis tabulis, pro toto anno.

1. Altitudo maxima Barometri 28. 88: menſe Februarii die 6, hora III. poſt meridiem. Thermom. Deslisl. 163. Coelum ſerenum; malacia.

2. Altitudo minima Barometri 27. 08: menſe Octobris die 27, hora VI. poſt meridiem. Thermom. Delisl. 143.

143. Coelum ex parte nubibus obductum & procella e regione SW.

3. Variatio maxima 1. 80 seu $1\frac{4}{5}$ poll.

4. Medium inter maximam altitudinem et minimam $27\frac{98}{100}$ poll.

5. Altitudo media inter omnes obseruatas $28\frac{8}{100}$.

6. Denique mercurius in tubo Barometri se sustentabat supra

$28\frac{20}{100}$ poll. per dies $87\frac{7}{8}$
$28\frac{10}{100}$ poll. per dies $136\frac{1}{8}$
28.00 poll. per dies $200\frac{1}{8}$
$27\frac{90}{100}$ poll. per dies $257\frac{7}{8}$
$27\frac{80}{100}$ poll. per dies 294.

vnde concluditur mercurium se sustentasse per interuallum dimidii anni vel $182\frac{1}{2}$ dierum supra altitudinem $28\frac{5}{100}$, quae prorsus conuenit cum altitudine media.

3. Descensus et ascensus mercurii in tubo Barometri notabiliores.

Mense Ianuario.

d. 1. hora 9. p. m. 28. 11 }
d. 2. hora 9. p. m. 28. 63 } differentia 0. 52 per 24 h.

Coelum serenum, N.

d. 3. hora 3. a. m. 28. 64 }
d. 4. hora 6. p. m. 27. 98 } differentia 0. 66 per 39. horas.

d. 5. hora 3. a. m. 27. 98 }
d. 6. hora 6. a. m. 27. 38 } differentia 0. 60. per 27 horas.

Coe-

Coelum plane obductum, nix copiosa, ventus satis vehemens ex SO.

d. 6. hora 6. a. m. 27. 38 } diff. 0. 84 per 39. horas.
d. 7. hora 9. p. m. 28. 22 }

Coelum obductum, pluuia, vento e meridie flante: tum vero coelum serenum, SW.

d. 9. hora 0. a. m. 28. 33 } diff. 0. 75 per 24 horas.
d. 9. media nocte 27. 58 } diff. 0. 47 per 12 horas.
d. 10. meridie 28. 05 }

Coelum plane obductum, nix copiosa cum vento ex occidente vehementer flante. Tum vero coelum serenum NW.

d. 11. media nocte 27. 98 } diff. 0. 64 per 24 horas.
d. 12. media nocte 28. 62 }

Coelum nubibus ex magna parte obductum, nix, NW.

Mense Februario.

d. 27. meridie 28. 16 } diff. 1. 04 per 33 horas
d. 28. hora 9. p. m. 27. 12 }

Coelum obductum, nix copiosa, ventus SO.

Mense Martio.

Febr. d. 28. hora 9. p. m. 27. 12 } diff. vnius pollic. per 42 h.
Mart. d. 2. hora 3. p. m. 28. 12 }

Coelum serenum et ventus e regione NW.

d. 8. hora 4. a. m. 27. 54 } diff. 0. 58 per 30 horas.
d. 9. hora 10. a. m. 28. 12 }

Coelum obductum, nix, SW: tum vero coelum serenum SO.

Mense

Menſe Aprili.

d. 3. hora 6. p. m. 28. 02 } diff. 0. 59 per 42 horas.
d. 5. meridie 28. 61 }

Coelum obductum N: tum ſerenum NW.

d. 15. meridie 28. 27 } diff. 0. 52 per 24 horas
d. 16. meridie 27. 75 }

Coelum ſerenum NW.

d. 17. hora 9. p. m. 27. 45 } diff. 0. 67 per 36 horas.
d. 19. hora 9. a. m. 28. 12 }

Coelum ſerenum, malacia

d. 22. hora 9. a. m. 28. 23 } diff. 0. 53 per 27 horas.
d. 23. meridie 27. 70 }

Coelum obductum; pluuia copioſa cum procella e SW.

d. 24. meridie 28. 08 } diff. 0. 57 per 24 horas.
d. 25. meridie 27. 51 }

Coelum nubibus ex parte obductum SW, pluuia.

Menſe Junio.

d. 5. hora 9. a. m. 28. 28 } diff. 0. 48 per 24 horas.
d. 6. hora 9. a. m. 27. 80 }

Coelum ex parte nubibus obductum, procella ex occidente cum pluuia copioſa.

Menſe Julio.

d. 28. hora 6. p. m. 27. 45 } diff. 0. 73 per horas 18.
d. 29. meridie 28. 18 }

Coelum ex magna parte Serenum, pluuia W.

 Men-

Menſe Auguſto.

d. 25. hora 9. a. m. 28. 29
—— media nocte 28. 25 }
d. 26. media nocte 27. 78 } o. 47 per 24 horas.
d. 27. hora 9. a. m. 27. 70

Coelum plane obductum, pluuia, procella e regione SW.

Menſe Septembri.

d. 14. meridie 28. 37
d. 15. media nocte 28. 12 }
d. 17. hora 6. a. m. 27. 37 } diff. o. 75 per 30 horas.

Coelum obductum, pluuia copioſa; ventus SW.

d. 17. media nocte 27. 40 }
d. 19. meridie 28. 20 } diff. o. 80. per 36 horas.

Coelum ſerenum, vento leniter flante e meridie

d. 19. media nocte 28. 17 } diff. o. 87 per 28 horas
d. 21. hora 4. a. m. 27. 30 }
d. 22. meridie 28. 13 } diff. o. 83 per 32 horas

hac die 21 contigit illa diluuialis fluminis Neuae reſtagnatio, qua tota vrbis regio infra flumen Nevka per horas fere duas aqua ſubmerſa fuit. Pluit abundanter et procella vehementer agitauit vndas e plaga SW.

Menſe Octobri.

d. 27. hora 6. p. m. 27. 08 }
d. 28. meridie 27. 64 } diff. o. 56 per horas 18
—— media nocte 27. 73 }
d. 29. hora 9. p. m. 28. 20 } diff. o. 47 per horas 21.

Coe-

Coelum obductum, tum vero ſerenum: ventus flabat e regione NW.

Menſe Nouembri.

d. 6. media nocte 27. 94
d. 7. media nocte 27. 51 } diff. 0. 41 per 24. horas.
d. 8. media nocte 27. 92 }

Coelum magna ex parte nubibus obductum: ventus ex occidente

d. 11. hora 8. a. m. 27. 71 } diff. 0. 41 per 22 horas.
d. 12. hora 6. a. m 28. 12 }

Coelum magna ex parte ſerenum: SO.

Menſe Decembri.

d. 7 meridie 27. 88
—— media nocte 27. 93 } diff. 0. 46 per 24 horas.
d 8. media nocte 28. 39 }
d 9. meridie 28. 45

Coelum obductum et nebuloſum: SO.

II. Thermometrum.

1. Thermometri altitudines minimae, maximae et mediae pro singulis mensibus anni 1777.

Mense.	Altitudo minima.				Altitudo maxima.				Diff.	Altitudo media.	
	Gradus	die	hora		Gradus	die	hora		Gr.	nocte	meridie.
Ianuar.	185	30.	VI.	a. m.	148	6.	IX.	a. m.	37	166 Gr.	160 Gr.
Februar.	189	2.	VI.	a. m.	144	26.	II.	p. m.	45	170	162
Mart.	186	5.	VI.	a. m.	143	22.	II.	p. m.	43	166	155
April.	176	2.	VI.	a. m	133	13	II.	p. m.	43	157	146
Maii	148	2, 3, 5, 8	VI.	a. m.	113	16.	II.	p. m.	35	138	129
Iunii	139	7	VI. XI.	a. m. p. m.	114	15. 22.	II.	p. m.	25	131	123
Iulii	135	9. 12. 29.	IX. IX. V.	p. m a. m a. m	109	6.	II.	p. m.	26	132	121
August.	144	30.	VI.	a. m	113	4.	II.	p. m.	31	135	126
Septembr.	148	28.	VI.	a. m	127	3.	II.	p. m	21	143	134
Octobr.	158	20.	X.	p. m.	133	4.	II.	p. m	25	149	143
Nouemb.	172	27.	VIII.	a. m.	139	5.	X.	a. m.	33	153	150
Decembr.	173	31.	VIII.	a. m	144	15.	IX.	a. m.	29	158	153
Anno 1777.	189	Mense Februario.			109	Mense Iulio.			80	149	142

De

De Thermometri conſtructione et expoſitione plura in Parte praecedente horum Actorum leguntur; quare hic eadem repetere ſuperfluum foret.

Per altitudinem mediam intelligo ſummam omnium altitudinum thermometricarum per earum numerum diuiſam: ſeparaui autem altitudines mane et veſpere obſeruatas ab eis, quae paulo poſt meridiem annotatae fuerunt; illae prebuerunt altitudines medias prioris columnae *nocte* deſignatas, hae vero altitudines medias poſterioris columnae, vel meridianas.

2. Status frigoris et caloris.

Menſe.	Dies frigidiores Grad.					Dies calidiores Gradibus.					
	180	170	160	150	140	110	120	130	140	150	160
Ianuar.	1	8	24	31	31					1	17
Februar.	2	14	26	28	28					2	10
Mart.	2	10	22	31	31					9	25
April.		4	9	23	30				8	20	29
Maii					12		3	17	30	31	31
Iunii							10	27	30	30	30
Iulii						1	13	30	31	31	31
Auguſt.					4		3	26	31	31	31
Septembr.					25			4	30	30	30
Octobr.				17	29				7	29	31
Nouembr.		1	5	18	30				1	18	28
Decembr.		2	9	29	31					11	26
Anno 1777.	5	39	95	177	251	1	29	104	16	243	319

Ex tabula priori intelligitur, per totum annum fuiſſe.

Altitudinem Thermometri minimam, ſeu gradum frigoris maximi 189 grad. Delisl. menſe Februarii die 2, hora matutina VI. Barometro tunc temporis momento 28. 41; Coelo ſereno exiſtente; nebula et malacia. Hoc ergo frigus maximum 11. gradibus minus obſeruatum eſt anno vltimo praecedente.

Altitudinem Thermometri maximam, ſeu gradum caloris maximi 109. grad. Delisl. die 6. Iulii, hora poſtmeridiana II. Barometrum 28. 03; coelum ex parte nubibus obductum; vento leniter flante e regione SO. Annis praeteritis calor maximus deprehenſus fuit 106, 105 et 104 graduum, ideoque notabiliter maior hoc anno.

Hinc variatio Thermometri maxima 80 tantum graduum ſecundum Diuiſionem Delislianam.

Altitudo Thermometri media inter omnes quae mane et veſpere obſeruatae fuerunt, eſt 149 graduum: ea autem quae ex obſeruationibus poſt meridianis eruta eſt, aequatur 142 gradibus.

Frigus hoc anno 1777 nunquam ad gradum 190 peruenit. Interim oſtendit tabula ſecunda fuiſſe 177 dies frigidiores gradu 150, hoc eſt congelationis naturalis termino, inter quos quidem 95 fuerunt dies, quibus frigus ſuperabat 160 gradus. In his porro numerauimus 39 dies frigidiores gradu 170 et tantum 5 frigidiores gradu 180.

Deinde quoad calorem, patet ex eadem tabula, hoc 1777 anno fuiſſe 243 dies quibus altitudo thermometri praeualuit termino congelationis 150 et inter hos 168 dies

dies fuiſſe calidiores gradu 140: porro 104 dies calidiores gradu 130; inter quos autem tantum 29 dies annotauimus quibus calor ſuperabat gradum 120 et vnicum quo calor maior fuit gradu 110.

Speciatim frigus obſeruatum fuit intra gradus.

		Dies.
180 et 190	die 30 Ianuarii, die 1. 2. Febr. die 4. et 5. Martii - - - - -	5
170 et 180	die 2. 3. 12. 27-29. 31. Ian. die 6-10. 18-23. 27. Febr. die 2. 3. 9. 10. 14. 15. 17. 18. Mart. die 2. 3. 5. 6. Apr. die 27. Nou. et die 30 et 31. Dec. - - - -	34
160 et 170	die 1. 7—11. 13. 15—18. 22.—26. Ian. die 3—5. 11—17. 24. 25. Febr. die 1. 6—8. 11.—13. 16. 19. 20. 29. 31. Martii; die 1. 4. 7. 18. 19 Apr. die 24—26. 28 Nouembr. et die 18. 24—29 Decembris - - -	56

Calor autem deprehenſus fuit intra gradus:

		Dies.
110 et 100	die 6 Iulii - - -	1
120 et 110	die 16. 17. 28. Maii, die 2. 14. 15. 18. 19. 22. 23. 27. 29. 30. Iunii, die 1—5. 21. 23—28. Iulii, die 2. 3. 4. Auguſti - - -	28

130

		Dies.
130 et 120	die 7. 9 — 12. 15. 18. 22. 25 — 27. 29. — 31. Maii, die 1. 3. 5. 6. 8. 9. 11 — 13. 16. 17. 20. 21. 24 — 26. 28. Iunii, die 7 — 11. 13 — 20. 22. 29 — 31. Iulii, die 1. 5 — 14. 16. — 18. 21 — 27. 29. 31. Augusti et die 1. 2. 3. 5. Septemb. - - - -	75
140 et 130	die 12. 13. 14. 22. 25. 28.—30. Apr. die 2 — 6. 8. 13. 14. 19. 20. 21. 23. 24. Maii, die 4. 7. 10. Iunii, die 12 Iulii, die 15. 19. 20. 28. 30. Aug. die 4. 6 — 30 Sept., die 1 — 6. 27. Octobris et die 5. Nouembris - -	64

Ex tabula priori patet, vt iam obseruauimus, frigus medium hoc anno statui posse 149 graduum et calorem medium 142 graduum. At si menses aestiuos Maium — Octobrem, ab hiemalibus Ianuar. — April. Nouembr. Decembr. separamus, reperimus in illis calorem medium fuisse 129 ideoque 4 gradibus minorem aestate praecedente, et in his frigus medium 162 graduum, fere vti anno vltimo praeterlapso.

III.

III. Ventus et Ventorum Directiones.

Menfe	Malacia	Vent lenis	Vent fortis	Procellofus	Nord	N-O	Oft	S-O	Sud	S-W	Weft	N-W	Variabilis
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ianuar	1	15	12	3	8	1	3	5	3	2	2	7	0
Febr.	6	16	5	1	11	5	1	1	1	3	3	3	0
Mart.	5	15	9	2	7	2	1	7	2	5	3	4	0
April.	7	15	6	2	9	4	0	2	1	3	2	9	0
Maii	13	7	8	3	3	1	4	5	5	3	4	5	1
Iunii	6	9	12	3	0	0	6	3	3	2	9	7	0
Iulii	11	11	6	3	0	4	2	5	1	4	8	3	4
Aug.	8	10	9	4	4	5	2	1	0	6	6	3	4
Sept.	4	13	9	4	2	6	5	2	4	7	2	2	0
Oct.	3	10	13	5	6	0	1	1	5	5	5	8	0
Nou.	7	15	6	2	1	1	5	5	1	8	4	5	0
Dec.	0	16	13	2	7	2	2	7	5	3	1	4	0
Anno 1777.	71	152	108	34	58	31	32	44	31	51	49	60	9

Vnde patet hunc annum ventofiorem fuiffe anno praeterlapfo: minus ventofum vero quam annus proxime praecedens 1775, quanquam differentia non fit admodum fenfibilis; malaciae obferuatae fuerunt frequentius menfibus Maii et Iulii, ac procellae frequentius deprehenfae fuerunt menfibus Augufti, Septembris et Octobris.

Porro perfpicitur hoc anno maxime regnaffe ventum e regione NW. et quidem menfibus Aprilis, Octobris, Ianuarii et Iunii, tum vero boream et potiffimum menfe Februarii et Aprilis: deinde ventum SW. praefertim menfe Nouembris, Septembris et Augufti.

Denique procellae hoc anno flauerunt e regione:

	Dies
NO. die 21. Febr. - - -	1.
SO. die 13. Ian. die 21. Mart. d. 3. Iun. d. 3. Aug.	4.
S. die 22. 28. Maii, die 23. Sept. d. 30. Oct. -	4.
SW. die 14. Ian. d. 26. Mart. d. 23. April. d. 18. Maii, d. 4. Iun. d. 26. 27. Aug. d. 20. 21. 25. Sept. d 27. Oct. d. 5. 6. Nou. d. 15. Dec.	14.
W. die 29. April. d. 11. 28. Iul. d. 1. Oct. d. 14. Dec. - - - - -	5.
NW. die 10. Ian. d. 6. Iun. d. 12. Iul. d. 6. Aug. d. 6. 7. Oct. - - -	6.

IV. Conftitutio Coeli.

Menfe.	Coelum ferenum dies	Coelum obductum dies	Nebulofum dies	Pluuia dies	Nix dies
Ianuar.	6.	18.	5.	1.	10.
Februar.	5.	14.	5.	0.	16.
Martii	11.	8.	5.	1.	15.
Aprilis	9.	5.	3.	6.	5.
Maii	14.	4.	1.	9.	—
Iunii	10.	3.	0.	13.	—
Iulii	3.	5.	0.	27.	—
Augufti	6.	4.	2.	17.	—
Septemb.	5.	9.	0.	19.	—
Octobr.	1.	11.	0.	14.	6.
Nouemb.	0.	18.	2.	3.	10.
Decemb.	2.	22.	5.	6.	9.
Anno 1777.	72.	121.	28.	116.	71.

Excel-

Excellebant ergo quoad serenitatem coeli menses Maii, Martii, Iunii et Aprilis: numerus autem horum dierum serenorum hoc anno multo minor fuit annis praecedentibus. Frequentius pluit mense Iulii, Septembris et Augusti, et nix copiosa cecidit praesertim mense Februarii et Martii. Caeterum numerus dierum pluuialium hoc anno notabiliter maior fuit anno vltimo praeterlapso, at nebulae non tanta copia obseruatae fuerunt, nec numerus dierum quibus ninxit appropinquauit illi anno vltimo obseruato.

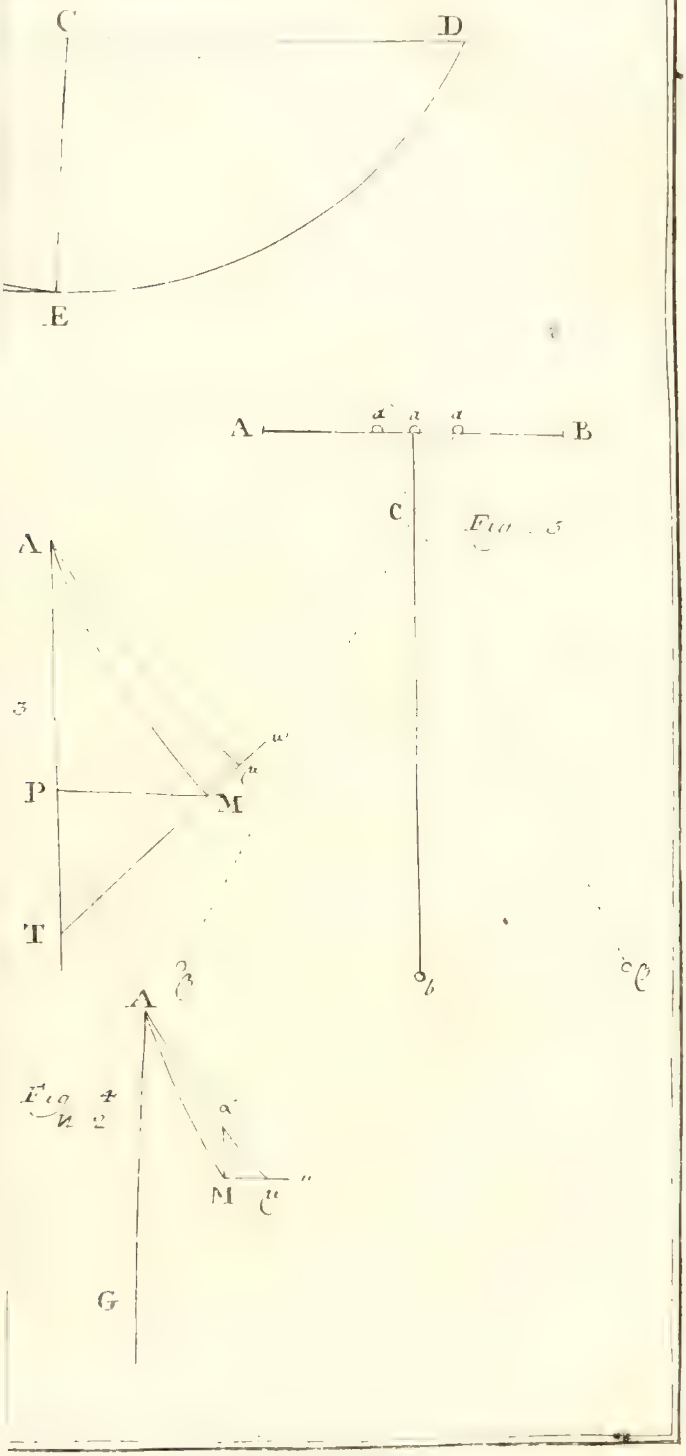
V. Reliqua phaenomena.

Grando decidit diebus 5; die scilicet 26. Martii; porro die 2 et 27. Sept. denique die 7 et 17. Octobris.

Aurorae boreales obseruatae fuerunt 26; et quidem 9 perlucidae die 5. Febr. d. 1. 5. Mart. d. 5. 6 Aprilis; d. 30. Aug. d. 15. Sept. d. 27. Nou. et d. 30. Dec. tum vero 17 debiliores d. 28. Ian. d. 6. 10. Febr. d. 9. 10. 12. 14. 28. Mart. d. 1. 4. 8. 9. 12. April. d. 5. 6. 24. et 30. Septembris.

Tonuit 14^{es}; die 18 et 28 Maii; die 11. 27 et 28 Iunii; die 1. 6. 17. 24. 25. 26. 27. 28. Iulii; et die 8. Augusti.

Flumen Neva a glacie liberatum fuit die 30 Aprilis, postquam per spatium 170 dierum glacie obductum perstitit. Deinde post 210 dies, hoc est die 26 Nouembris iterum glacie obducebatur.


C
D
E
A
a
a
a
B
c
Fig. 3
b
A
P
M
T
A
Fig. 4
M
G

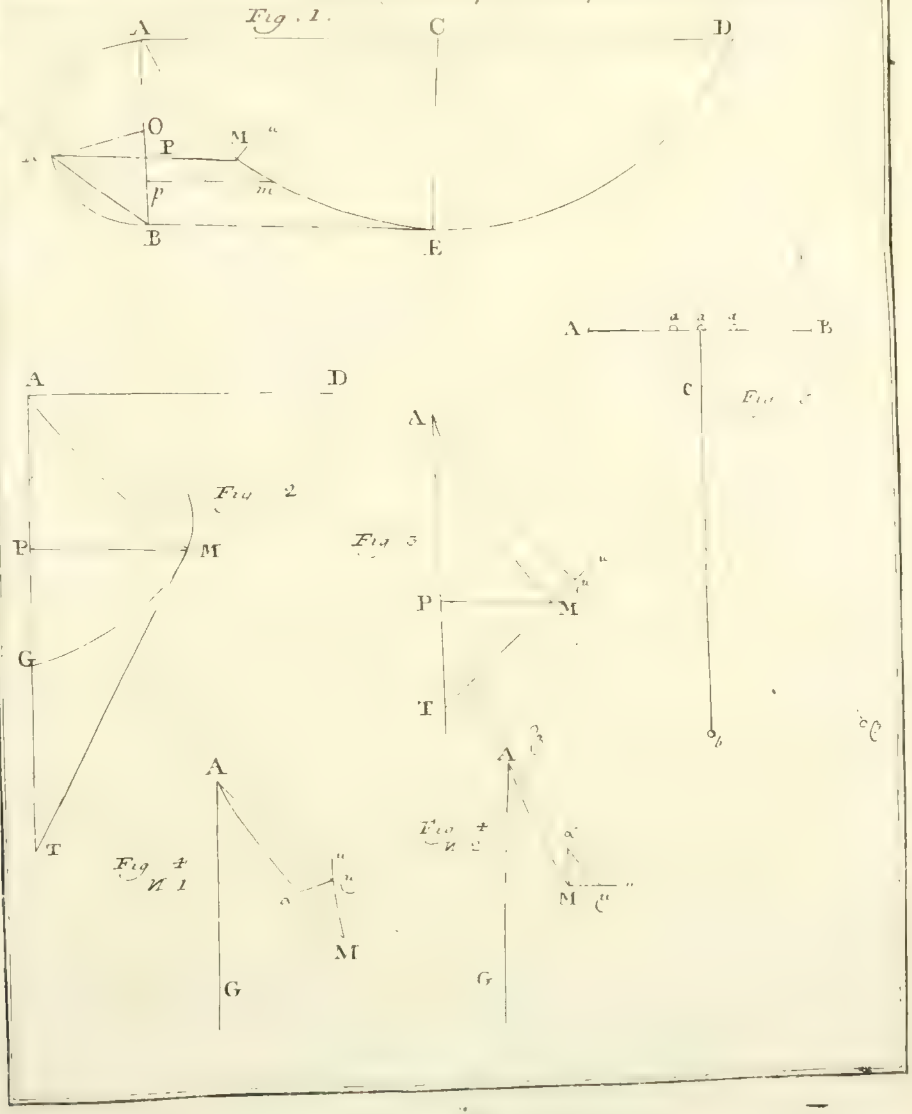
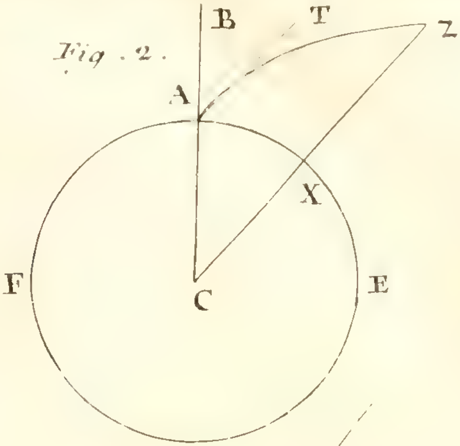

Fig. 1.
A
C
D
O
P
M
p
m
B
E
A
D
Fig. 2
P
M
G
T
Fig. 3
A
P
M
T
A
B
C
Fig. 4
N 1
A
M
G
Fig. 4
N 2
A
M
G

Fig. 2.



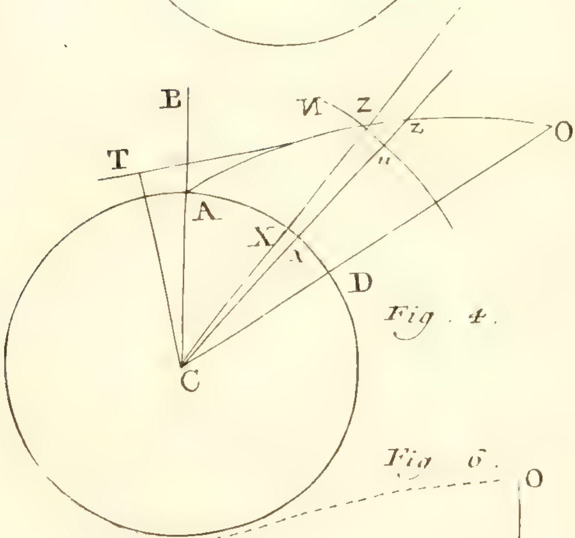
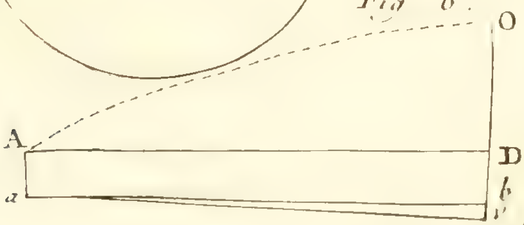


Fig. 4.

Fig. 6.



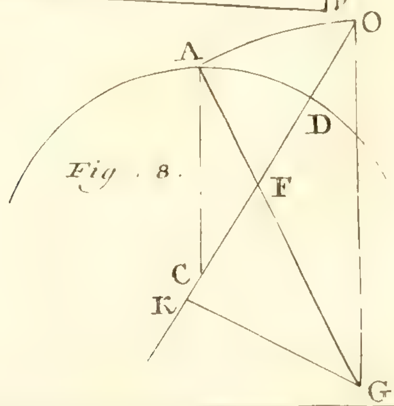
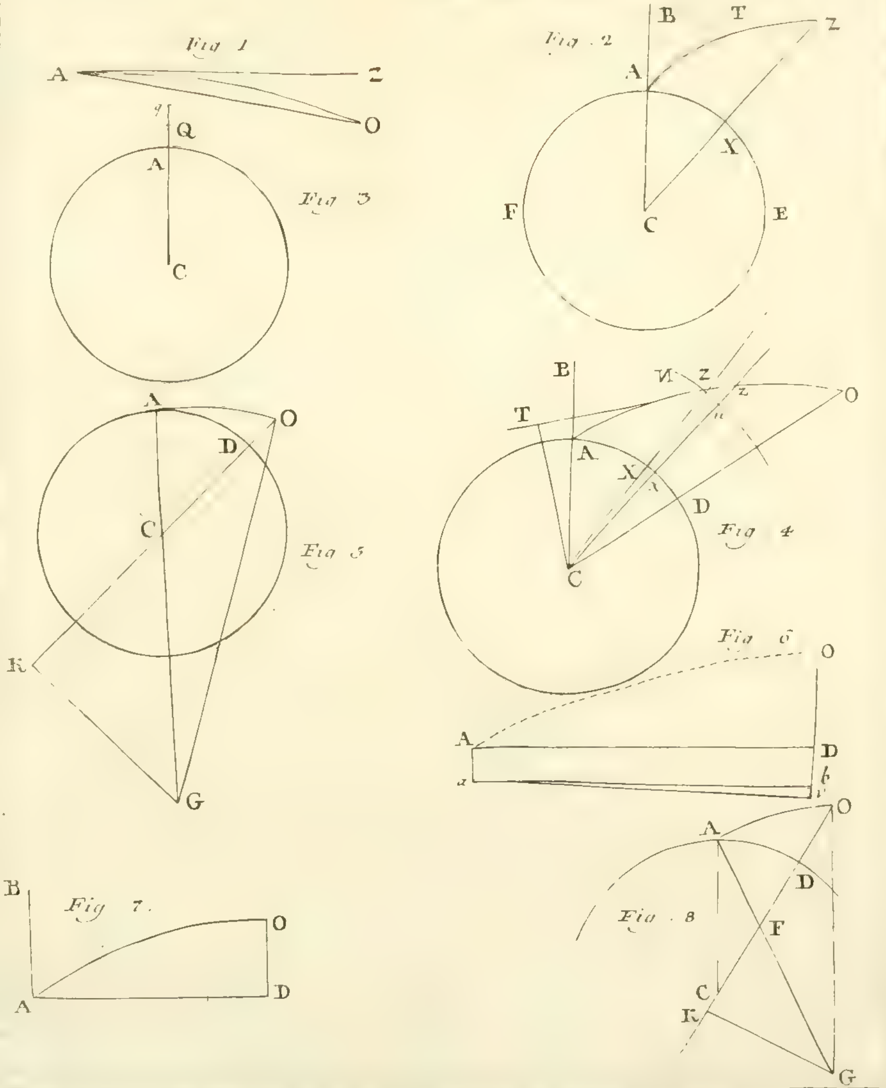


Fig. 8.


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8

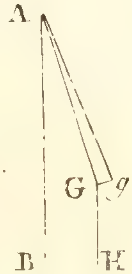


Fig. 2.

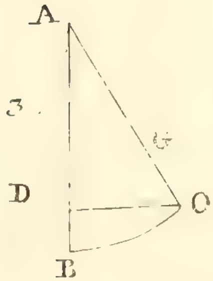


Fig. 3.



Fig. 1

Fig. 2



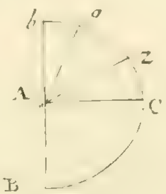
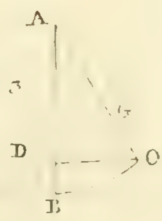
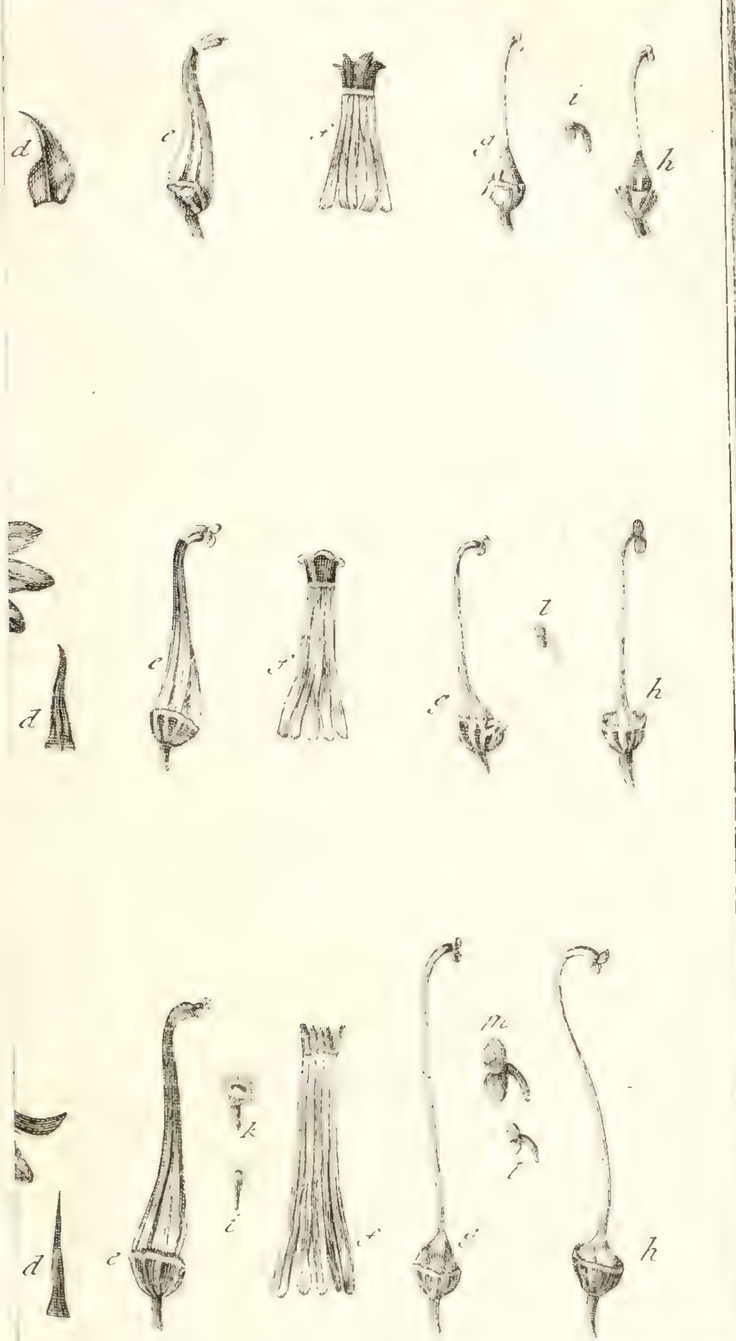
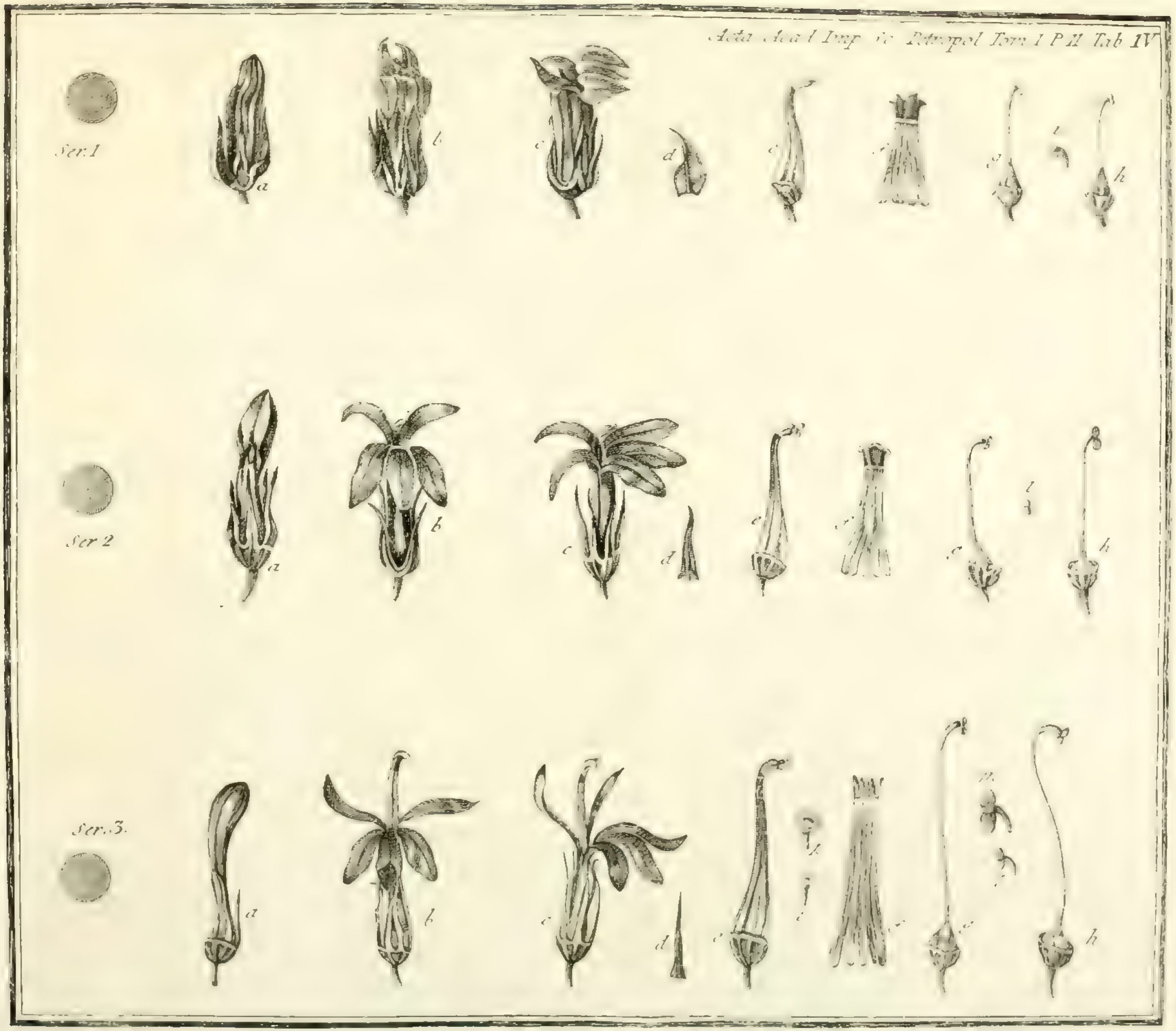


Fig. 4

Fig. 3



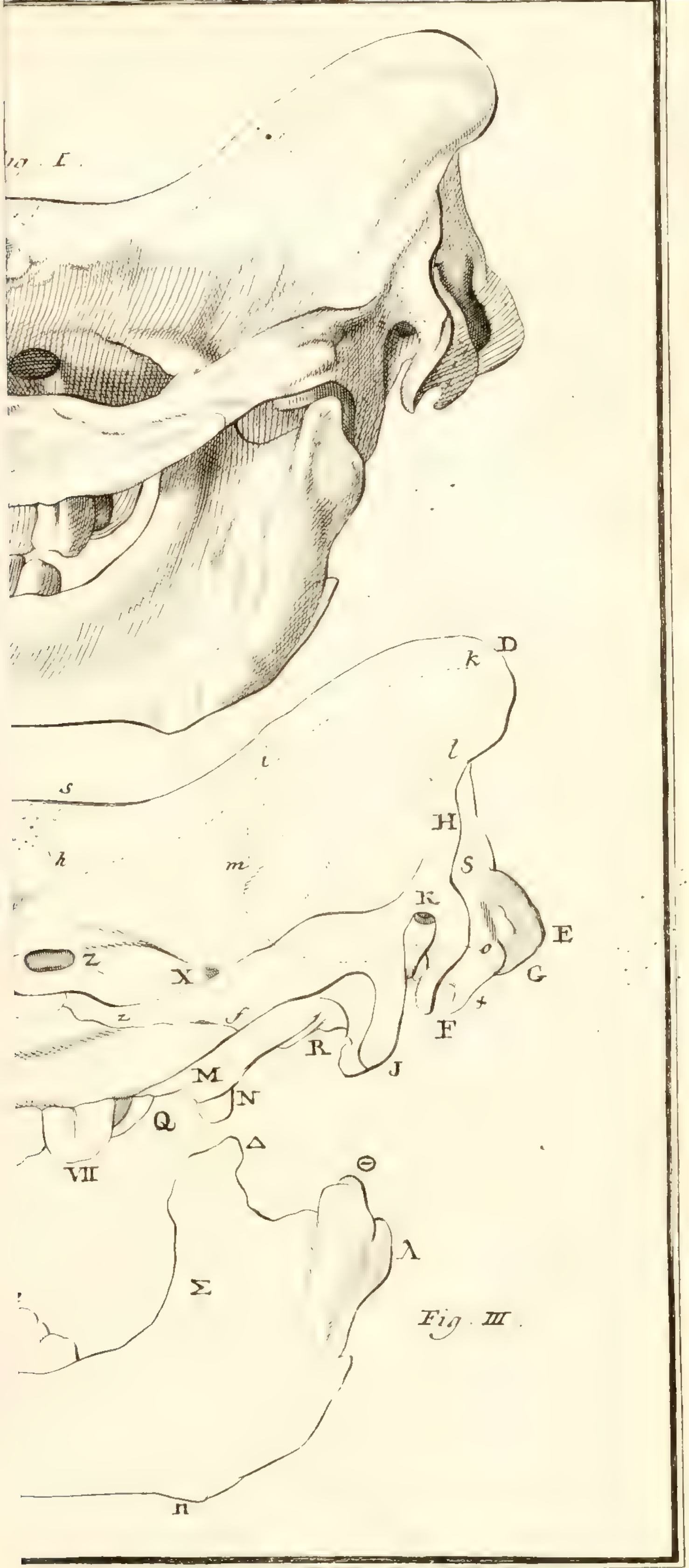

d
c
f
g
i
h
d
e
f
l
g
h
d
e
k
i
f
m
l
g
h

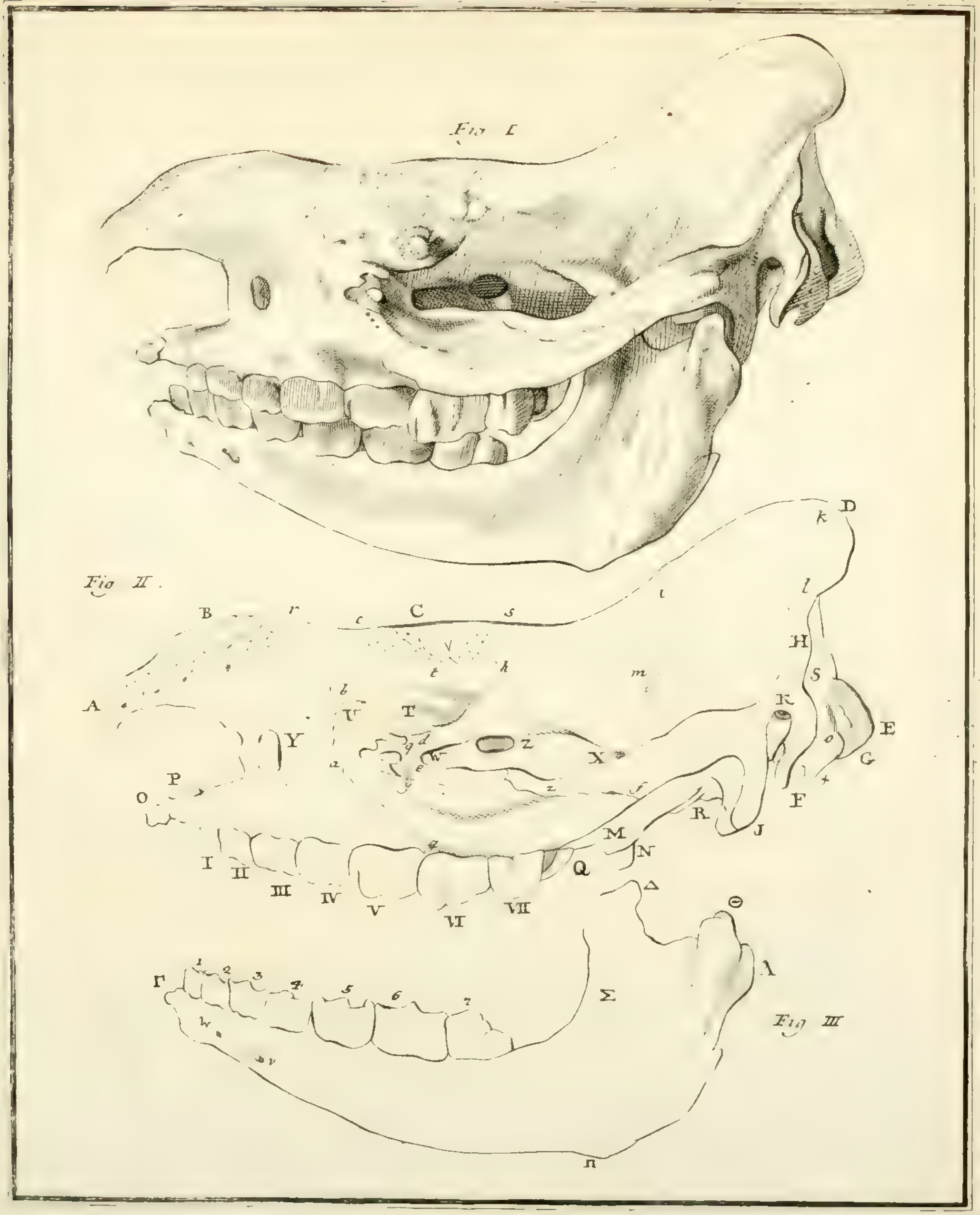

Ser. 1
Ser. 2
Ser. 3.


N
O
1
12
2. Ped
rheneland

Acta. Acad. Imp. Sc. Petropol. Tom. I. p. II. Tab. V.




ig. I.
D
k
l
i
s
H
h
m
S
K
E
Z
o
X
G
z
f
F
R
J
M
N
Q
Δ
VII
Θ
Λ
Σ
Fig. III.
n


Fig I
Fig II
Fig III

Tab. VII.

Fig. II.

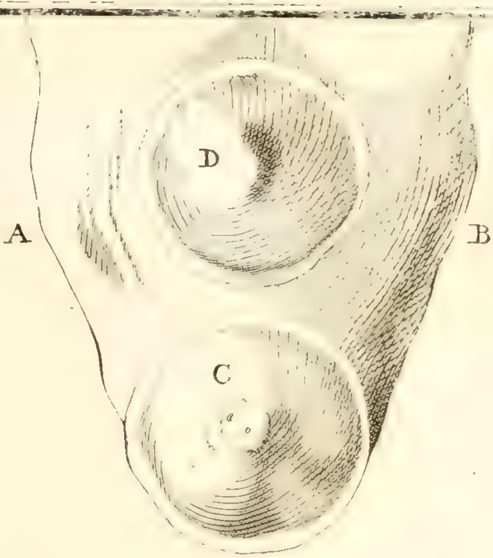




Fig. III.

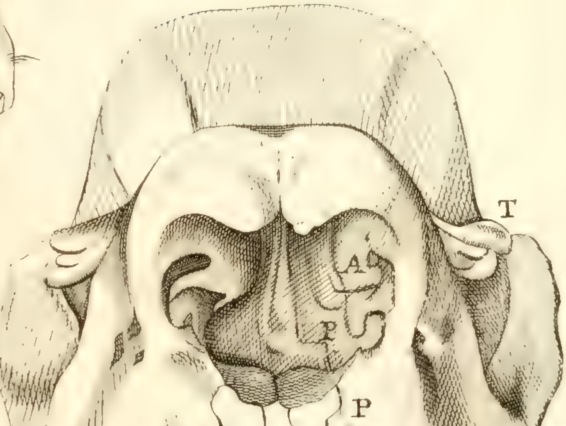
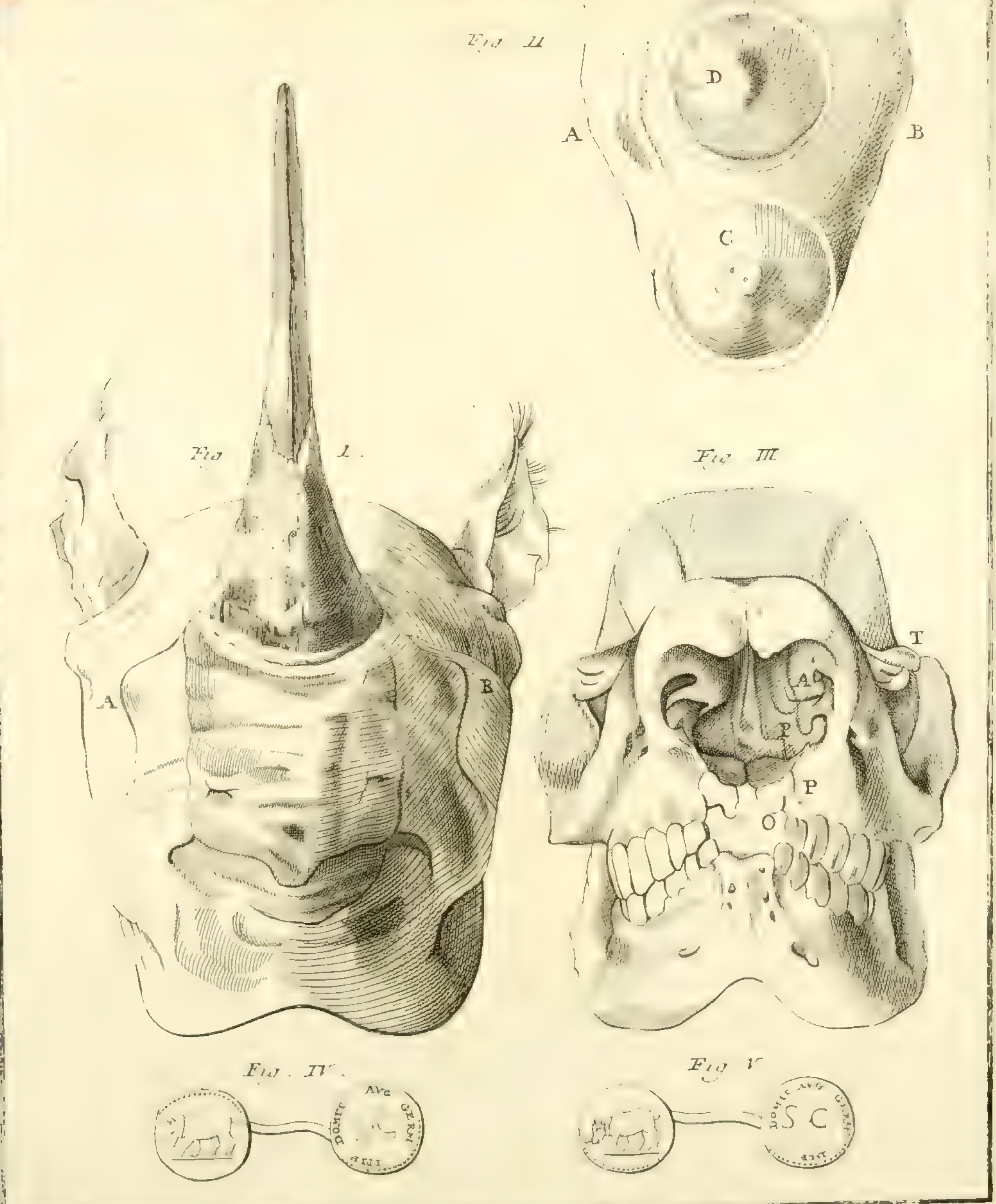


Fig. V.




Fig II
D
A
B
C
Fig I.
A
B
Fig III
T
A
P
P
O
Fig. IV.
AVG
GERM
DOMIT
IMP
Fig V
DOMIT AVG GERM
S C
IMP

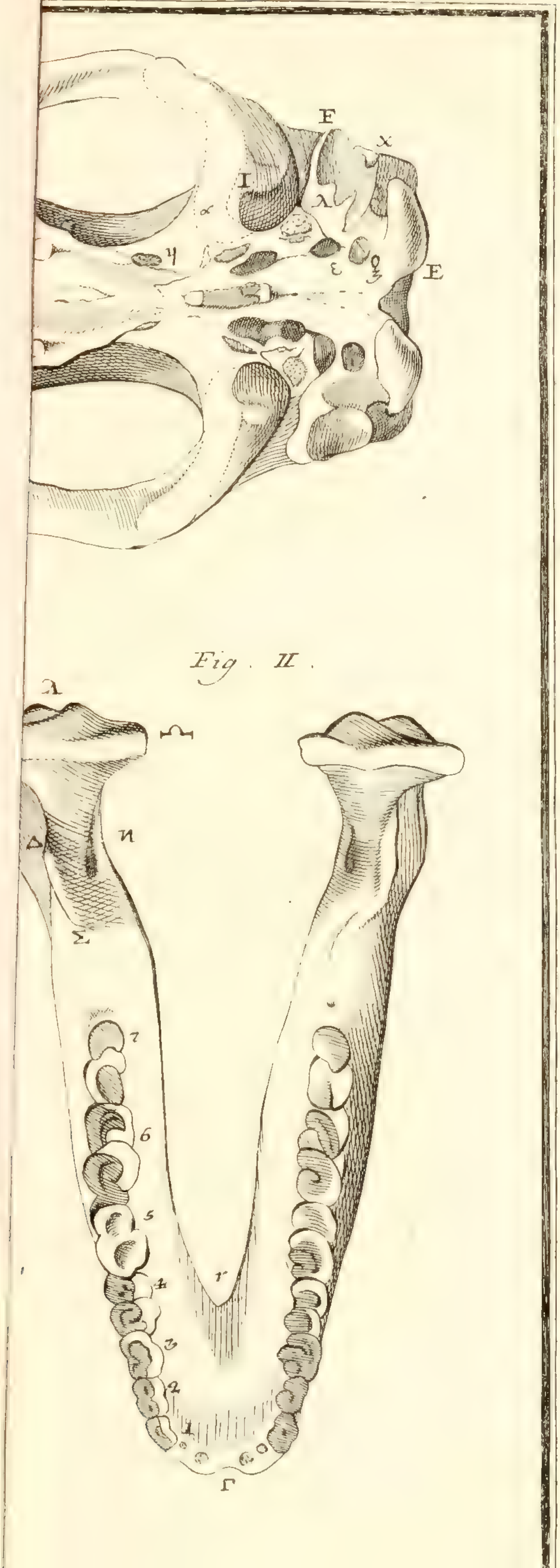


Fig. II.

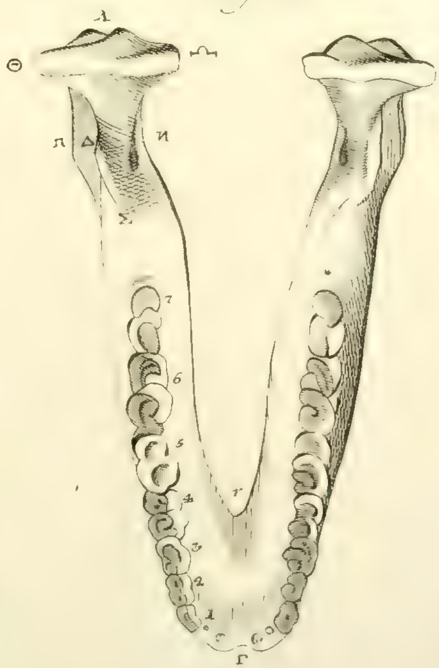
Fig. I.

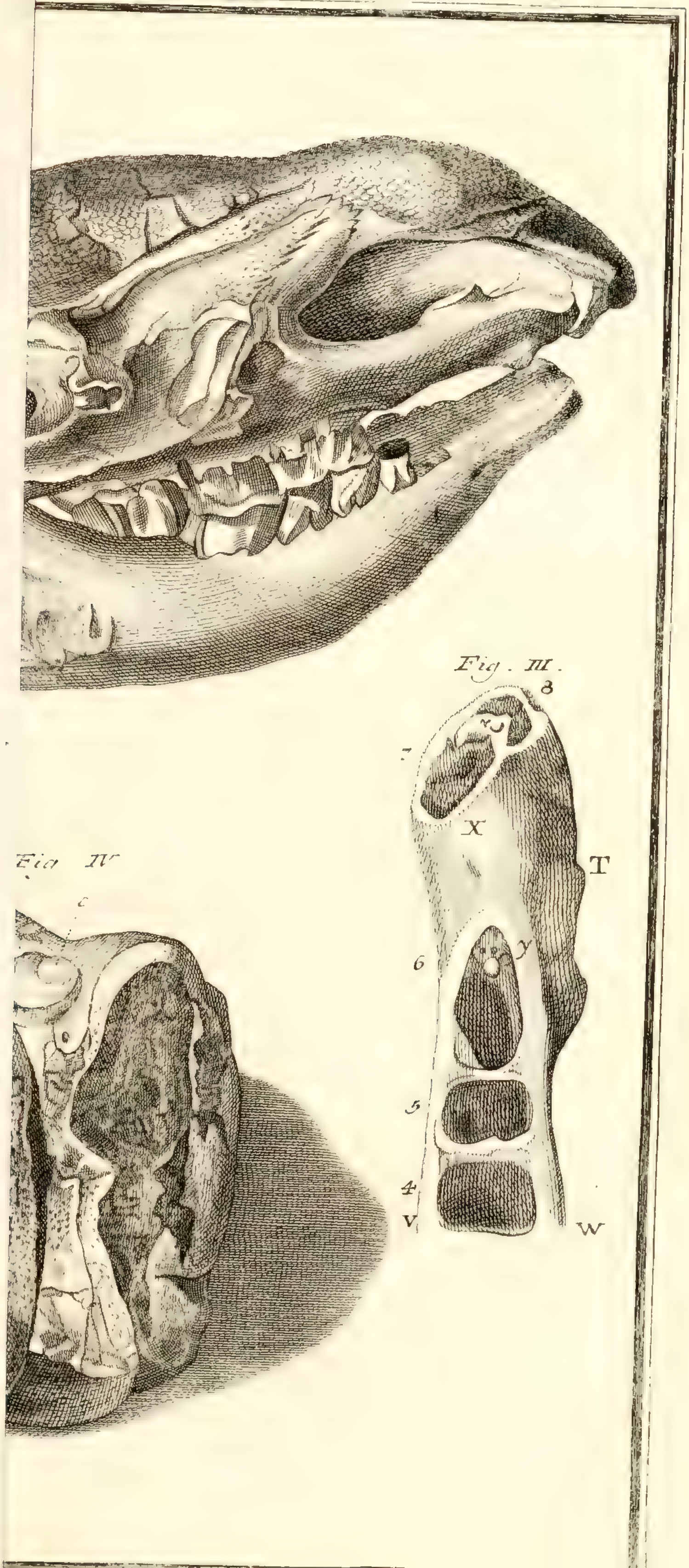


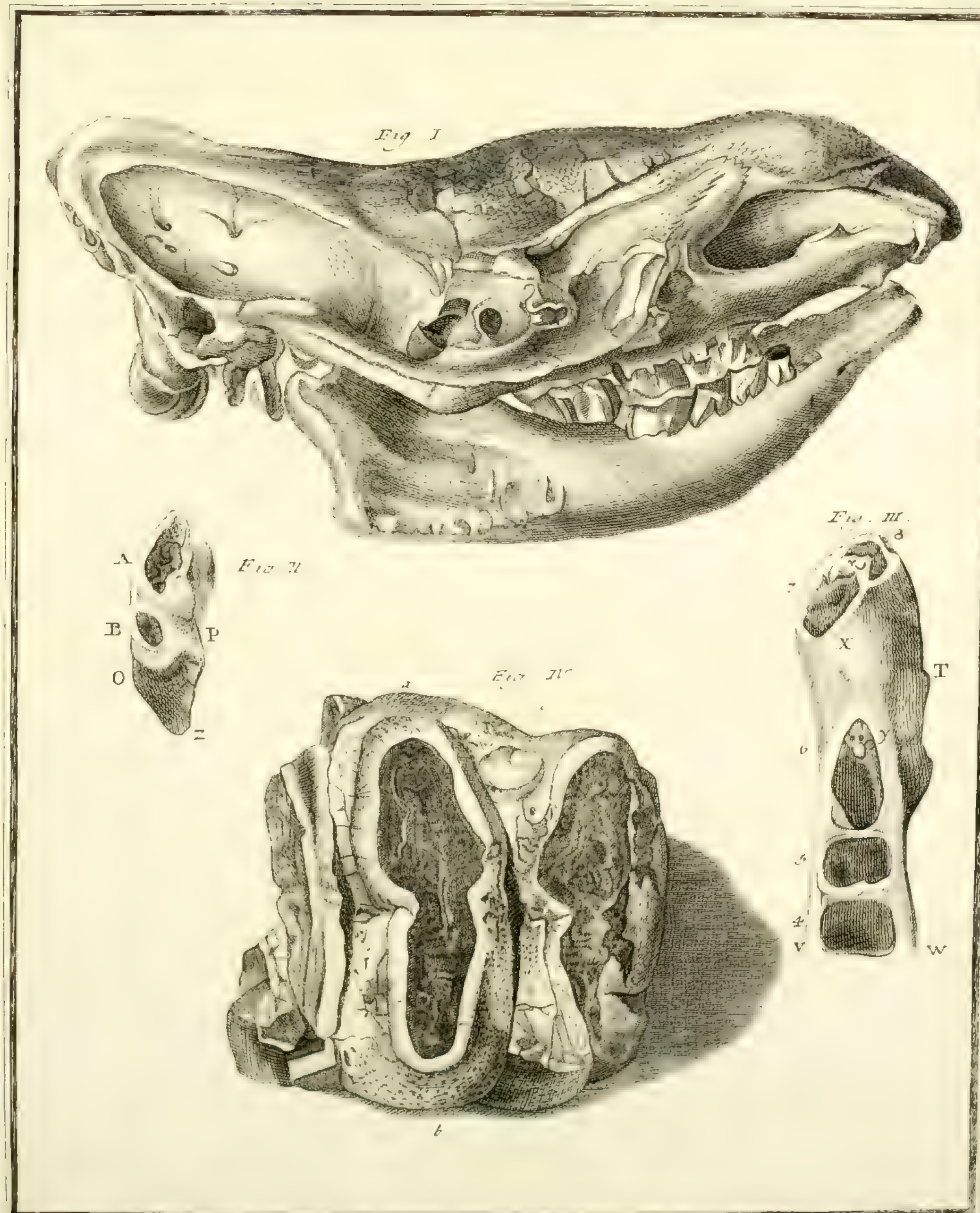
Fig. III



Fig. II




Fig. III.
8
7
X
T
6
y
5
4
V
W
Fig. IV.
c


Fig I
Fig II
A
B
P
O
Z
Fig. III
X
T
V
W
Fig IV
b

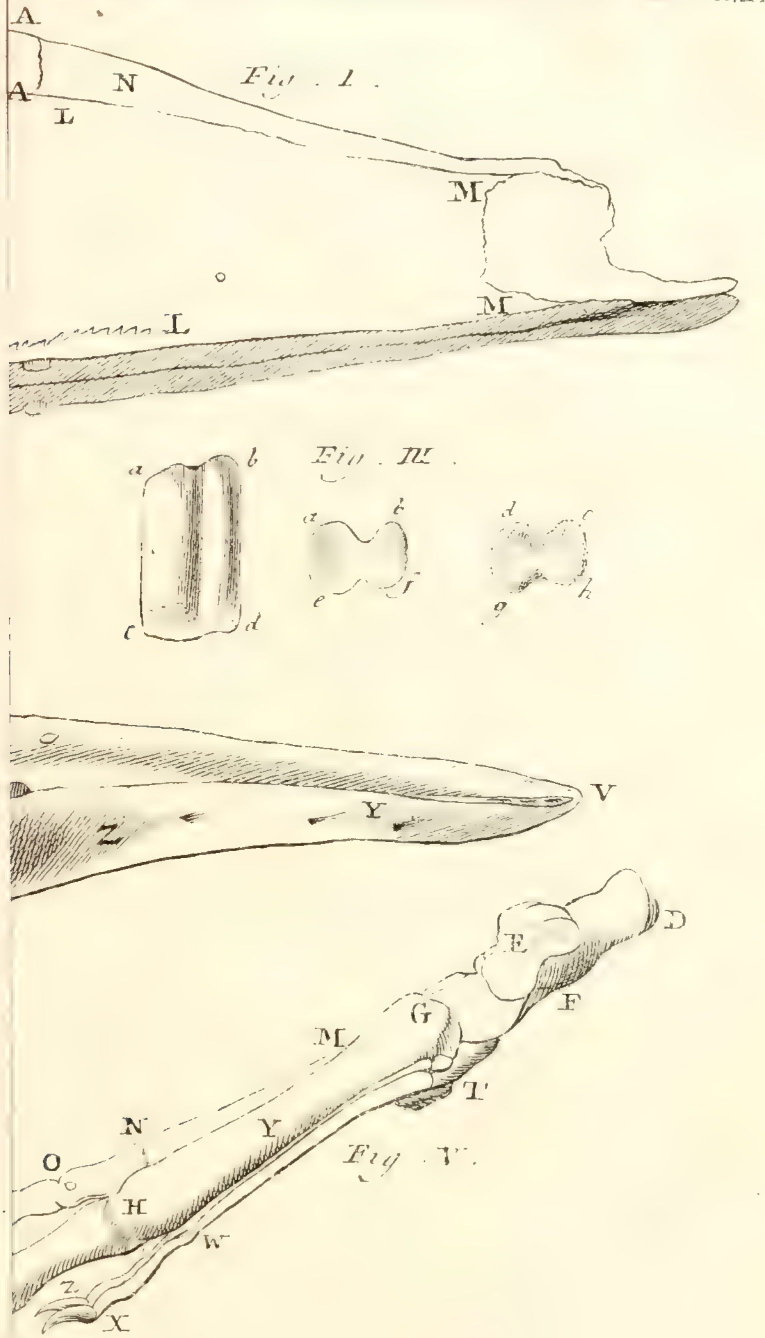
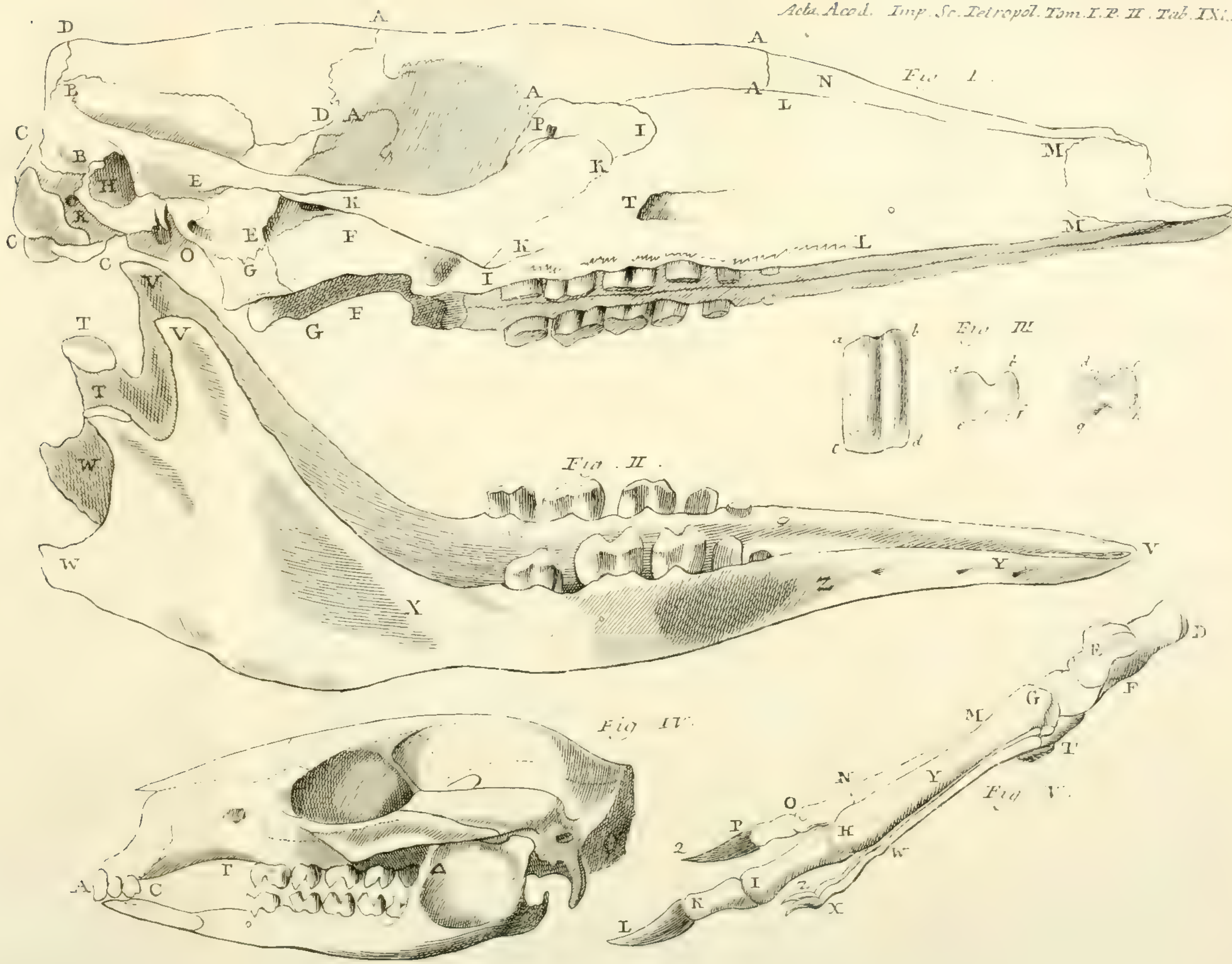


Fig. I.
A
A
N
L
M
M
L
Fig. III.
a
b
c
d
a
b
e
f
d
c
g
h
V
Y
Z
D
E
F
G
M
T
N
Y
O
H
W
Z
X
Fig. V.


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.

Petropol. Tom. I p. II. Tab. X.



runniens.

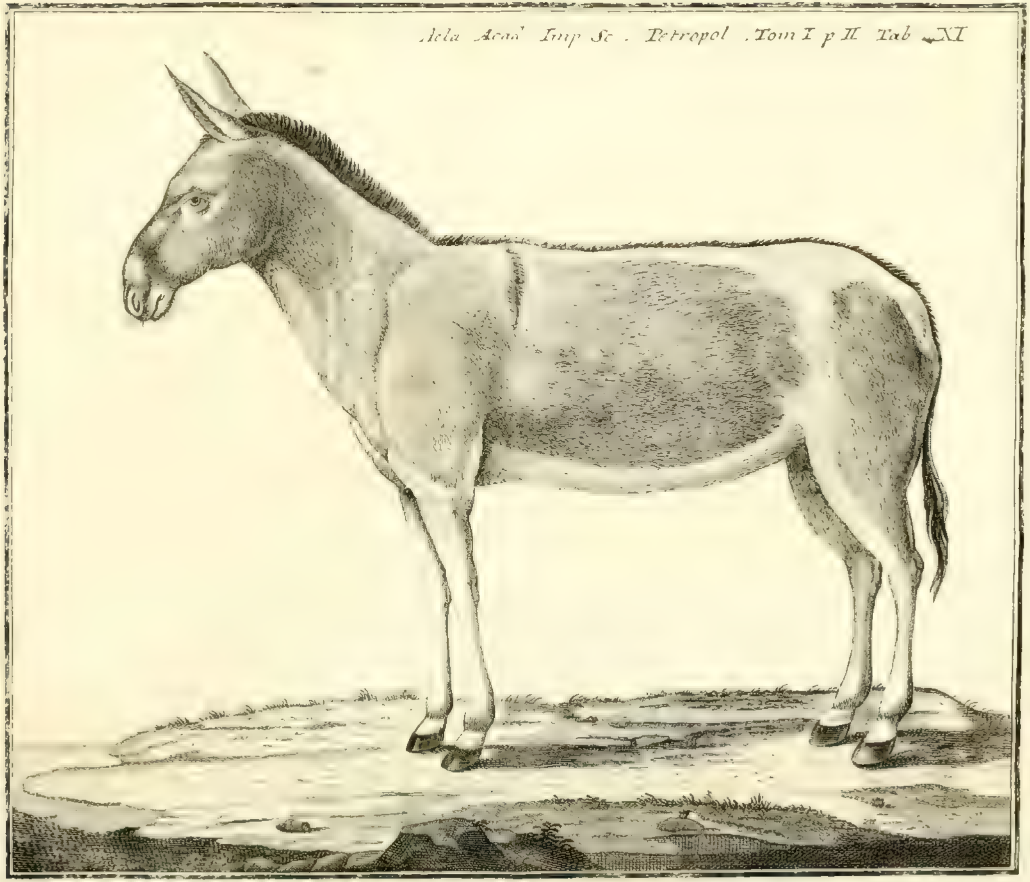


Bos grunniens.

Imp. Sc. Petropol. Tom. I. p. II Tab. XI.



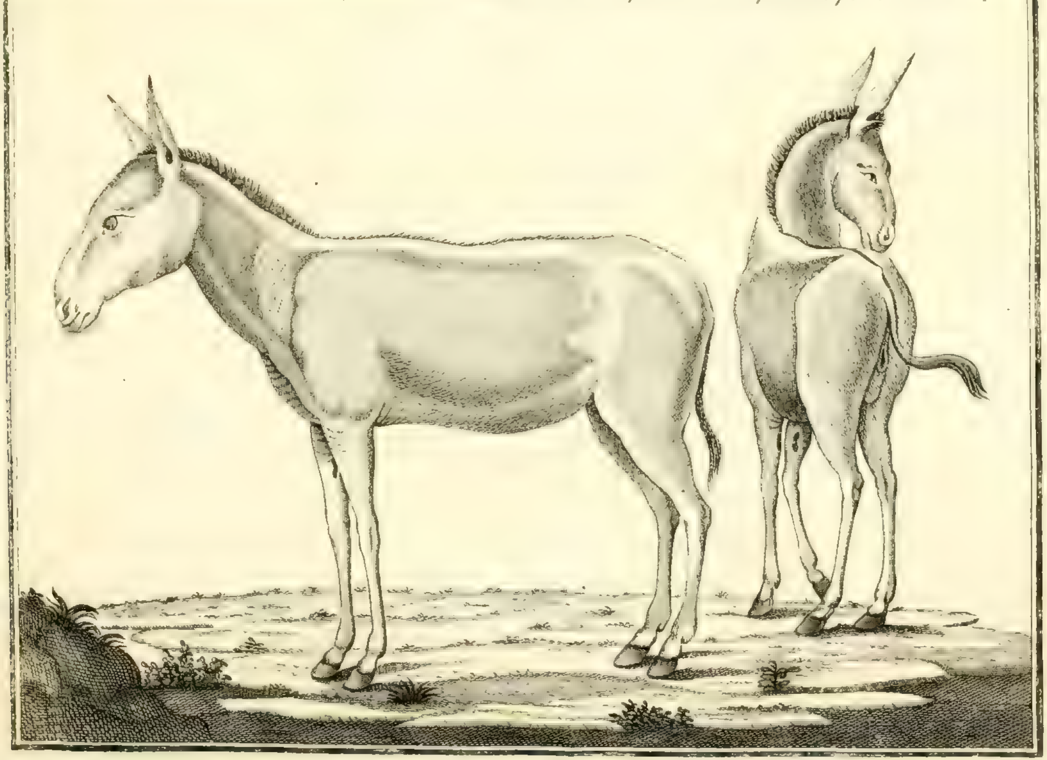
nus ferus.



Equus Asinus ferus.

…ad . Imp . Sc . Petropol. Tom. I. p. II . Tab . XII .





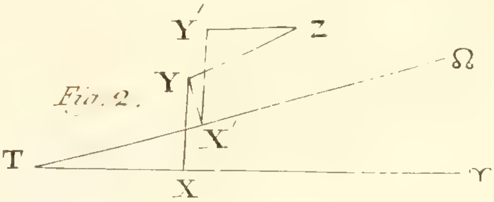


Fig. 2.

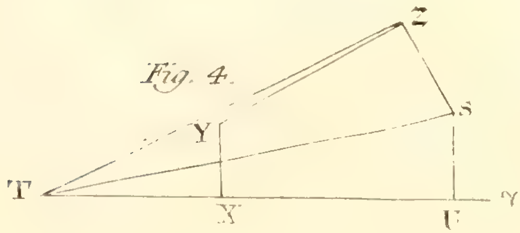


Fig. 4.

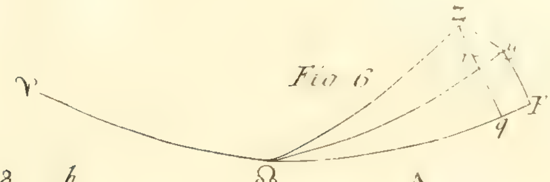


Fig. 6.

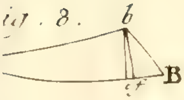


Fig. 8.

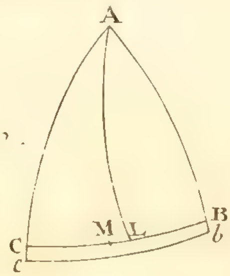


Fig. 9.

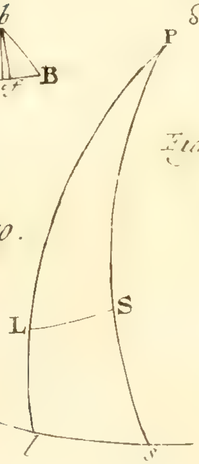
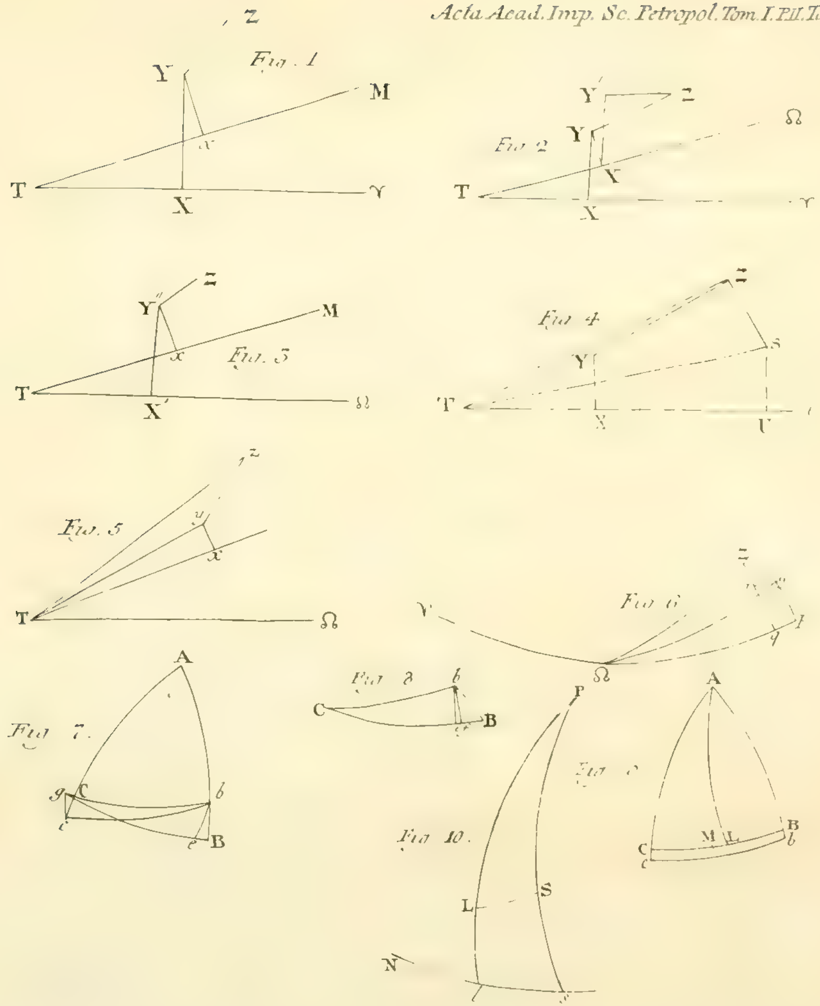


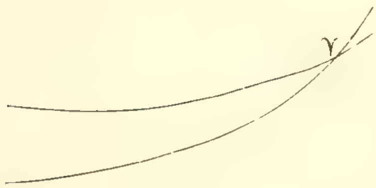
Fig. 10.

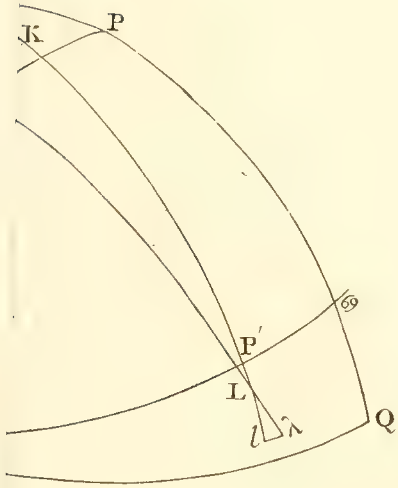

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 10
T
X
Y
M
Z
A
B
C
P
L
S
N

Acad. Imp. Sc. Petropol. Tom. I. P. II. Tab XIV.



.1.





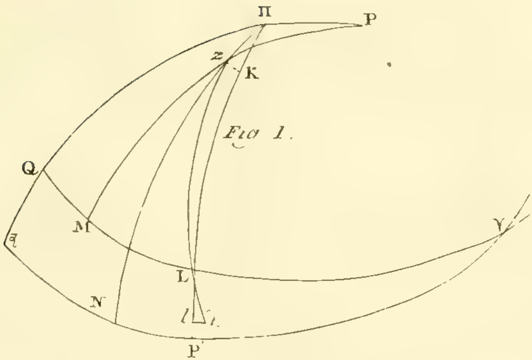


Fig. 1.

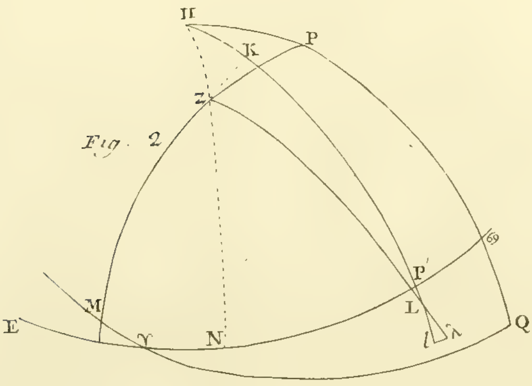


Fig. 2.